

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ Ι (21-2-2010)

Διδάσκοντες: Ε.Σ. Μακρή, Π. Μπομποτάς

Θέμα 1ο. (1.5 μον.) (i) Για τρία ενδεχόμενα A, B, Γ , υποθέτουμε ότι $P(A \cap B) = P(A \cap \Gamma)$ και $P(B \cap \Gamma) = 0$. Δείξτε ότι $P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) - 2P(A \cap B)$. (ii) Αν $P(A) = 0.6, P(B) = 0.3, P(A \cap B^c) = 0.4$ και $B \subset \Gamma$, να υπολογίσετε την $P(A \cup B^c \cup \Gamma^c)$.

Θέμα 2ο. (2 μον.) Μια κάλπη περιέχει 15 σφαίρες, από τις οποίες 10 είναι κόκκινες και 5 μαύρες. Εκλέγονται 4 σφαίρες, η μια κατόπιν της άλλης, χωρίς επανατοποθέτηση. (i) Να υπολογισθεί η πιθανότητα η πρώτη και η τέταρτη σφαίρα που εκλέγονται να είναι κόκκινες. (ii) Να υπολογισθεί η πιθανότητα η πρώτη σφαίρα που εκλέχτηκε να είναι κόκκινη, όταν γνωρίζουμε ότι η δεύτερη, η τρίτη και η τέταρτη σφαίρα είναι μαύρες;

Θέμα 3ο. (3 μον.) Α. (1 μον.) Να διατυπώσετε τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ συνάρτησης πιθανότητας και συνάρτησης κατανομής μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής.

Β. (2 μον.) Η συνάρτηση πιθανότητας μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \frac{2 - |x - 2|}{4}, \quad x = 1, 2, 3.$$

(i) Βρείτε την συνάρτηση κατανομής $F(x), x \in \mathbb{R}$, την μέση τιμή $E(X)$ και την διασπορά $V(X)$ της τ.μ. X . (ii) Να υπολογίσετε την $E(100 - 2X)$ και την $V(100 - 2X)$.

Θέμα 4ο. (3.5 μον.) Α. (1 μον.) Δείξτε ότι αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, τότε η τυχαία μεταβλητή $Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

Β. (2.5 μον.) Η ετήσια βροχόπτωση (σε ίντσες) μιας περιοχής είναι κανονική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή $\mu = 40$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 4$. (α) Ποιά είναι η πιθανότητα για ένα (οποιοδήποτε) έτος η ετήσια βροχόπτωση να ξεπεράσει τις 50 ίντσες; (β) Ποιά είναι η πιθανότητα για ένα (οποιοδήποτε) έτος η ετήσια βροχόπτωση να είναι μεταξύ των 40 και 50 ιντσών; (γ) Ποιά είναι η πιθανότητα ότι σε τουλάχιστον δύο από τα επόμενα 4 έτη η ετήσια βροχόπτωση θα ξεπεράσει τις 50 ίντσες; (δ) Ποιά είναι η πιθανότητα ότι θα χρειασθεί να περάσουν τουλάχιστον 4 έτη για να έχουμε 2 έτη με ετήσια βροχόπτωση πάνω από 50 ίντσες;

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ