

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ Ι (29-1-2013)

Διδάσκοντες: Σ. Κουρούκλης, Ε.Σ. Μακρή

**Θέμα 1ο.** (2.5 μον.) **(Α)** Να ορισθεί η συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής (τ.μ.) και να δοθούν χωρίς απόδειξη τρεις χαρακτηριστικές ιδιότητές της.

**(Β)** Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής της θετικής τ.μ.  $X$  η οποία έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

και να υπολογισθούν οι πιθανότητες  $P(1/2 < X < 3/2)$ ,  $P(\ln X > 0 \mid X > 1/2)$  και η διασπορά  $V(-5X + 2013)$ .

**Θέμα 2ο.** (2.5 μον.) **(Α)** Έστω  $X$  τ.μ. που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

**(i)** Η  $X$  έχει διάμεσο  $m$  αν  $P(X \leq m) = P(X > m)$ . Να δειχθεί ότι  $m = \frac{\ln 2}{\lambda}$ .

**(ii)** Αν  $Y$  είναι η τ.μ. η οποία ορίζεται από τη σχέση

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{αν } X \leq m \\ 1, & \text{αν } X > m, \end{cases}$$

να βρεθούν η συνάρτηση πιθανότητας και η μέση τιμή της  $Y$ .

**(Β)** Έστω ότι η διάρκεια μιας τηλεφωνικής κλήσης προς ένα τηλεφωνικό κέντρο ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή 3 λεπτά. **(i)** Σε 10 ανεξάρτητες κλήσεις, ποιά είναι η πιθανότητα τουλάχιστον 2 εζ' αυτών να υπερβούν τη μέση διάρκεια κλήσης; **(ii)** Σε πόσες κατά μέσον όρο κλήσεις θα υπάρξει για πρώτη φορά κλήση διάρκειας μεγαλύτερης από τη μέση διάρκεια;

**Θέμα 3ο.** (2 μον.) **(Α)** Έστω  $X$  μια τ.μ. που ακολουθεί την κανονική κατανομή  $N(\mu, \sigma^2)$ . Να δοθεί η κατανομή της τ.μ.  $Y = -2X - 5$ .

**(Β)** Ένα εργοστάσιο κατασκευάζει ανταλλακτικά κινητήρων συγκεκριμένης χρήσης. Η διάρκεια ζωής  $X$  (σε στροφές  $\times 10^6$ ) ενός ανταλλακτικού ακολουθεί (κατά προσέγγιση) την κατανομή  $N(50, 5^2)$  αν είναι τύπου I ή την κατανομή  $N(30, 5^2)$  αν είναι τύπου II. Το 40% των κινητήρων είναι εφοδιασμένοι με ανταλλακτικά τύπου I και το 60% με ανταλλακτικά τύπου II. Σε ένα κινητήρα

διαπιστώθηκε ότι η διάρκεια ζωής του ανταλλακτικού ήταν μικρότερη από 40 (στροφές $\times 10^6$ ). Ποιά είναι η πιθανότητα να έχει ο κινητήρας αυτός ανταλλακτικό τύπου II; Δίνεται ότι:  $\Phi(1) = 0.84$ ,  $\Phi(1.4) = 0.92$ ,  $\Phi(2) = 0.98$ ,  $\Phi(2.35) = 0.99$ .

**Θέμα 4ο.** (1.5 μον.) **(A)** Από το δυναμοσύνολο (το σύνολο των υποσυνόλων) του συνόλου  $A = \{1, 2, \dots, 10\}$  εκλέγεται τυχαία ένα υποσύνολό του. **(i)** Ποιά είναι η πιθανότητα το υποσύνολο αυτό να περιέχει τους αριθμούς 3 και 7; **(ii)** Ποιά είναι η πιθανότητα το μικρότερο στοιχείο του υποσυνόλου αυτού να είναι το 5;

**(B)** Από το δυναμοσύνολο του συνόλου  $A = \{1, 2, \dots, 10\}$  εκλέγονται τυχαία 5 στοιχεία του, χωρίς επανατοποθέτηση. Ποιά είναι η πιθανότητα ακριβώς 2 από αυτά να έχουν περιττό πλήθος στοιχείων;

**Θέμα 5ο.** (1.5 μον.) Έστω ότι η τ.μ.  $X$  ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο  $\lambda$ , η τ.μ.  $Y$  ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο  $2\lambda$  και  $A$  το ενδεχόμενο η  $X$  να πάρει άρτια τιμή.

**(i)** Ναδειχθεί ότι  $E[(-1)^X] = P(Y = 0)$ .

**(ii)** Ναδειχθεί ότι  $P(A) = \frac{1+e^{-2\lambda}}{2}$ .