ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ Ι (28-1-2016)

Διδάσκοντες: Σ. Κουρούκλης, Ε.Σ. Μακρή

Θέμα 1ο. (1.5 μον.) (α) Να αποδειχθεί η σχέση που δίνει την $P(A \cup B \cup \Gamma)$. Στην περίπτωση που τα A, B, Γ, είναι ανεξάρτητα με $P(A) = P(B) = P(\Gamma) = p$ να δειχθεί ότι $P(A \cup B \cup \Gamma) = p^3 - 3p^2 + 3p$.

(β) m γυναίκες και n άνδρες κάθονται τυχαία σε $m+n$ θέσεις διατεταγμένες σε (ευθεία) γραμμή. Ποιά είναι η πιθανότητα όλες οι γυναίκες να καθίσουν η μια δίπλα στην άλλη και όλοι οι άνδρες ο ένας δίπλα στον άλλο (να μη καθίσει κανείς άνδρας ανάμεσα σε δύο γυναίκες και καμμία γυναίκα ανάμεσα σε δύο άνδρες); (τα $m+n$ άτομα θεωρούνται διακριτά.)

(γ) Έστω X τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) με συνάρτηση κατανομής F. Να δειχθεί ότι $P(\alpha < X \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$, $\alpha < \beta$.

Θέμα 2ο. (1 μον.) Το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων που παράγονται από κάποιο εργοστάσιο είναι 1%. Κάθε παραγόμενο προϊόν ελέγχεται από έναν τεχνικό ο οποίος σε 95% των περιπτώσεων εντοπίζει ένα ελαττωματικό προϊόν αν όντως αυτό είναι ελαττωματικό. Αν το προϊόν κριθεί από τον τεχνικό ελαττωματικό, τότε απορρίπτεται, διαφορετικά διατίθεται στην αγορά. Ωστόσο σε 1% των περιπτώσεων ο τεχνικός εσφαλμένα απορρίπτει το προϊόν που ελέγχει.

(α) Ποιό είναι το ποσοστό των προϊόντων που απορρίπτονται;

(β) Ποιό είναι το ποσοστό των προϊόντων που ορθώς διατίθενται στην αγορά;

Θέμα 3ο. (2 μον.) Η τ.μ. X έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - x^2, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(α) Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής της X.

(β) Να υπολογισθεί η πιθανότητα $P(\mid X \mid \leq 0.2 \mid X > -0.5)$.

(γ) Να υπολογισθούν η $E(\mid X \mid)$ και η $V(\mid X \mid)$.

Θέμα 4ο. (2.5 μον.) (α) Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ να δειχθεί ότι $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

(β) Αν $-X + 3 \sim N(2, 25)$ να βρεθεί η κατανομή της $-3X + 1$.

(γ) Αν $X \sim N(-2,1)$ να βρεθεί η $E[(X+3)(X+4)(X+5)]$.

(δ) Αν η X έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, & \text{αν } 0 < x < 1,\ \alpha > 0,\ \beta > 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

να βρεθεί η $V((1-X)^2)$.

Θέμα 5ο. (3 μον.) (Α) Αν η τ.μ. X έχει εκθετική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας f και ισχύει ότι $f(x) = P(X > x)$, $x > 0$, να υπολογισθεί η $V(X^2)$.

(Β) Σύστημα αποτελείται από n μονάδες που λειτουργούν ανεξάρτητα. Η διάρκεια ζωής κάθε μονάδας είναι τ.μ. που ακολουθεί την κατανομή της X του ερωτήματος (Α). Το σύστημα λειτουργεί εφ' όσον όλες οι μονάδες του λειτουργούν.

(α) Να βρεθεί η κατανομή του αριθμού των μονάδων (μεταξύ των n) που λειτουργούν τη χρονική στιγμή $t = 2E(X)$ από την έναρξη λειτουργίας.

(β) Πόσες κατά μέσον όρο μονάδες δεν λειτουργούν τη χρονική στιγμή $t = 2E(X)$ από την έναρξη λειτουργίας;

(γ) Να βρεθεί η πιθανότητα το σύστημα να μην λειτουργεί τη χρονική στιγμή $t = 2E(X)$ από την έναρξη λειτουργίας.

(δ) Παρατηρήθηκε ότι τη χρονική στιγμή t_0 από την έναρξη λειτουργίας, το σύστημα δεν λειτουργούσε (βλάβη). Να βρεθεί η πιθανότητα η βλάβη να οφείλεται στην πρώτη μονάδα και μόνο σε αυτήν.