

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ Ι (15-9-2009)

Διδάσκοντες: Ε. Σ. Μακρή, Π. Μπομποτάς

Θέμα 1ο. (3 μον.) (α) (1.5 μον.) Αν A, B, Γ είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , να εξετάσετε αν είναι επίσης ανεξάρτητα τα ενδεχόμενα (i) $A \cup B, \Gamma$, (ii) $A, B \cap \Gamma$, (iii) $A \cap B, A \cap \Gamma$. (β) (1.5 μον.) Δύο φοιτητές, Φ_1, Φ_2 , δουλεύοντας ανεξάρτητα, προσπαθούν να λύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα. Η πιθανότητα να το λύσει ο Φ_1 είναι 0.8 και η πιθανότητα να το λύσει ο Φ_2 είναι 0.4. (i) Ποιά είναι η πιθανότητα να μη λυθεί το πρόβλημα; (ii) Ποιά είναι η πιθανότητα να λύσει το πρόβλημα μόνο ο Φ_1 ; (iii) Αν το πρόβλημα λύθηκε μόνο από έναν φοιτητή ποιά είναι η πιθανότητα να έχει λυθεί από τον Φ_1 ;

Θέμα 2ο. (2.5 μον.) (α) (1 μον.) Αν F είναι η συνάρτηση κατανομής και f η συνάρτηση πιθανότητας μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής ποιές είναι οι σχέσεις που συνδέουν τις δύο συναρτήσεις; (β) (1.5) Εστω X μια διακριτή τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = P(X = x) = \frac{5 \cdot 3^{x-1}}{8^x}, \quad x = 1, 2, 3, \dots$$

(i) Να υπολογισθεί η συνάρτηση κατανομής και η μέση τιμή της X . (ii) Να δειχθεί ότι για κάθε θετικό ακέραιο k , ισχύει $P(X > \nu + k | X > \nu) = P(X > k)$. (iii) Να υπολογίσετε την πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X να πάρει περιττή τιμή. (Υπενθυμίζεται ότι: $\sum_{i=1}^n \alpha \omega^{i-1} = \alpha \frac{1-\omega^n}{1-\omega}$ και $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha \omega^{i-1} = \alpha \frac{1}{1-\omega}$, $|\omega| < 1$).

Θέμα 3ο. (2 μον.) Η διάρκεια λειτουργίας (σε ώρες) ενός μηχανήματος που κατασκευάζεται από ένα εργοστάσιο είναι μια τ.μ. που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0, \quad \lambda > 0.$$

(α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διασπορά της X . (β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες (i) $P(j < X \leq j + 1)$, $j = 0, 1, \dots$ και (ii) $P(X > s + t | X > s)$, $s, t > 0$. (γ) Αν είναι γνωστό ότι $P(X > 1000) = 0.8$ ποιός είναι ο μέσος αριθμός ωρών που θα λειτουργήσει ένα τέτοιο μηχάνημα;

Θέμα 4ο. (2.5 μον.) Η εσωτερική διάμετρος (σε ίντσες) των σωλήνων από χαλκό που παράγει ένα εργοστάσιο, είναι τ.μ. που ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(10, \sigma^2)$. Σωλήνες με εσωτερική διάμετρο εκτός των ορίων 10 ± 0.1 ίντσες, ανακυκλώνονται. (α) Αν $\sigma = 0.1$ να βρεθεί η πιθανότητα να ανακυκλωθούν ακριβώς 3 σωλήνες σε ένα δείγμα 5 σωλήνων που επιλέχτηκαν τυχαία από την παραγωγή του εργοστασίου. (β) Πόση θα πρέπει να γίνει η διασπορά του μήκους της εσωτερικής διαμέτρου των παραγομένων σωλήνων (η μέση τιμή παραμένει σταθερή) έτσι ώστε η πιθανότητα ανακύκλωσης ενός σωλήνα να είναι 0.06;

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ