

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ Ι (18-9-2014)

Διδάσκοντες: Σ. Κουρούκλης, Ε.Σ. Μακρή

Θέμα 1ο. (1.5 μον.) (β) Αν A και B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού Ω με $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$ και $P(A \cap B) = 1/4$ να υπολογισθεί η $P(B^c | A^c)$.

(β) Αν A και B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού Ω , με $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, να δειχθεί ότι $P(B | A) > P(B)$ αν και μόνο αν $P(A | B) > P(A)$.

(γ) Να δειχθεί ότι αν A_1, A_2, \dots, A_n είναι ανά δύο ξένα (ασυμβίβαστα) ενδεχόμενα ενός δειγματικού Ω και B ενδεχόμενο του ίδιου δειγματικού χώρου με $P(B) > 0$ τότε $P(\cup_{i=1}^n A_i | B) = \sum_{i=1}^n P(A_i | B)$.

Θέμα 2ο. (2 μον.) Η συνεχής τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{12}x, & \text{αν } -2 < x \leq 0 \\ \frac{5}{3}x, & \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Να υπολογισθούν (α) η $V(3X)$ και (β) η $P(X < 1/2 | X > -1)$.

Θέμα 3ο. (2.5 μον.) (Α) Αν η τ.μ. X ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ να δειχθεί ότι $E(X^r) = \frac{r!}{\lambda^r}$, $r = 1, 2, \dots$

(Β) Η διάρκεια X , σε δευτερόλεπτα, εκτέλεσης ενός προγράμματος σε έναν υπολογιστή είναι τ.μ. με εκθετική κατανομή και συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30}e^{-\frac{1}{30}x}, & x > 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(α) Αν η εκτέλεση ενός προγράμματος δεν έχει ολοκληρωθεί 40 δευτερόλεπτα μετά την έναρξή του, ποιά είναι η πιθανότητα να χρειασθούν τουλάχιστον 30 δευτερόλεπτα ακόμη για την ολοκλήρωσή του;

(β) Αν σε καθέναν από 10 παρόμοιους υπολογιστές ξεκινήσει ταυτόχρονα η εκτέλεση ενός τέτοιου προγράμματος, να υπολογισθεί η πιθανότητα να εκτελούνται περισσότερα από 2 προγράμματα 60 δευτερόλεπτα μετά την έναρξή τους.

Θέμα 4ο. (2 μον.) (Α) Αν για την τ.μ. X ισχύουν οι σχέσεις $E[(X - 3)^2] = 9$ και $V(X) = 9$, να υπολογισθεί η $E[X(X - 1)]$.

(B) Αν X είναι μια τ.μ. με κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 και c ένας πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $P(X > c) = 2P(X \leq c)$, να δειχθεί ότι $c = \mu + \sigma\Phi^{-1}(1/3)$.

Θέμα 5ο. (2 μον.) Δύο παίκτες, ο A και ο B , παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι. Ρίχνουν επανειλημμένα ένα αμερόληπτο νόμισμα. Αν σε μία ρίψη εμφανισθεί η όψη “Κεφάλι” κερδίζει ο A 1 Ευρώ από τον B , ενώ αν εμφανισθεί η όψη “Γράμματα” κερδίζει ο B 1 Ευρώ από τον A . Το παιχνίδι τελειώνει όταν κάποιος από τους δύο παίκτες χρεωκοπήσει (δηλ. έχει 0 Ευρώ), οπότε νικητής αναδεικνύεται ο άλλος. Αν στην αρχή του παιχνιδιού ο καθένας τους διαθέτει 6 Ευρώ, να υπολογισθούν οι πιθανότητες

(α) να τελειώσει το παιχνίδι στην 6η ρίψη με νικητή τον A ,

(β) να τελειώσει το παιχνίδι στην 6η ρίψη,

(γ) να τελειώσει το παιχνίδι στην 8η ρίψη με νικητή τον A .