

ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΙΙ (17-6-2009)

Διδάσκοντες : Ε.Σ. Μακρή, Π. Μπομποτάς

Θέμα 1ο. (1.5 μον.) Να δείξετε ότι αν οι X_1 και X_2 είναι δύο τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.) και $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ πραγματικοί αριθμοί τότε

$$Cov(\alpha_1 X_1 + \beta_1, \alpha_2 X_2 + \beta_2) = \alpha_1 \alpha_2 Cov(X_1, X_2).$$

Θέμα 2ο. (3 μον.) Εστω X και Y δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 - x^3 y), & \text{αν } -1 < x < 1, -1 < y < 1 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(A) (1 μον.) Να εξετάσετε αν οι τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες. (B) Να υπολογίσετε (i) (1 μον.) τη δεσμευμένη μέση τιμή $E(X | Y = y)$, (ii) (0.5 μον.) τη δεσμευμένη διασπορά $V(X | Y = y)$ (iii) (0.5 μον.) τη πιθανότητα $P(X \leq 1/2 | Y \leq 1/2)$.

Θέμα 3ο. (2.5 μον.) Εστω X_1 και X_2 δύο ανεξάρτητες τ.μ. με εκθετική κατανομή παραμέτρου 1. Αν $Y_1 = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$ και $Y_2 = X_1 + X_2$ (i) να βρείτε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των τυχαίων μεταβλητών Y_1 και Y_2 και (ii) να δείξετε ότι $Y_1 \sim U(0, 1)$ και $Y_2 \sim \Gamma(2, 1)$.

Θέμα 4ο. (3 μον.) (A) Αν X είναι τυχαία μεταβλητή με εκθετική κατανομή με μέση τιμή $1/\lambda$, να βρεθεί η ροπογεννήτρια της. (B) Ο χρόνος ζωής σε ημέρες μιας λυχνίας ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 0.005$. (i) Αν οι λυχνίες χρησιμοποιούνται διαδοχικά η μια μετά την άλλη, να βρεθεί (κατά προσέγγιση μέσω του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος) η πιθανότητα όπως ο συνολικός χρόνος λειτουργίας 49 λυχνιών να ξεπεράσει τις 7700 ημέρες; (ii) Ποιά είναι (κατά προσέγγιση) η πιθανότητα 14 από τις 49 λυχνίες να έχουν ζωή μικρότερη των 140 ημερών;

(Δίνεται ότι αν $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ ($\alpha > 0, \beta > 0$) τότε

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ