

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ II (22-9-2009)

Διδάσκοντες: Ε. Σ. Μακρή, Π. Μπομποτάς

**Θέμα 1ο.** (1.5 μον.) Να δείξετε ότι αν  $X, Y$  είναι δύο διακριτές τ.μ. για τις οποίες υπάρχουν οι παρακάτω εμφανιζόμενες μέσες τιμές, τότε  $E(X) = E(E(X | Y))$ .

**Θέμα 2ο.** (2 μον.) Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των διακριτών τ.μ.  $X$  και  $Y$  δίνεται από τον ακόλουθο πίνακα:

$x \backslash y$	0	1	2	3
0	0.08	0.07	0.04	0
1	0.06	0.15	0.05	0.04
2	0.05	0.04	0.10	0.06
3	0	0.03	0.04	0.07
4	0	0.01	0.05	0.06

Να υπολογίσετε: (α) τις περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας  $f_X(x)$ ,  $f_Y(y)$ , (β) τη δεσμευμένη μέση τιμή  $E(X | Y = 1)$ , (γ) τη συνδιασπορά των  $X$  και  $Y$ ,  $C(X, Y)$ .

**Θέμα 3ο.** (2.5) (α) Να διατυπώσετε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα. (β) Υποθέτουμε ότι η διάρκεια μιας τηλεφωνικής κλήσης που δέχεται ένα τηλεφωνικό κέντρο είναι τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) με εκθετική κατανομή με μέση τιμή 3 λεπτά της ώρας. Αν στη διάρκεια μιας ημέρας έγιναν 500 τηλεφωνήματα σε αυτό το τηλεφωνικό κέντρο βρείτε (προσεγγιστικά, με τη βοήθεια του Κ.Ο.Θ.) την πιθανότητα ότι τουλάχιστον 50% αυτών είχαν διάρκεια τουλάχιστον 2 λεπτά (το καθένα).

**Θέμα 4ο.** (4 μον.) Εστω  $X$  και  $Y$  δύο συνεχείς τ.μ. με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-x-2y}, & \text{αν } x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(α) (1 μον.) (α) Βρείτε τις περιθώριες κατανομές των τ.μ.  $X$  και  $Y$  και να εξετάσετε αν αυτές είναι ανεξάρτητες τ.μ.

(β) (1.5 μον.) Αν  $Z = \min(X, Y)$  βρείτε τη συνάρτηση κατανομής και τη ροπογεννήτρια της  $Z$ .

(γ) (1.5 μον.) Αν  $W = X + Y$  βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας της τ.μ.  $W$ .

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ