

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΙΙ (24-9-2013)

Διδάσκοντες: Σ. Κουρούκλης, Ε. Σ. Μακρή

Θέμα 1ο. (2.5 μον.) Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των τυχαίων μεταβλητών (τ.μ.) X_1 και X_2 δίνεται από τον τύπο

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda x_2}, & \text{αν } 0 \leq x_1 \leq x_2 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(α) Ναδειχθεί ότι η X_1 ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ και η X_2 την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους 2 και $1/\lambda$.

(β) Να υπολογισθούν η $E(X_1 | X_2 = x_2)$, $x_2 > 0$, και ο συντελεστής συσχέτισης των X_1 και X_2 .

Θέμα 2ο. (2.5 μον.) Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των τ.μ. X και Y δίνεται από τον τύπο

$$f(x, y) = \frac{3}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2y}, \quad x, y = 0, 1, 2, \dots$$

(α) Να εξετασθεί αν οι τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες. (β) Να υπολογισθεί η πιθανότητα $P(X \geq 2 \text{ ή } Y \leq 2)$. (γ) Να υπολογισθεί η ροπογεννήτρια της τ.μ. $X + Y$.

Θέμα 3ο. (1.5 μον.) 10000 ραδιενεργά σωματίδια φυλλάσσονται σε έναν ασφαλή χώρο. Παρ' όλα αυτά, για κάθε ένα από αυτά τα σωματίδια υπάρχει πιθανότητα διαφυγής στο περιβάλλον, ανεξάρτητα από κάθε άλλο, ίση προς 5×10^{-4} . Αν διαφύγουν περισσότερα από 10 σωματίδια τότε το περιβάλλον μολύνεται. Να δοθεί η ακριβής τιμή της πιθανότητας να μη μολυνθεί το περιβάλλον και να υπολογισθεί κατά προσέγγιση. (Δίνεται ότι: $\Phi(2.235) = 0.987$, $\Phi(1.790) = 0.963$.)

Θέμα 4ο. (2.5 μον.) Δίνονται ανεξάρτητες τ.μ. X_1, X_2, \dots, X_n με πυκνότητες, αντίστοιχα, $N(0, \frac{\sigma^2}{i^2})$, $i = 1, 2, \dots, n$. (α) Ναδειχθεί ότι η τ.μ. $S_n = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n i^2 X_i^2$ ακολουθεί την κατανομή χ_n^2 . (β) Να βρεθεί η ασυμπτωτική κατανομή (για $n \rightarrow \infty$) της τ.μ. $\frac{S_n - n}{\sqrt{2n}}$. (Δικαιολογήστε την απάντησή σας). (γ) Να βρεθεί η κατανομή της τ.μ. $\frac{X_1^2}{4X_2^2}$. (Δικαιολογήστε την απάντησή σας.)

Θέμα 5ο. (1 μον.) Έστω X_1, X_2, \dots, X_n ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με ομοιόμορφη κατανομή $U(-\theta, \theta)$, $\theta > 0$. Αν $Y = \max\{|X_1|, |X_2|, \dots, |X_n|\}$ να υπολογισθεί η $E(Y)$.