Λύσεις Θεμάτων στην Εισαγωγή στην Αλγεβρα και Θεωρία Συνόλων

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

1 Φεβρουαρίου 2010

Θέμα 1: α) Εστω ότι A, B, C είναι υποσύνολα ενός συνόλου X και ότι $B \cap C = \emptyset$. Δείξτε ότι

$$(A \cup C) - B = (A - B) \cup C$$

β) Δίνεται η συνάρτηση $f\colon X \to Y$, η οποία είναι ένα-προς-ένα. Αυτή επάγει μια συνάρτηση μεταξύ των δυναμοσυνόλων $f[-]\colon P(X) \to P(Y)$, όπου για $A \subseteq X$ είναι $f[A] = \{f(x) \mid x \in A\}$. Δείξτε ότι κι αυτή είναι ένα-προς-ένα. (2 μονάδες)

Απάντηση: α) Εχουμε

$$(A \cup C) - B = (A \cup C) \cap B^c = (A \cap B^c) \cup (C \cap B^c) \quad (1)$$

Ομως $B \cap C = \emptyset$, άρα $C \subseteq B^c$ (γιατί, για κάθε $x \in C$, $x \notin B$ - αλλιώς $B \cap C \neq \emptyset$- επομένως $x \in B^c$). Αρα η έκφραση (1) γίνεται

$$(A \cup C) - B = (A \cap B^c) \cup C = (A - B) \cup C$$

β) Εστω ότι $f[A] = f[B]$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $A = B$. Εστω ότι $x \in A$. Τότε

$$f(x) \in \{f(x) \mid x \in A\} = \{f(x) \mid x \in B\}$$

άρα $f(x) = f(x')$, με $x' \in B$. Ομως η f είναι ένα-προς-ένα, άρα $x = x'$, με $x' \in B$. Αρα $x \in B$. Οπότε έχουμε ότι $A \subseteq B$. Το ότι $B \subseteq A$ προκύπτει με τον ίδιο ακριβώς τρόπο.

Θέμα 2: Εστω ότι R και S είναι σχέσεις επί του συνόλου X. Δείξτε ότι, αν οι R και S είναι ανακλαστικές και συμμετρικές σχέσεις, τότε και η $R \cup S$ είναι ανακλαστική και συμμετρική σχέση. Αν οι R και S είναι μεταβατικές σχέσεις ισχύει το ίδιο για την $R \cup S$; Αποδείξτε τον ισχυρισμό σας ή δώστε αντιπαράδειγμα. (2 μονάδες)

Απάντηση: Επειδή οι R και S είναι ανακλαστικές, έχουμε ότι, για όλα τα $x \in X$, $(x,x) \in R$ και $(x,x) \in S$, επομένως $(x,x) \in R \cup S$, δηλαδή και η $R \cup S$ είναι ανακλαστική. Αν τώρα έχουμε $(x,y) \in R \cup S$, τότε $(x,y) \in R$ ή $(x,y) \in S$. Ομως, τόσο η R όσο και η S είναι συμμετρικές σχέσεις, οπότε, στην πρώτη περίπτωση θα έχουμε $(y,x) \in R$, ενώ στη δεύτερη περίπτωση θα έχουμε $(y,x) \in S$. Σε κάθε περίπτωση, $(y,x) \in R \cup S$. Αρα η $R \cup S$ είναι συμμετρική.

Αν τώρα οι R και S είναι μεταβατικές, δεν προκύπτει ότι η $R \cup S$ είναι μεταβατική. Η δυσκολία έγκειται στο εξής: Αν $(x,y) \in R \cup S$ και $(y,z) \in R \cup S$, τότε μπορεί $(x,y) \in R$ και $(y,z) \in S$, απ΄ όπου δε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $(x,z) \in R \cup S$. Ας δούμε ένα συγκεκριμένο αντιπαράδειγμα: Αν $X = \{1,2,3\}$ και $R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,1),(3,3)\}$, $S = \{(1,1),(2,2)(2,3),(3,3),(3,2)\}$ (παρατηρείστε ότι και οι δύο σχέσεις είναι ανακλαστικές και συμμετρικές), τότε $(1,2) \in R \cup S$, $(2,3) \in R \cup S$ αλλά το $(1,3)$ δεν ανήκει στην $R \cup S$.

Θέμα 3: α) Αποδείξτε με επαγωγή ότι, για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$,

$$\prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k^2}) = \frac{n+1}{2n}$$

β) Πόσες συναρτήσεις υπάρχουν από το $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m$ προς το $\mathbb{Z}_{m^2}$; Υπάρχουν κάποιες ανάμεσά τους που να είναι ένα-προς-ένα και πόσες; (2 μονάδες)

Απάντηση: α) Για $n = 2$ το αριστερά γινόμενο έχει ένα μόνο παράγοντα, τον $1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2.2}$. Αρα για $n = 2$ ο ισχυρισμός αληθεύει.

Δεχόμαστε ότι ο ισχυρισμός αληθεύει για το n και δείχνουμε ότι αληθεύει για το $n + 1$. Το γινόμενο στα αριστερά γίνεται

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n+1}(1-\frac{1}{k^2}) &= \prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k^2})(1-\frac{1}{(n+1)^2}) \\
\text{(επαγ. υπόθεση)} &= \frac{n+1}{2n}(1-\frac{1}{(n+1)^2}) \\
&= \frac{n+1}{2n}\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2} \\
&= \frac{1}{2n}\frac{(n^2+2n)}{n+1} \\
&= \frac{(n+1)+1}{2(n+1)}
\end{aligned}$$

β) Το $\mathbb{Z}_m$ έχει m στοιχεία άρα το $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m$ έχει m^2, όσα και το $\mathbb{Z}_{m^2}$. Αρα μεταξύ των δύο συνόλων υπάρχουν

$$(m^2)^{m^2} = m^{2m^2}$$

συναρτήσεις. Αφού τα δύο σύνολα έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων θα υπάρχουν ένα-προς-ένα συναρτήσεις ανάμεσά τους (π.χ γράφοντας τα ζευγάρια $(\bar{x}, \bar{y})$ σε ένα ορθογώνιο πλαίσιο $m \times m$ και απαριθμώντας κατά μήκος των μικρών διαγωνίων από πάνω προς τα κάτω βρίσκουμε μια ένα-προς-ένα συνάρτηση από το $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m$ προς το $\mathbb{Z}_{m^2}$). Κάθε ένα-προς-ένα συνάρτηση ανάμεσα σ' αυτά τα δύο σύνολα θα είναι και επί. Αρα έχουμε τόσες τέτοιες συναρτήσεις όσες και οι μεταθέσεις ενός συνόλου με m^2 στοιχεία, δηλαδή $(m^2)!$.

Θέμα 4: Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}-\{3\} \to \mathbb{R}-\{3\}$, με $f(x) = \frac{3x+1}{x-3}$. Ποιά είναι η συνάρτηση $f \circ f$; **Αφού απαντήστε σωστά σ' αυτό το ερώτημα** εξετάστε αν η f είναι ένα-προς-ένα και επί. (2 μονάδες)

Απάντηση: Εχουμε, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{3\}$:

$$\begin{aligned}
f(f(x)) &= \frac{3.\frac{3x+1}{x-3}+1}{\frac{3x+1}{x-3}-3} \\
&= \frac{3.(3x+1)+x-3}{3x+1-3x+9} \\
&= \frac{10x}{10} \\
&= x,
\end{aligned}$$

άρα $f \circ f = id$.

Αυτό μας λέει ότι η f είναι αντιστρέψιμη (έχει τον εαυτό της ως αντίστροφη). Επομένως, ως αντιστρέψιμη, είναι ένα-προς-ένα και επί.

Θέμα 5: Θεωρούμε την ομάδα $(\mathbb{Z}, +, 0)$ των ακεραίων αριθμών με διμελή πράξη αυτήν της πρόσθεσης. Δίνονται δυο φυσικοί αριθμοί m και n. Αποδείξτε ότι το υποσύνολο των ακεραίων

$$A = \{mx + ny \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$$

είναι υπο-ομάδα της. Θυμίζουμε ότι όλες οι υπο-ομάδες των ακεραίων αριθμών (με την πράξη της πρόσθεσης) είναι της μορφής $\{d.x \mid x \in \mathbb{Z}\}$, για κάποιον φυσικό αριθμό d. Ποιός είναι ο φυσικός αυτός αριθμός d, σε σχέση με τους δοσμένους m και n; Αποδείξτε τον ισχυρισμό σας. (2 μονάδες)

Απάντηση: Το υποσύνολο A της ομάδας είναι κλειστό ως προς την πράξη της πρόσθεσης, αφού

$$(mx + ny) + (mx' + ny') = m(x + x') + n(x + x') \in A$$

Περιέχει το $0 = m.0 + n.0$ και τον αντίθετο κάθε στοιχείου του, αφού $-(mx+ny) = m(-x) + n(-y) \in A$. Αρα είναι υπο-ομάδα του $\mathbb{Z}$.

Αν ο d είναι οποιοσδήποτε κοινός διαιρέτης των m και n, τότε κάθε στοιχείο της μορφής $mx + ny$ είναι

$$mx + ny = dkx + dly = d(kx + ly),$$

άρα το A είναι υποσύνολο του $\{d.x \mid x \in \mathbb{Z}\}$, για οποιονδήποτε d που είναι κοινός διαιρέτης των m και n. Αν ο d είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των m και n, τότε ξέρουμε ότι μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$d = mx + ny, \quad \text{για κάποια } x, y \in \mathbb{Z}$$

Αρα $d \in A$ κι αφού το A είναι υπο-ομάδα, τότε $d.x \in A$, για κάθε $x \in \mathbb{Z}$. Επομένως $A = \{d.x \mid x \in \mathbb{Z}\}$, όταν ο d είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των m και n.