Λύσεις Θεμάτων στην Εισαγωγή στην Αλγεβρα και Θεωρία Συνόλων

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

11 Φεβρουαρίου 2011

Θέμα 1: α) Εστω ότι A, B είναι τυχαία υποσύνολα του X Αποδείξτε ότι αν $B \subseteq A^c$, τότε $A \cap B = \emptyset$ και ότι αν $A^c \subseteq B$, τότε $A \cup B = X$

β) Προσδιορίστε το δυναμοσύνολο του συνόλου $\{\ \emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\ \}$. Πόσα στοιχεία αναμένουμε ότι θα έχει;

Λύση: α) Εστω ότι $x \in A \cap B$, δηλαδή ότι υπάρχει κάποιο x που είναι ταυτόχρονα στοιχείο των A και B. Τότε αυτό αντιβαίνει την παραδοχή ότι $B \subseteq A^c$, που λέει ότι κάθε στοιχείο του B δεν είναι στοιχείο του A - άτοπο.

Επειδή ισχύει ότι $A \cup B \subseteq X$, ας θεωρήσουμε ένα $x \in X$. Υπάρχουν δυο ενδεχόμενα: Το ένα είναι να έχουμε $x \in A$. Τότε ισχύει και ότι $x \in A \cup B$. Το άλλο ενδεχόμενο είναι $x \in A^c$. Τότε, επειδή έχουμε $A^c \subseteq B$, ισχύει και $x \in B$. Οπότε, πάλι προκύπτει ότι $x \in A \cup B$.

β) Το $X = \{\ \emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\ \}$ έχει τρία στοιχεία, άρα το δυναμοσύνολό του έχει $2^3 = 8$ στοιχεία. Αυτά είναι τα

$$\emptyset,\ X,\ \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\},\ \{\{\{\emptyset\}\}\},\ \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\},\ \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$$

Θέμα 2: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \frac{1-2x}{x(1-x)}$$

Αποδείξτε ότι είναι επί.

Μπορείτε να το χρησιμοποιήσετε αυτό για να δείξετε ότι το ανοικτό διάστημα $(0,1)$ και το $\mathbb{R}$ είναι ισοπληθικά σύνολα;

Λύση: Για να είναι επί η συνάρτηση αυτή πρέπει, για κάθε $y \in \mathbb{R}$, να υπάρχει $x \in (0,1)$, ώστε $y = \frac{1-2x}{x(1-x)}$. Ισοδύναμα, πρέπει $1 - 2x = yx - yx^2$, ή $yx^2 - (y+2)x + 1 = 0$. Η εξίσωση αυτή έχει πάντα λύση ως προς x, γιατί η διακρίνουσα $(y+2)^2 - 4y = y^2 + 4$ είναι θετική. Αν $y = 0$, τότε αρκεί να είναι $x = 1/2$.

Οταν $y \neq 0$ η ρίζα

$$x = \frac{(y+2) - \sqrt{y^2+4}}{2y}$$

είναι ανάμεσα στο 0 και το 1 γιατί:

Αν $y > 0$, τότε για να είναι η ρίζα θετική, αρκεί να είναι ο αριθμητής θετικός, δηλαδή $y + 2 > \sqrt{y^2 + 4}$, κάτι που ισχύει, όπως διαπιστώνουμε αν υψώσουμε στο τετράγωνο (πράγμα που δικαιούμαστε να κάνουμε, αφού κι οι δυο ποσότητες είναι θετικές). Επίσης,

$$\frac{(y + 2) - \sqrt{y^2 + 4}}{2y} < 1,$$

πράγμα που είναι ισοδύναμο με το ότι $y + 2 - \sqrt{y^2 + 4} < 2y$ (αφού $2y > 0$) και το τελευταίο είναι ισοδύναμο με $\sqrt{y^2 + 4} + y - 2 > 0$, που ισχύει όταν $y > 0$.

Αν $y < 0$, τότε, για να εχουμε $x > 0$, αρκεί να είναι ο αριθμητής αρνητικός, δηλαδή $y + 2 < \sqrt{y^2 + 4}$, κάτι που ισχύει όταν $y < 0$, γιατί $y + 2 < 2 < \sqrt{y^2 + 4}$. Επίσης, το να είναι η ρίζα μικρότερη του 1 είναι ισοδύναμο με $y + 2 - \sqrt{y^2 + 4} > 2y$ (επειδή $y < 0$ ανισότητα αλλάζει φορά) κι αυτό με τη σειρά του με $2 - y > \sqrt{y^2 + 4}$. Το τελευταίο το διαπιστώνουμε υψώνοντας στο τετράγωνο (όπως μπορούμε, αφού $2 - y > 0$), οπότε παίρνουμε $-4y > 0$, που ισχύει.

Για να το χρησιμοποιήσουμε αυτό στο να δείξουμε ότι τα $(0, 1)$ και $\mathbb{R}$ είναι ισοπληθικά, αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι ένα - προς - ένα.

Αυτό μπορούμε να το δείξουμε απ΄ ευθείας με τον ορισμό:

$$\begin{aligned}
\frac{1 - 2x_1}{x_1(1 - x_1)} = \frac{1 - 2x_2}{x_2(1 - x_2)} \quad &\Rightarrow \quad (x_2 - x_2^2)(1 - 2x_1) = (x_1 - x_1^2)(1 - 2x_2) \\
&\Rightarrow \quad x_2 - 2x_1x_2 - x_2^2 + 2x_1x_2^2 = x_1 - x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1^2x_2 \\
&\Rightarrow \quad x_1^2 - x_2^2 - x_1 + x_2 - 2x_1x_2(x_1 - x_2) = 0 \\
&\Rightarrow \quad (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 1 - 2x_1x_2) = 0 \\
&\Rightarrow \quad x_1 = x_2
\end{aligned}$$

(Αναφορικά με την τελευταία συνεπαγωγή παρατηρήστε ότι το $x_1 = \frac{1-x_2}{1-2x_2}$ είναι είτε < 0, όταν $x_2 > 1/2$ ή > 1, όταν $x_2 > 1/2$, ή ότι δε βρίσκεται τέτοιο x_1 όταν $x_2 = 1/2$, οπότε η δεξιά παρένθεση δε μηδενίζεται ποτέ.)

Επίσης μπορεί να γίνει εξετάζοντας την παράγωγο

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1 - 2x}{x(1 - x)}\right)' &= \frac{-2(x - x^2) - (1 - 2x)(-2x)}{(x - x^2)^2} \\
&= \frac{-2x + 2x^2 + 2x - 4x^2}{(x - x^2)^2} \\
&= \frac{-2x^2}{(x - x^2)^2},
\end{aligned}$$

η οποία είναι αρνητική, οπότε η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα, άρα ένα - προς - ένα.

Τέλος μπορούμε ν΄ αποφύγουμε ενετελώς να ελέγξουμε αν είναι ένα - προς - ένα, καταφεύγοντας στο εξής: Επειδή η f είναι επί, τότε **επιλέγοντας**, για κάθε $y \in \mathbb{R}$, ένα $x \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$, ορίζουμε μια $g\colon \mathbb{R} \to (0, 1)$ με $g(y) = x$. Για την g αυτή έχουμε $f \circ g = id_{\mathbb{R}}$, οπότε η g είναι ένα - προς - ένα. Επειδή υπάρχει προφανής ένα - προς - ένα συνάρτηση $i\colon (0, 1) \to \mathbb{R}$, το Θεώρημα Schröder - Bernstein εξασφαλίζει ότι υπάρχει ένα - προς - ένα και επί συνάρτηση ανάμεσα στα δυο.

Θέμα 3: α) Δείξτε ότι για οποιουσδήποτε ακέραιους αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{Z} - \{0\}$, υπάρχουν ακέραιοι κ, λ έτσι ώστε, για το μέγιστο κοινό διαιρέτη μ των α, β να είναι

$$\mu = \kappa \cdot \alpha + \lambda \cdot \beta$$

β) Δείξτε, με όποιον τρόπο θέλετε, ότι για όλους τους φυσικούς αριθμούς n, ισχύει ότι $3^{2n+4} \equiv 2^{2n}(mod 5)$.

Λύση: α) Είναι η απόδειξη του κλασικού Θεωρήματος 3.4 στη σελίδα 63 του βιβλίου της Κ. Κάλφα.

β) Ενας τρόπος: $3 \equiv -2(mod5)$, άρα $3^{2n} \equiv (-2)^{2n}(mod5)$, δηλαδή $3^{2n} \equiv 2^{2n}(mod5)$, κι επειδή $3^4 = 81 \equiv 1(mod5)$, πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη, προκύπτει το ζητούμενο.

Αλλος τρόπος (με επαγωγή): Για $n = 0$, $3^4 = 81 \equiv 2^0 = 1(mod5)$. Αν τώρα ισχύει $3^{2n+4} \equiv 2^{2n}(mod5)$, επειδή $3^2 \equiv 2^2(mod5)$, πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη, προκύπτει ότι $3^{2n+4+2} = 3^{2(n+1)+4} \equiv 2^{2n+2} = 2^{2(n+1)}(mod5)$.

Θέμα 4: Δίνονται δυο συναρτήσεις $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, για τις οποίες γνωρίζουμε ότι είναι αντιστρέψιμες. Εξηγήστε γιατί και η σύνθεσή τους $g \circ f\colon X \to Z$ είναι αντιστρέψιμη και δείξτε ότι

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1},$$

όπου f^{-1} συμβολίζει την αντίστροφη συνάρτηση της f.

Λύση: Χρησιμοποιούμε το ότι μια συνάρτηση έχει αντίστροφη αν και μόνο αν είναι ένα - προς - ένα και επί και το ότι η αντίστροφη μίας συνάρτησης προσδιορίζεται μοναδικά. Η σύνθεση ένα - προς - ένα συναρτήσεων είναι κι αυτή ένα - προς - ένα:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) &\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \\ &\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \\ &\Rightarrow x_1 = x_2\end{aligned}$$

Επίσης η σύνθεση επί συναρτήσεων είναι κι αυτή επί: Για κάθε $z \in Z$ υπάρχει $y \in Y$ ώστε $z = g(y)$ και, για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$ ώστε $y = f(x)$. Αρα για κάθε $z \in Z$ υπάρχει $x \in X$ ώστε $z = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$.

Συνθέτοντας τώρα τη $g \circ f$ με τη $f^{-1} \circ g^{-1}$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ (f \circ (f^{-1} \circ g^{-1})) \\ &= g \circ ((f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}) \\ &= g \circ (id_Y \circ g^{-1}) \\ &= g \circ g^{-1} = id_Z\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}(f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f) &= f^{-1}\circ(g^{-1}\circ(g\circ f))\\ &= f^{-1}\circ((g^{-1}\circ g)\circ f)\\ &= f^{-1}\circ(id_Y\circ f)\\ &= f^{-1}\circ f = id_X\end{aligned}$$

Αρα η $f^{-1}\circ g^{-1}$ πληρεί τις δυο ισότητες που προσδιορίζουν μοναδικά την αντίστροφη της $g\circ f$, δηλαδή ισούται με την αντίστροφη της $g\circ f$.

Θέμα 5: Δίνεται το παρακάτω υποσύνολο των πραγματικών αριθμών:

$$\mathbb{Z}(\sqrt{3}) = \{x + y\sqrt{3} \in \mathbb{R} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$$

Δείξτε ότι αποτελεί ακέραια περιοχή με τις συνηθισμένες πράξεις $+$ και $\cdot$ των πραγματικών αριθμών.

Λύση: Το άθροισμα και το γινόμενο στοιχείων του $\mathbb{Z}(\sqrt{3})$ είναι πάλι στοιχείο του $\mathbb{Z}(\sqrt{3})$: $(x+y\sqrt{3})+(x'+y'\sqrt{3}) = (x+x')+(y+y')\sqrt{3}$ και $(x+y\sqrt{3})\cdot(x'+y'\sqrt{3}) = (xx'+3yy')+(xy'+x'y)\sqrt{3}$ Επίσης τα ουδέτερα στοιχεία $0 = 0+0\sqrt{3}$ της πρόσθεσης, το $1 = 1+0\sqrt{3}$ του πολλαπλασιασμού και το αντίθετο ενός στοιχείου του $\mathbb{Z}(\sqrt{3})$ βρίσκονται στο $\mathbb{Z}(\sqrt{3})$. Ετσι το $\mathbb{Z}(\sqrt{3})$ αποκτά δομή αντιμεταθετικού δακτυλίου γιατί κληρονομεί τις ιδιότητες των πράξεων από το $\mathbb{R}$.

Ακέραια περιοχή σημαίνει πως αν το γινόμενο δυο στοιχείων είναι ίσο με το 0, τότε κάποιο από αυτά είναι 0. Εστω λοιπόν ότι

$$(x+y\sqrt{3})\cdot(z+w\sqrt{3}) = (xz+3yw)+(xw+yz)\sqrt{3} = 0 \qquad (1)$$

και ότι ένας από τους δυο παράγοντες, ας πούμε ο $x+y\sqrt{3}$, είναι διάφορος του μηδενός, δηλαδή $x\neq 0$ ή $y\neq 0$. Η (1) δίνει $xz+3yw=0$ και $xw+yz=0$ (διαφορετικά έχουμε ότι ένας άρρητος, ο $\sqrt{3}$, ισούται με έναν ρητό). Εχουμε, αν $x\neq 0$, $w=-\frac{yz}{x}$, οπότε

$$xz+3y\frac{-yz}{x} = \frac{x^2z-3y^2z}{x} = \frac{z\cdot(x^2-3y^2)}{x} = 0.$$

Προκύπτει ότι $z=0$, αφού δε μπορεί να είναι $x^2-3y^2=0$, γιατί τότε ο $\sqrt{3}$ θα ήταν ρητός). Τότε λοιπόν έχουμε κι ότι $xw=0$, κι αφού $x\neq 0$, προκύπτει ότι $w=0$. Ομοίως όταν $y\neq 0$.