Ενδεικτικές Λύσεις Θεμάτων στην Εισαγωγή στην Αλγεβρα και Θεωρία Συνόλων

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

17 Σεπτεμβρίου 2009

Θέμα 1: α) Εστω ότι A, B και C είναι τρία υποσύνολα ενός συνόλου X. Δείξτε ότι, $(A-B)\cap C=\emptyset$ αν και μόνο αν $A\cap C\subseteq B$.

β) Εστω ότι $f:X\to Y$ είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση και A είναι τυχαίο υποσύνολο του X. Δείξτε ότι $A\subseteq f^{-1}[f[A]]$, όπου $f^{-1}[B]=\{x\in X \mid f(x)\in B\}$, όταν $B\subseteq Y$ και $f[A]=\{f(x)\in Y\mid x\in A\}$, όταν $A\subseteq X$. (2 μονάδες)

Απάντηση: α) ''$\Rightarrow$'' $(A-B)\cap C=\emptyset$ σημαίνει $(A-B)\cap C=(A\cap B^c)\cap C=(A\cap C)\cap B^c=\emptyset$ Επομένως, αν για το στοιχείο $x\in X$ έχουμε $x\in A\cap C$, τότε το x δε μπορεί να ανήκει στο B^c (διαφορετικά $(A\cap C)\cap B^c\neq\emptyset$). Αρα $x\in B$.

''$\Leftarrow$'' Αν $A\cap C\subseteq B$ και $(A-B)\cap C\neq\emptyset$, τότε υπάρχει $x\in(A-B)\cap C=(A\cap C)\cap B^c$, δηλαδή υπάρχει $x\in A\cap C$ το οποίο δεν ανήκει στο B -άτοπο.

β) Εστω ότι $x\in A$. Τότε $f(x)\in\{f(x)\in Y\mid x\in A\}=f[A]$. Αρα $x\in\{x\in X\mid f(x)\in f[A]\}=f^{-1}[f[A]]$.

Θέμα 2: Δίνεται ένα οποιοδήποτε σύνολο X και δύο σχέσεις ισοδυναμίας R, και S επ' αυτού. Δείξτε ότι η τομή τους $R\cap S$ είναι επίσης σχέση ισοδυναμίας και ότι για τις κλάσεις ισοδυναμίας αναφορικά με αυτές τις σχέσεις ισχύει $[x]_{R\cap S}=[x]_R\cap[x]_S$. (2 μονάδες)

Απάντηση: • Για κάθε $x\in X$ έχουμε $(x,x)\in R$ (επειδή η R είναι ανακλαστική) και $(x,x)\in S$ (επειδή η S είναι ανακλαστική). Αρα $(x,x)\in R\cap S$, δηλαδή η $R\cap S$ είναι ανακλαστική.

• Αν $(x,y)\in R\cap S$, τότε $(x,y)\in R$ και $(x,y)\in S$. Επομένως $(y,x)\in R$ (επειδή η R είναι συμμετρική) και $(y,x)\in S$ (επειδή η S είναι συμμετρική). Αρα $(y,x)\in R\cap S$, δηλαδή η $R\cap S$ είναι συμμετρική.

• Αν $(x,y)\in R\cap S$ και $(y,z)\in R\cap S$, τότε $(x,y)\in R$ και $(x,y)\in S$, καθώς και $(y,z)\in R$ και $(y,z)\in S$. Επομένως $(x,z)\in R$ (επειδή η R είναι μεταβατική) και $(x,z)\in S$ (επειδή η S είναι μεταβατική). Αρα $(x,z)\in R\cap S$, δηλαδή η $R\cap S$ είναι μεταβατική.

Ανφορικά με την κλάση ισοδυναμίας του στοιχείου $x\in X$ ως προς τη σχέση ισοδυναμίας $R\cap S$ έχουμε

$$\begin{aligned}
[x]_{R\cap S} &= \{y\in X\mid (x,y)\in R\cap S\}\\
&= \{y\in X\mid (x,y)\in R \text{ και } (x,y)\in S\}\\
&= \{y\in X\mid (x,y)\in R\}\cap\{y\in X\mid (x,y)\in S\}\\
&= [x]_R\cap[x]_S
\end{aligned}$$

Θέμα 3: α) Εστω ότι X είναι ένα τυχαίο σύνολο, $P(X)$ το δυναμοσύνολό του (= το σύνολο όλων των υποσυνόλων του και $\{0,1\}^X$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το σύνολο X στο σύνολο $\{0,1\}$. Ορίζουμε μια συνάρτηση $\Phi\colon \{0,1\}^X \to P(X)$ με τύπο

$$\Phi(f) = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$$

Δείξτε ότι η συνάρτηση Φ είναι ένα-προς-ένα (=''αμφιμονότιμη'', σύμφωνα με το βιβλίο της Κ. Κάλφα) και επί.

β) Αν $\mathbb{N}$ είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών, αληθεύει ότι το σύνολο $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ είναι αριθμήσιμο; Αιτιολογείστε την απάντησή σας. (2 μονάδες)

Απάντηση: α) Εστω ότι $\Phi(f) = \Phi(g)$. Θα δείξουμε ότι $f = g$. Εχουμε $\{x \in X \mid f(x) = 1\} = \{x \in X \mid g(x) = 1\}$. Αρα τα $x \in X$ στα οποία η f παίρνει τιμή 1 είναι τα ίδια με εκείνα στα οποία η g παίρνει τιμή 1. Στα υπόλοιπα οι δύο συναρτήσεις παίρνουν τη μόνη άλλη δυνατή τιμή, δηλαδή 0. Αρα οι συναρτήσεις $f, g\colon X \to \{0,1\}$ παίρνουν ακριβώς τις ίδιες τιμές άρα είναι ίσες.

Η συνάρτηση Φ είναι επί γιατί, δοθέντος $A \in P(X)$ (δηλαδή $A \subseteq X$), η συνάρτηση $\chi_A\colon X \to \{0,1\}$ που ορίζεται ως

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \tag{1}$$

δίνει

$$\begin{aligned} \Phi(\chi_A) &= \{x \in X \mid \chi_A(x) = 1\} \\ &= \{x \in X \mid x \in A\} \\ &= A \end{aligned}$$

β) Από το (α) έχουμε ότι ο πληθάριθμος του $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ είναι ίσος με αυτόν του $P(\mathbb{N})$. Από το Θεώρημα του Cantor γνωρίζουμε ότι ο πληθάριθμος του $P(\mathbb{N})$ είναι αυστηρά μεγαλύτερος του πληθαρίθμου του $\mathbb{N}$. Αρα το $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ δεν είναι αριθμήσιμο.

Θέμα 4: Δείξτε (με επαγωγή κατά προτίμηση) ότι, για κάθε φυσικό αριθμό n, ο αριθμός 7 διαιρεί τον αριθμό $1 + 2^{2^n} + 2^{2^{n+1}}$. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τον τύπο $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$) (2 μονάδες)

Απάντηση: Για $n = 0$ ο αριθμός γίνεται $1 + 2^1 + 2^2 = 7$, άρα ο 7 τον διαιρεί. Ας δεχτούμε ότι ο ισχυρισμός μας αληθεύει για το n και ας τον δείξουμε για το $n+1$. Ο υπό εξέταση αριθμός γίνεται

$$\begin{aligned} 1 + 2^{2^{n+1}} + 2^{2^{n+2}} &= 1 + 2^{2^n.2} + 2^{2^{n+1}.2} \\ &= 1 + (2^{2^n})^2 + (2^{2^{n+1}})^2 \\ \text{(από τον τύπο της υπόδειξης)} &= (1 + 2^{2^n} + 2^{2^{n+1}})^2 - 2.2^{2^n} - 2.2^{2^{n+1}} - 2.2^{2^n}.2^{2^{n+1}} \\ &= (1 + 2^{2^n} + 2^{2^{n+1}})^2 - 2.2^{2^n}(1 + 2^{2^n} + 2^{2^{n+1}}) \end{aligned}$$

Από την υπόθεση της επαγωγής και οι δύο προσθεταίοι της τελευταίας έκφρασης διαιρούνται δια 7, άρα το ίδιο και ο αριθμός που προκύπτει για $n+1$.

Θέμα 5: Δίνεται μια ομάδα G και δύο υποομάδες της H_1 και H_2. Δείξτε ότι η τομή τους $H_1 \cap H_2$ είναι επίσης υποομάδα της G και δώστε ένα αντιπαράδειγμα που να δείχνει ότι η ένωσή τους δεν είναι απαραίτητα υποομάδα (π.χ εξετάστε δύο υποομάδες της ομάδας των ακεραίων αριθμών με πράξη την πρόσθεση). (2 μονάδες)

Απάντηση: Το ουδέτερο στοιχείο $e \in G$ ανήκει και στις δύο υποομάδες, άρα και στην τομή τους. Αν $x, y \in H_1 \cap H_2$, τότε $x, y \in H_1$ και $x, y \in H_2$, άρα $x.y \in H_1$ και $x.y \in H_2$. Επομένως $x.y \in H_1 \cap H_2$, δηλαδή η τομή υποομάδων είναι κλειστή ως προς την πράξη. Τέλος, αν $x \in H_1 \cap H_2$, τότε $x \in H_1$ και $x \in H_2$, άρα $x^{-1} \in H_1$ και $x^{-1} \in H_2$, οπότε και $x^{-1} \in H_1 \cap H_2$, δηλαδή η τομή είναι κλειστή ως προς αντίστροφα στοιχεία. Αρα, τελικά, η τομή υποομάδων είναι υποομάδα.

Θεωρούμε τις υποομάδες $2\mathbb{Z} = \{..., -4, -2, 0, 2, 4, ...\}$ και $3\mathbb{Z} = \{..., -6, -3, 0, 3, 6, ...\}$ των ακεραίων. Η ένωσή τους είναι

$$2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z} = \{..., -9, -8, -6, -4, -3, -2, 0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, ...\}$$

Το στοιχείο $3 + 4 = 7$ δεν ανήκει στην ένωση, δηλαδή η ένωση δεν είναι κλειστή ως προς τη διμελή πράξη της ομάδας.