ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΑΚΡΙΒΕΙΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΟΜΟΛΟΓΙΑΚΟΙ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΤΕΣ

Διπλωματική Εργασία: **Αικατερίνης Γ. Παπασταύρου**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ
Κατεύθυνση Θεωρητικών Μαθηματικών

Επιβλέπων: Παν. Καραζέρης
Επίκουρος Καθηγητής

Στους σεβαστούς και αγαπητούς μου γονείς,
αιδεσιμολ. π. Γεώργιο και
αείμνηστη πρεσβυτέρα Μαρία,
που μου πρόσφεραν το «ζῆν» και το «εὖ ζῆν».
Με βαθειά ευγνωμοσύνη.

Πρόλογος

Με την ολοκλήρωση αυτής της εργασίας, αισθάνομαι βαθειά την ανάγκη της ευχαριστίας προς το Θεό, διότι με ενδυνάμωσε και ενίσχυσε την τελευταία τριετία, στην ολοκλήρωσή της.

Οι δυσκολίες που αντιμετώπισα, είναι αλήθεια ότι αρκετές φορές με οδήγησαν σε διάφορες επώδυνες σκέψεις, αλλά μου άνοιξαν και καινούριους δρόμους. Τελικά, διαπίστωσα γι΄ άλλη μια φορά, ότι αν κάποιος έχει αγωνιστική διάθεση, από όποιες δυσκολίες κι αν περάσει, πάντοτε οδηγείται σ'ενα θετικό αποτέλεσμα.

Πιστεύω ότι μέσα απ΄ αυτή την προσπάθεια και ανανεώθηκα και αναπτερώθηκα και κυρίως, αισθάνθηκα ότι συνέβαλα κι εγώ στη βαθύτερη κατανόηση και ανάλυση κάποιων εννοιών της Μαθηματικής Επιστήμης. Δεν διεκδικώ, βεβαίως, ούτε την ιδιαίτερη δόξα, ούτε τη μεγάλη καταξίωση. Αυτά, γνωρίζω καλά, ότι ανήκουν σε άλλους. Προσωπικά, μου αρκεί η πληροφορία της συνείδησής μου ότι έκανα αυτό που μπορούσα, με συνέπεια. Δεν είμαι φυσικά, διατεθειμένη να γίνω κριτής της προσωπικής μου προσπάθειας. Αλλά η αίσθησή μου, όπως απορρέει και από τη γνώμη των ειδημόνων καθηγητών μου, είναι ότι κάτι καλό βγήκε απ΄ αυτό το μικρό αγώνα.

Όμως, μέσα απ΄την καρδιά μου, οφείλω να εκφράσω τις ιδιαίτερες ευχαριστίες μου πρωτίστως στην οικογένειά μου, που με γαλούχησε και μου μετέδωσε τις όντως πνευματικές αξίες που με στηρίζουν στο διάβα της ζωής και συγχρόνως μου έδωσε την ευκαιρία να σπουδάσω την Επιστήμη που από μικρό παιδί αγάπησα.

Κατόπιν και κατά σειρά, οφείλω να ευχαριστήσω:

- Τους Υπευθύνους του Υπουργείου Παιδείας, για τη χορηγηθείσα άδεια.

- Τη Διοίκηση και την Εποπτεία των σχολείων της Φιλεκπαιδευτικής Εταιρείας, που την απεδέχθη.

- Τον επιβλέποντα Καθηγητή μου κ. Παν. Καραζέρη, ο οποίος απ΄ την αρχή ως το τέλος με βοήθησε αμέριστα, με παρακολούθησε ανελλιπώς και με έντονο ενδιαφέρον στην όλη μου προσπάθεια, στην επίλυση των επιμέρους προβλημάτων μου, απποριών και δυσκολιών μου, ώστε να νοιώθω έντονο το χρέος της ευγνωμοσύνης για την όλη του συμβολή.

- Τον ομότιμο Καθηγητή μου κ. Ιω. Σταμπάκη, για όλη την ηθική και ουσιαστική συμπαράστασή του, στη φοιτητική, επαγγελματική και μεταπτυχιακή μου πορεία. Με δίδαξε με τις γνώσεις και το ήθος του.

- Την τακτική Καθηγήτριά μου κ. Αγγ. Κοντολάτου για την ομόθυμη στήριξή της.

- Ευχαριστώ ακόμη, ολόθερμα, τους εκλεκτούς συναδέλφους κ. Απ. Ματζάρη και κ. Γρ. Προτσώνη για την αμέριστη βοήθεια που μου πρόσφεραν, όποτε κι αν την χρειάστηκα.

- Ιδιαίτερες ευχαριστίες προς τον εντιμότατο κ. Θεόδ. Χαλκιόπουλο, πρώην γραμματέα του Τμ. Μαθηματικών, για την πολύτιμη βοήθειά του στην επίλυση πολύ σημαντικών διαδικαστικών ζητημάτων.

- Επίσης, ευχαριστώ και τους εξαίρετους οικογενειακούς φίλους αρχιμ. π.Ησύχιο Πέππα, κ. Δημ. Φαρμακίδη - δικηγόρο και κ. Αθαν. Κάμτσιο - χημικό, για την ολόθερμη συναντίληψή τους.

Φεβρουάριος 2010
Α. Γ. Π.

Περιεχόμενα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην εργασία που ακολουθεί, θα προσπαθήσουμε να παρουσιάσουμε, στα πλαίσια του αντικειμένου της Ομολογιακής Άλγεβρας, τις έννοιες των **μακρών ακριβών ακολουθιών**, τις **επεκτάσεις των modules** και τις **ομάδες** *Ext*, στη συνέχεια τις επεκτάσεις των **ομολογιακών και συνομολογιακών συναρτητών** και τέλος, των **παραγώγων συναρτητών**, που προκύπτουν μέσω **προβολικών** και **ενριπτικών επιλύσεων** των modules, ή γενικότερα αντικειμένων **αβελιανών κατηγοριών**.

Ο κλάδος της *Ομολογιακής Άλγεβρας* έχει τις αρχές του στα μέσα του 19ου αι., με τη θεωρία των «ομολογιακών αριθμών», που παρουσίσαν οι Riemann (1857) και Betti (1871) και ανέπτυξε, αυστηρά, ο Poincaré (1895).

Μέχρι το 1945 οι διάφορες ομολογιακές έννοιες που εισήχθηκαν, κινούνταν όλες στο χώρο της Τοπολογίας. Κατά την περίοδο 1940 - 1955 τοπολογικά προερχόμενες τεχνικές, όπως των *Ext* (με τα οποία ασχολούμαστε στο 2ο κεφάλαιο) και *Tor*, εφαρμόστηκαν για τον ορισμό και την ανακάλυψη ομολογίας και συν-ομολογίας διαφόρων αλγεβρικών συστημάτων, που αφορούσαν αβελιανές ομάδες και modules και ακόμα ομολογίας και συν-ομολογίας ομάδων και αλγεβρών Lie, όπως και συν-ομολογίας προσεταιριστικών αλγεβρών. Συμπληρωματικά, ο Leray εισήγαγε τα δράγματα (sheaves), τη συν-ομολογία δραγμάτων και τις φασματικές ακολουθίες (spectral sequences).

Αλλά η επανάσταση έγινε με το βιβλίο των Cartan και Eilenberg [CE]. Αυτοί, αποδίδοντας στο έργο τους τον όρο «Ομολογιακή Άλγεβρα», συγκέντρωσαν και αποκρυστάλλωσαν τις μέχρι τότε διάσπαρτες ανακαλύψεις, προτάσεις και ομολογιακές θεωρίες, θέτοντας τις βάσεις και αρχές του νέου αντικειμένου. Στην όλη τους μελέτη χρησιμοποίησαν συστηματικά τους παράγωγους συναρτητές (στους οποίους αναφερόμαστε στο 3ο κεφάλαιο της εργασίας αυτής), που ορίζονται διά προβολικών και ενριπτικών επιλύσεων modules.

Έτσι, με βάση το βιβλίο των Cartan-Eilenberg, η Ομολογιακή Άλγεβρα αποτέλεσε ξεχωριστό κλάδο, με ταχεία εξέλιξη.

Ενδεικτικά αναφέρουμε την έρευνα για τη γενίκευση της θεωρίας των παραγώγων συναρτητών, που οδήγησε στις αβελιανές κατηγορίες και τα μη τετριμμένα παραδείγματα προβολικών modules, που οδήγησαν στην ανάπτυξη της αλγεβρικής K-θεωρίας. Εν συνεχεία, η μελέτη των ενριπτικών επιλύσεων έφερε τη θεωρία του Grothendieck για τη συν-ομολογία δραγμάτων, την ανακάλυψη των δακτυλίων Gorenstein και της τοπικής δυϊκότητας, που εμφανίζεται τόσο στη θεωρία δακτυλίων, όσο και στην αλγεβρική γεωμετρία.

Με τη σειρά τους, οι συν-ομολογιακές μέθοδοι έπαιξαν ρόλο κλειδί σε ανακαλύψεις της θεωρίας των παραγώγων κατηγοριών, της αλγεβρικής γεωμετρίας, αλλά και της θεωρίας αριθμών. Απλοποιημένες μέθοδοι παρουσιάστηκαν από τους Kan, Dold και Puppe, με αποτέλεσμα τη δημιουργία της ομοτοπικής άλγεβρας, των μη αβελιανών παράγωγων συναρτητών και την ανάπτυξη των ομολογιών André-Quillen, της κυκλικής και της τοπολογικής ομολογίας Hochschild.

Μέχρι το 1970 το βιβλίο των Cartan-Eilenberg [CE] ήταν το βασικό εγχειρίδιο στη ομολογιακή άλγεβρα, ενώ αξιοσημείωτες εργασίες είχαν παρουσιάσει οι Mac Lane (1948) και Grothendieck (Tohoku paper-1957). Τότε εμφανίστηκαν τα βιβλία του Rotman «Σημειώσεις στην Ομολογιακή Άλγεβρα»(1970) και των Hilton-Stammbach [HStm] (1971) (από το οποίο αντλήθηκαν αρκετά στοιχεία για την εργασία που ακολουθεί).

Σ΄ αυτό το χρονικό σημείο, θεωρείται πως ο κλάδος της Ομολογιακής Άλγεβρας θεσπίστηκε σταθερά και οριστικά.

Κεφάλαιο 1

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Α. ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ MODULES

Η μελέτη μας αναφέρεται στις ιδιότητες και σχέσεις που αφορούν αβελιανές κατηγορίες, δηλαδή ομάδες συνόλων με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά και μορφισμούς μεταξύ αυτών, με πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα την κατηγορία των modules και των ομομορφισμών μεταξύ τους. Έτσι ξεκινάμε με στοιχεία της θεωρίας των modules, χρήσιμα για την παρουσίαση των εννοιών που θα μας απασχολήσουν. Η έννοια του module είναι μια γενίκευση των εννοιών του διανυσματικού χώρου και της αβελιανής ομάδας. Αυτό σημαίνει ότι αν ο δακτύλιος Λ του παρακάτω ορισμού είναι σώμα, τότε το Λ-module που προκύπτει είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του Λ και σ' αυτή την περίπτωση, ένας Λ-module ομομορφισμός είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός. Αν, τώρα, $\Lambda = \mathbb{Z}$, τότε απλά, το $\mathbb{Z}$-module είναι αβελιανή ομάδα και ένας ομομορφισμός σ' αυτή την κατηγορία, είναι ομομορφισμός αβελιανών ομάδων.

1.1 Modules και module-ομομορφισμοί

1.1.1 Ορισμός. Αριστερό module σ' ένα δακτύλιο Λ (πάντα θα λογίζεται μοναδιαίος) ή **αριστερό Λ-module** ονομάζεται μια αβελιανή ομάδα A μαζί με ένα ομομορφισμό $\omega : \Lambda \to End(A, A)$.

Ο όρος $(\omega(\lambda))(a)$, $a \in A$, $\lambda \in \Lambda$, θα γράφεται λa.

Μπορούμε, τότε, να λέμε για Λ-πράξη (από αριστερά) επί του A, με την έννοια ότι αντιστοιχούμε σε κάθε ζεύγος (λ, a) το στοιχείο λa. Προφανώς, για κάθε $a, a_1, a_2 \in A$, $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

1. $(\lambda_1+\lambda_2)a=\lambda_1 a+\lambda_2 a$
2. $(\lambda_1\lambda_2)a=\lambda_1(\lambda_2 a)$
3. $1_\Lambda a=a$
4. $\lambda(a_1+a_2)=\lambda a_1+\lambda a_2$

Αντιστρόφως, αν μια πράξη του Λ επί της αβελιανής ομάδας Α ικανοποιεί τις παραπάνω τέσσερις σχέσεις, τότε ορίζει ένα ομομορφισμό δακτυλίων
$\omega:\Lambda\to End(A,A)$, μέσω του κανόνα: $(\omega(\lambda))(a)=\lambda a$.

1.1.2 Ορισμός. Αν θεωρήσουμε ως Λ^{op} το δακτύλιο που συνίσταται από την ίδια αβελιανή προσθετική ομάδα με τον Λ, αλλά σε κάθε ζεύγος (λ_1',λ_2') αντιστοίζει το γινόμενο $\lambda_2'\lambda_1'$, τότε μπορούμε να ορίσουμε το **δεξί module επί του Λ** ή **δεξί Λ-module** να είναι το αριστερό $\Lambda^{op}-module$, δηλαδή η αβελιανή ομάδα Α μαζί με τον ομομορφισμό δακτυλίων $\omega':\Lambda^{op}\to End(A,A)$.

Περνούμε τώρα στους ομομορφισμούς μεταξύ των Λ-modules, σε ορισμούς συνόλων, σχέσεις και ιδιότητες - προτάσεις που σχετίζονται μ' αυτούς.

1.1.3 Ορισμός. Αν Α και Β δύο Λ-modules, **ομομορφισμός** $\phi:A\to B$ **των Λ-modules** Α και Β ονομάζεται ο ομομορφισμός των αβελιανών ομάδων Α και Β, ώστε $\phi(\lambda a)=\lambda\phi(a)$, για κάθε $a\in A$, $\lambda\in\Lambda$.

► i) Αν ο ϕ είναι επί, θα τον συμβολίζουμε $\phi:A\twoheadrightarrow B$.
► ii)Αν ο ϕ είναι 1-1, θα σημειώνουμε $A\rightarrowtail B$.
► iii)Αν ο ϕ είναι ισομορφισμός, θα γράφουμε $\phi:\ A\xrightarrow{\sim}B$.

♦ Για οποιονδήποτε ομομορφισμό $\phi:A\to B$:

1.1.4 Ορισμός. Ονομάζουμε **πυρήνα του** ϕ το σύνολο

$$Ker\phi=\{a\in A/\phi(a)=\phi a=0\},$$

που είναι υπο-module του Α.

Σημείωση: ▲ Αν $i:Ker\phi\to A$, $i(x)=x$ η συνάρτηση εγκλεισμού, τότε προφανώς $\phi i=0$, όπου $\phi i:Ker\phi\to B$.

▼ Το σύνολο του πυρήνα ενός ομομορφισμού ϕ έχει την εξής **καθολική ιδιότητα**: Αν $\theta:N\to A$ είναι ένας ακόμα ομομορφισμός, ώστε $\phi\theta=0$, τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\nu : N \to Ker\phi$, ώστε να ισχύει $\theta = i\nu$, δηλαδή το παρακάτω τρίγωνο να είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
Ker\phi \arrow[rr, "i"] & & A \arrow[r, "\phi"] & B \\
& N \arrow[ul, dotted, "\nu"] \arrow[ur, "\theta"'] & &
\end{tikzcd}$$

1.1.5 Ορισμός. Το σύνολο

$$im\phi = \{\beta \in B/\beta = \phi(a) = \phi a, a \in A\}$$

ονομάζεται **εικόνα του** ϕ και είναι υπο-module του B.

<u>**Σημείωση:**</u> ▲ Ο ϕ είναι 1-1 αν και μόνο αν $Ker\phi = \{0\}$ και τότε μπορούμε να ταυτίζουμε το Λ-module A με το $\phi A = im\phi$.

▼ Ισχύει ότι ο ισομορφισμός των αβελιανών ομάδων A/Ker$\phi \xrightarrow{\sim}$ imϕ είναι επίσης ισομορφισμός των Λ-modules.

1.1.6 Ορισμός. Επίσης, ονομάζουμε **συν-πυρήνα του** ϕ το σύνολο-πηλίκο

$$coker\phi = B/im\phi.$$

Αν $\pi_B : B \to coker\phi$ η κανονική συνάρτηση, που στέλνει κάθε στοιχείο $b \in B$ στο σύνολο $\{b\} + im\phi$ - στοιχείο του $coker\phi$, τότε προφανώς $\pi_B\phi = 0$, όπου $\pi_B\phi : A \to coker\phi$.

<u>**Σημείωση:**</u> ▲ Ο ϕ είναι επί αν και μόνο αν $B = im\phi$, δηλαδή $coker\phi = \{0\}$. Σ' αυτή την περίπτωση, μπορούμε να ταυτίζουμε το Λ-module B με το σύνολο-πηλίκο $A/Ker\phi$.

▼ Ανάλογα με την καθολική ιδιότητα του πυρήνα, και το σύνολο του συν-πυρήνα ενός ομομορφισμού ϕ έχει την εξής **καθολική ιδιότητα**:
Αν $\eta : B \to M$ είναι ένας ακόμα ομομορφισμός ώστε $\eta\phi = 0$, τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\mu : coker\phi \to M$, ώστε να ισχύει $\eta = \mu\pi_B$, δηλαδή ώστε το παρακάτω τρίγωνο να είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\phi"] & B \arrow[rr, "\pi_B"] \arrow[dr, "\eta"'] & & coker\phi \arrow[dl, dotted, "\mu"] \\
& & M &
\end{tikzcd}$$

1.2 Ακριβείς ακολουθίες - διαγράμματα

1.2.1 Ορισμός. Έστω ότι δίνονται δύο ομομορφισμοί μεταξύ Λ-modules οι $\phi : A \to B$ και $\psi : B \to C$. Η **ακολουθία**

$$A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C$$

ονομάζεται **ακριβής** (στο B), αν ισχύει

$$Ker\psi = im\phi.$$

Παραδείγματα:

♦ i) Η ακολουθία

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\phi} B$$

είναι ακριβής (στο A) αν και μόνο αν ο ϕ είναι 1-1.

♦ ii)Η ακολουθία

$$A \xrightarrow{\phi} B \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής (στο B) αν και μόνο αν ο ϕ είναι επί.

♦ iii) Η ακολουθία

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής (στα A, B, C) αν και μόνο αν

► ο ϕ: 1-1 (δηλαδή επάγει ένα ισομορφισμό $A \xrightarrow{\sim} \phi A = Ker\psi$) και

► ο ψ: επί (δηλαδή επάγει ένα ισομορφισμό $B/Ker\psi = B/\phi A \xrightarrow{\sim} C$). Με άλλα λόγια, το A είναι υπο-module του B, ενώ το C το αντίστοιχο module-πηλίκο. Μια τέτοια ακριβής ακολουθία ονομάζεται **βραχεία ακριβής ακολουθία** και σημειώνεται $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$.

♦ Χαρακτηριστική περίπτωση είναι η **διασπόμενη βραχεία ακριβής ακολουθία**.

1.2.2 Ορισμός. Μια βραχεία ακριβής ακολουθία $A \overset{\mu}{\rightarrowtail} B \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} C$ από Λ-modules **διασπάται**, αν υπάρχει ένας δεξιά αντίστροφος του ε, Λ-module ομομορφισμός $\sigma : C \to B$, που ονομάζεται **διασπαστικός**, και είναι τέτοιος ώστε $\varepsilon\sigma = 1_C$.

1.2.3 Ορισμός. Αν A, B, C, D είναι Λ-modules και α, β, γ, δ Λ-module ομομορφισμοί, λέμε ότι το **διάγραμμα**

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ C \arrow[r, "\delta"] & D \end{tikzcd}$$

είναι **αντιμεταθετικό**, αν ισχύει $\beta\alpha = \delta\gamma : A \to D$.

Παραθέτουμε τα ακόλουθα λήμματα, που αφορούν ακριβείς ακολουθίες σε αντιμεταθετικά διαγράμματα, είναι χαρακτηριστικά και χρήσιμα για τη συνέχεια.

1.2.4 Λήμμα. *Δίνονται $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ και $A' \rightarrowtail B' \twoheadrightarrow C'$ δύο βραχείες, ακριβείς ακολουθίες και έστω ότι στο παρακάτω αντιμεταθετικό διάγραμμα δύο οποιοιδήποτε από τους κάθετους ομομορφισμούς είναι ισομορφισμοί.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "\mu"] \arrow[d, dotted, "\alpha"'] & B \arrow[r, two heads, "\varepsilon"] \arrow[d, dotted, "\beta"'] & C \arrow[d, dotted, "\gamma"] \\ A' \arrow[r, tail, "\mu'"] & B' \arrow[r, two heads, "\varepsilon'"] & C' \end{tikzcd}$$

Τότε και ο τρίτος κάθετος ομομορφισμός είναι ισομορφισμός.

1.2.5 Λήμμα. *(*του Lambek*) Στο αντιμεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς σειρές, που ακολουθεί:*

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr, phantom, "\Sigma_1"] & A \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, squiggly, "\phi"] \arrow[dr, phantom, "\Sigma_2"] & A'' \arrow[d, "\theta"] \\ B' \arrow[r, "\beta_1"'] & B \arrow[r, "\beta_2"'] & B'' \end{tikzcd}$$

ο ομομορφισμός ϕ επάγει ένα ισομορφισμό

$$\Phi : \frac{ker\theta\alpha_2}{ker\alpha_2 + ker\phi} \xrightarrow{\sim} \frac{im\phi \cap im\beta_1}{im\phi\alpha_1} .$$

<u>**Σημείωση:**</u> Για να διευκολύνουμε τη γραφή, δίνουμε τον ορισμό:

1.2.6 Ορισμός. Αν το Σ είναι ένα αντιμεταθετικό τετράγωνο, όπου A, A', B, B': Λ-modules, τότε ορίζουμε

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr, phantom, "\Sigma"] & A \arrow[d, "\phi"] \\ B' \arrow[r, "\beta"] & B \end{tikzcd}$$

εικόνα του Σ: $im\Sigma = \dfrac{im\phi \cap im\beta}{im\phi\alpha}$ και

πυρήνα του Σ : $ker\Sigma = \dfrac{ker\phi\alpha}{ker\alpha + ker\psi}$

Με βάση αυτή την ορολογία, το λήμμα του Lambek δίνει τον ισομορφισμό

$$\Phi : \ ker\Sigma_2 \xrightarrow{\sim} im\Sigma_1 \ \text{ ή αλλιώς: } ker\Sigma_2 \cong im\Sigma_1$$

Απόδειξη του λήμματος Lambek: ◄ Πρώτα δείχνουμε ότι ο ϕ επάγει τον ομομορφισμό Φ.

Έστω $x \in ker\theta\alpha_2 \Rightarrow 0 = \theta\alpha_2 x = \beta_2\phi x \Rightarrow \phi x \in ker\beta_2 = im\beta_1$
$\Rightarrow \phi x \in im\phi \cap im\beta_1$.

Αν $\quad x = x_1 + x_2 \in ker\alpha_2 + ker\phi, \begin{cases} x_1 \in ker\alpha_2 = im\alpha_1 \Rightarrow \phi x_1 \in im\phi\alpha_1 \\ x_2 \in ker\phi \Rightarrow \phi x_2 = 0 \in im\phi\alpha_1 \end{cases}$

$$\Longrightarrow \phi x = \phi x_1 + \phi x_2 \in im\phi\alpha_1.$$

Άρα ο Φ είναι καλά ορισμένος και όπως και ο ϕ, είναι ομομορφισμός.

◄ Θα δείξουμε τώρα ότι ο Φ είναι επί.

Αν $y \in im\phi \cap im\beta_1 \Longrightarrow \begin{cases} \exists x \in A, \phi x = y \\ y \in im\beta_1 = ker\beta_2 \end{cases} \Longrightarrow 0 = \beta_2(\phi x) = \theta\alpha_2 x$

$\Longrightarrow \quad x \in ker\theta\alpha_2 \quad \Longrightarrow$ ο Φ είναι επί.

◄ Τέλος, δείχνουμε ότι ο Φ είναι 1-1.

Αν $x \in ker\theta\alpha_2, \phi x \in im\phi\alpha_1 \Longrightarrow \exists z \in A', \phi x = \phi\alpha_1 z$

(επειδή ϕ ομομορφισμός), $\Longrightarrow \exists t \in ker\phi, x = \alpha_1 z + t$
$\Longrightarrow x \in im\alpha_1 + ker\phi = ker\alpha_2 + ker\phi$.

Αυτό σημαίνει ότι το x είναι μηδενικό στοιχείο του $\dfrac{ker\theta\alpha_2}{ker\alpha_2 + ker\phi}$. ◊

1.2.7 Λήμμα. (του φιδιού) *Έστω το ακόλουθο αντιμεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς σειρές:*

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\mu'"] & B' \arrow[r, "\varepsilon'"] & C' &
\end{tikzcd}$$

Τότε υπάρχει ένας «συνδετικός» ομομορφισμός $\omega : ker\gamma \to coker\alpha$, ώστε η επόμενη ακολουθία να είναι ακριβής:

$$ker\alpha \xrightarrow{\mu_*} ker\beta \xrightarrow{\varepsilon_*} ker\gamma \overset{\omega}{\rightsquigarrow} coker\alpha \xrightarrow{\mu'_*} coker\beta \xrightarrow{\varepsilon'_*} coker\gamma$$

Απόδειξη: Από το δοσμένο διάγραμμα προκύπτει το ακόλουθο αντιμεταθετικό διάγραμμα, με όλες τις ακολουθίες, οριζόντια και κάθετα, ακριβείς:

$$\begin{tikzcd}
 & ker\alpha \arrow[r, squiggly, "\mu_*"] \arrow[d, "i_A"'] & ker\beta \arrow[r, squiggly, "\varepsilon_*"] \arrow[d, "i_B"'] \arrow[dr, phantom, "\Sigma_1"] & ker\gamma \arrow[d, "i_C"] \arrow[ddll, squiggly, bend left=80, "\omega"] & \\
 & A \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\Sigma_3"] & B \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "\Sigma_2"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\mu'"] \arrow[d, "\pi_{A'}"'] \arrow[dr, phantom, "\Sigma_4"] & B' \arrow[r, "\varepsilon'"] \arrow[d, "\pi_{B'}"] & C' \arrow[d, "\pi_{C'}"] & \\
 & coker\alpha \arrow[r, squiggly, "\mu'_*"] & coker\beta \arrow[r, squiggly, "\varepsilon'_*"] & coker\gamma &
\end{tikzcd}$$

Με βάση το προηγούμενο λήμμα του Lambek, έχουμε:

$$im\Sigma_1 \cong ker\Sigma_2 \cong im\Sigma_3 \cong ker\Sigma_4.$$

Θα δείξουμε ακόμα ότι:

$$\text{i) } im\Sigma_1 \cong coker\varepsilon_* \qquad \text{και} \qquad \text{ii) } ker\Sigma_4 \cong ker\mu'_*$$

◀ i) $\quad im\Sigma_1 = \dfrac{imi_C \cap im\varepsilon}{imi_C\varepsilon_*} \cong \dfrac{ker\gamma \cap im\varepsilon}{im\varepsilon_*}$ (i_C ομομορφισμός εγκλεισμού).

ε : επιμορφισμός $\Longrightarrow ker\gamma \subseteq im\varepsilon \Longrightarrow ker\gamma \cap im\varepsilon = ker\gamma$. Άρα

$$im\Sigma_1 \cong \frac{ker\gamma}{im\varepsilon_*} = coker\varepsilon_*.$$

◀ ii) $\quad ker\Sigma_4 = \dfrac{ker\pi_{B'}\mu'}{ker\mu' + ker\pi_{A'}}.$

Ο μ' μονομορφισμός $\Longrightarrow ker\mu' = \{0\} \Longrightarrow ker\mu' + ker\pi_{A'} = ker\pi_{A'}$.

Επειδή το σύνολο $ker(\pi_{B'}\mu')$ είναι υπο-module του A', είναι:

$A'/ker\pi_{A'} \cong im\pi_{A'} \Longrightarrow ker(\pi_{B'}\mu')/ker\pi_{A'} \cong \{\pi_{A'}(x), x \in ker\pi_{B'}\mu'\}$.

Αν, όμως, $x \in ker(\pi_{B'}\mu') \Longrightarrow (\pi_{B'}\mu')(x) = \pi_{B'}(\mu'(x)) = 0$
$\Longrightarrow [\mu'(x)] = 0 \in coker\beta$
$\Longrightarrow \mu'(x) \in im\beta.$ Επομένως

$$ker\Sigma_4 \cong \{\pi_{A'}(x), x \in A' : \mu'(x) \in im\beta\}.$$

Αλλά

$$\begin{aligned} ker\mu'_* &= \{y \in coker\alpha : \mu'_*(y) = 0\} \\ &= \{[x] \in A'/im\alpha : [\mu'(x)] = 0 \in B'/im\beta, x \in A'\} \\ &= \{[x] \in A'/im\alpha : \mu'(x) \in im\beta\} \\ &= \{\pi_{A'}(x), x \in A' : \mu'(x) \in im\beta\}. \end{aligned}$$ Άρα

$$ker\Sigma_4 \cong ker\mu'_*$$

Υπάρχει, λοιπόν, ένας ισομορφισμός $f: \quad coker\varepsilon_* \xrightarrow{\sim} ker\mu'_*$.

Ορίζουμε, τώρα, τον ομομορφισμό

$$\omega = i_{coker\alpha} \cdot f \cdot \pi_{ker\gamma},$$

αφού συμπληρώσουμε το παραπάνω διάγραμμα, ως εξής:

$$\begin{tikzcd} ker\alpha \arrow[r, "\mu_*"] & ker\beta \arrow[r, "\varepsilon_*"] & ker\gamma \arrow[r, dotted, "\omega"] \arrow[d, "\pi_{ker\gamma}"'] & coker\alpha \arrow[r, "\mu'_*"] & coker\beta \arrow[r, "\varepsilon'_*"] & coker\gamma \\ & & coker\varepsilon_* \arrow[r, "\sim", "f"'] & ker\mu'_* \arrow[u, "i_{coker\alpha}"'] & & \end{tikzcd}$$

Για να κάνει ο ω την ακολουθία ακριβή, θα πρέπει ακόμα να δείξουμε:

iii) $ker\omega = im\varepsilon_*$ και iv) $im\omega = ker\mu'_*$.

Πράγματι,

◀ iii) $$\begin{aligned} ker\omega &= \{x \in ker\gamma : \omega(x) = 0\} \\ &= \{x \in ker\gamma : (i_{coker\alpha} \cdot f \cdot \pi_{ker\gamma})(x) = 0\} \\ &= \{x \in ker\gamma : i(f(\pi(x))) = 0\} \\ &= \{x \in ker\gamma : i(f([x])) = 0, [x] \in coker\varepsilon_*\} \\ &= \{x \in ker\gamma : f([x]) = 0\}, \text{ διότι η } i \text{ είναι 1-1} \\ &= \{x \in ker\gamma : [x] = 0\}, \text{ διότι η } f \text{ είναι 1-1} \\ &= \{x \in ker\gamma : x \in im\varepsilon_*\} = im\varepsilon_*. \end{aligned}$$

◀ iv) $ker\mu'_* \subseteq im\omega$ (προφανώς).

$$\begin{aligned} \text{Αν } x \in ker\gamma &\Longrightarrow \pi(x) \in coker\varepsilon_* &&\Longrightarrow f(\pi(x)) \in ker\mu'_* \\ &\Longrightarrow \mu'_*((i \cdot f \cdot \pi)(x)) = 0 &&\Longrightarrow \mu'_*(\omega(x)) = 0 \\ &\Longrightarrow im\omega \subseteq ker\mu'_*. \end{aligned}$$

Δηλαδή ισχύει
$$im\omega = ker\mu'_*. \quad \Diamond$$

1.3 Η ομάδα των module-ομομορφισμών

Θεωρούμε τώρα δύο Λ-modules A και B και *το σύνολο όλων των Λ-module ομομορφισμών από το A στο B. Σημειώνουμε το σύνολο αυτό $Hom_\Lambda(A, B)$.*

Η πρόσθεση στο σύνολο $Hom_\Lambda(A, B)$ ορίζεται ως εξής: Αν $\phi, \psi : A \to B$ δύο Λ-module ομομορφισμοί, τότε

$$\phi + \psi : A \to B, (\phi + \psi)(a) = \phi(a) + \psi(a), \forall a \in A.$$

Σημείωση: Αν $\phi, \psi \in Hom_\Lambda(A, B) \Longrightarrow \phi + \psi \in Hom_\Lambda(A, B)$ και το σύνολο $Hom_\Lambda(A, B)$ είναι μια **προσθετική αβελιανή ομάδα**.

Αν $\beta : B_1 \to B_2$ είναι ένας Λ-module ομομορφισμός, αντιστοιχούμε στον ομομορφισμό $\phi : A \to B_1$ τον ομομορφισμό $\beta\phi : A \to B_2$ κι έτσι ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\boxed{\beta_* = Hom_\Lambda(A, \beta) : Hom_\Lambda(A, B_1) \to Hom_\Lambda(A, B_2), \;\; \beta_*(\phi) = \beta\phi}$$

Ο β_* είναι ομομορφισμός αβελιανών ομάδων, καθώς αν $\phi, \psi : A \to B_1$, ισχύει $\beta[(\phi+\psi)(a)] = \beta[(\phi(a)+\psi(a)] = \beta\phi(a)+\beta\psi(a) = (\beta\phi+\beta\psi)(a), \forall a \in A$. Δηλαδή

$$\beta_*(\phi+\psi) = \beta_*(\phi)+\beta_*(\psi) : A \to B_2.$$

Γι΄ αυτό τον ομομορφισμό β_*, ισχύουν οι παρακάτω δύο κανόνες:

▶ i)Αν $\beta : B_1 \to B_2$ και $\beta' : B_2 \to B_3$, τότε

$$(\beta'\beta)_* = \beta'_*\beta_* : Hom_\Lambda(A, B_1) \to Hom_\Lambda(A, B_3)$$

▶ ii)Αν $\beta : B_1 \to B_1$ ο ταυτοτικός ομομορφισμός, τότε
$\beta_* : Hom_\Lambda(A, B_1) \to Hom_\Lambda(A, B_1)$ ταυτοτικός ομομορφισμός, δηλαδή

$$\beta = 1_{B_1} \Longrightarrow \beta_* = 1_{Hom_\Lambda(A,B_1)}.$$

<u>**Σημείωση:**</u> Γενικά, με το σύμβολο $Hom_\Lambda(A, -)$ θα αντιστοιχούμε σε κάθε Λ-module B μια αβελιανή ομάδα $Hom_\Lambda(A, B)$ και σε κάθε Λ-module ομομορφισμό $\beta : B_1 \to B_2$ ένα ομομορφισμό αβελιανών ομάδων
$\beta_* = Hom_\Lambda(A, \beta) : Hom_\Lambda(A, B_1) \to Hom_\Lambda(A, B_2)$.

Αντίστοιχα, αν θεωρήσουμε ένα Λ-module ομομορφισμό $\alpha : A_2 \to A_1$, τότε αντιστοιχούμε σε κάθε ομομορφισμό $\phi : A_1 \to B$ τον ομομορφισμό $\phi\alpha : A_2 \to B$ κι έτσι ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\boxed{\alpha^* = Hom_\Lambda(\alpha, B) : \ Hom_\Lambda(A_1, B) \to Hom_\Lambda(A_2, B), \quad \alpha^*(\phi) = \phi\alpha}$$

που ομοίως είναι ομομορφισμός αβελιανών ομάδων, με τους δύο παρακάτω κανόνες να ισχύουν γι΄ αυτόν:

▶ i) Αν $\alpha : A_2 \to A_1$ και $\alpha' : A_3 \to A_2$, τότε

$(\alpha\alpha')^* = \alpha'^*\alpha^* : Hom_\Lambda(A_1, B) \to Hom_\Lambda(A_3, B)$ (αντιστρέφεται η σειρά)

▶ ii) $\alpha = 1_{A_1} \Longrightarrow \alpha^* = 1_{Hom_\Lambda(A_1,B)}$.

Θ' αναφέρουμε τώρα, δύο θεωρήματα που σχετίζουν τις ακριβείς ακολουθίες με τις αβελιανές ομάδες Hom_Λ.

1.3.1 Θεώρημα. *Έστω* $B_1 \rightarrowtail^{\mu} B \xrightarrow{\varepsilon} B_2$ *μια ακριβής ακολουθία από Λ-modules. Για κάθε Λ-module A, προκύπτει η ακόλουθη ακριβής ακολουθία:*

$$Hom_\Lambda(A, B_1) \overset{\mu_*}{\rightarrowtail} Hom_\Lambda(A, B) \xrightarrow{\varepsilon_*} Hom_\Lambda(A, B_2)$$

.

1.3.2 Θεώρημα. *Έστω* $A_1 \xrightarrow{\mu} A \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} A_2$ *μια ακριβής ακολουθία από Λ-modules. Για κάθε Λ-module B, προκύπτει η ακόλουθη ακριβής ακολουθία:*

$$Hom_\Lambda(A_2, B) \overset{\varepsilon^*}{\rightarrowtail} Hom_\Lambda(A, B) \xrightarrow{\mu^*} Hom_\Lambda(A_1, B)$$

.

<u>Σημείωση:</u> ▲ Ακόμα και στην περίπτωση που ο ομομορφισμός ε είναι επί, ο αντίστοιχος ε_* του θεωρήματος (1.3.1) δεν είναι, γενικά, επί.

▼ Ομοίως, για το θεώρημα (1.3.2) διευκρινίζουμε ότι ακόμη κι αν ο μ είναι 1-1, γενικά ο μ^* δεν είναι επί.

1.4 Αθροίσματα και Γινόμενα

Για δύο Λ-modules A και B κατασκευάζουμε το **ευθύ άθροισμα** $A \oplus B$ των A και B, ως το σύνολο των ζευγών (a, b), με $a \in A$ και $b \in B$, μαζί με τις πράξεις κατά συνιστώσα, την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό:

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b'), \quad \lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b).$$

Είναι σαφές ότι οι Λ-module ομομορφισμοί

$$i_A : A \to A \oplus B, i_A(a) = (a, 0), \quad i_B : B \to A \oplus B, i_B(b) = (0, b) \quad \text{είναι 1-1.}$$

1.4.1 Πρόταση. *Αν M είναι ένα Λ-module,* $\psi_A : A \to M$ *και* $\psi_B : B \to M$ *Λ-module ομομορφισμοί, τότε υπάρχει μια μοναδική απεικόνιση*

$$\psi =< \psi_A, \psi_B >: A \oplus B \to M$$

ώστε να ισχύει $\psi i_A = \psi_A$ *και* $\psi i_B = \psi_B$.

Εκφράζουμε την προηγούμενη πρόταση με το παρακάτω διάγραμμα, στο οποίο τα δύο σχηματιζόμενα τρίγωνα είναι αντιμεταθετικά:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "i_A"'] \arrow[drr, "\psi_A"] & & \\
& A \oplus B \arrow[r, dotted, "\exists!\ \psi"] & M \\
B \arrow[ur, "i_B"] \arrow[urr, "\psi_B"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Το σύμβολο $\exists!\ \psi$ δηλώνει τη μοναδικότητα του $\psi =< \psi_A, \psi_B >: A \oplus B \to M$,

όπου $\psi(a,b) = \psi_A(a) + \psi_B(b)$.

Στον ακόλουθο ορισμό επεκτείνουμε την έννοια του αθροίσματος, για περισσότερα από δύο Λ-modules. Αν, λοιπόν, $\{A_j\}, j \in J$ είναι μια οικογένεια από Λ-modules, με υπο-δείκτες από το J, ορίζουμε το ευθύ τους άθροισμα $\bigoplus_{j\in J} A_j$.

1.4.2 Ορισμός. ► Ένα στοιχείο του $\bigoplus_{j\in J} A_j$ είναι μια οικογένεια $(a_j)_{j\in J}, a_j \in A_j$, ενώ $a_j \neq 0$, μόνο για πεπερασμένο πλήθος υπο-δεικτών j.
► Η πρόσθεση ορίζεται από τον τύπο $(a_j)_{j\in J} + (b_j)_{j\in J} = (a_j + b_j)_{j\in J}$ και
► ο Λ-πολ/σμός από τη σχέση $\lambda(a_j)_{j\in J} = (\lambda a_j)_{j\in J}$.

Όπως εύκολα προκύπτει, το ευθύ άθροισμα από Λ-modules, με τις παραπάνω πράξεις, είναι ένα Λ-module.

Για κάθε $k \in J$ ορίζουμε τις ενρίψεις $i_k : A_k \to \bigoplus_{j\in J} A_j$ (1-1 ομομορφισμούς), με

$$i_k(a_k) = (b_j)_{j\in J}, \text{ όπου } b_j = 0 \text{ για } j \neq k \text{ και } b_k = a_k,\ a_k \in A_k.$$

Τότε ισχύει η παρακάτω πρόταση, που εκφράζει την *καθολική ιδιότητα για το ευθύ άθροισμα* των Λ-modules.

1.4.3 Πρόταση. *Αν M είναι ένα Λ-module και $\{\psi_j : A_j \to M\}$, $j \in J$, μία οικογένεια Λ-module ομομορφισμών, τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\psi =< \psi_j >: \bigoplus_{j\in J} A_j \to M$, έτσι ώστε $\psi i_j = \psi_j$, για κάθε $j \in J$ δηλαδή ο ψ κάνει το καθένα από τα παρακάτω τρίγωνα αντιμεταθετικό:*

$$
\begin{tikzcd}
A_j \arrow[dr, "i_j"'] \arrow[drr, "\psi_j"] & & \\
& \bigoplus_{j\in J} A_j \arrow[r, dotted, "\exists!\ \psi"'] & M
\end{tikzcd}
$$

Η καθολική ιδιότητα χαρακτηρίζει το ευθύ άθροισμα και τις 1-1 ενρίψεις i_j, μέχρις ενός μοναδικού ισομορφισμού. Δηλαδή για κάθε Λ-module S, που έχει μια τέτοια ιδιότητα, θα υπάρχει μοναδικός ισομορφισμός $S \cong \bigoplus_{j\in J} A_j$.

Προχωρούμε στο **ευθύ γινόμενο** $\prod_{j\in J} A_j$ οικογένειας $\{A_j\}, j \in J$ από Λ-modules.

1.4.4 Ορισμός. Ένα στοιχείο του $\prod_{j\in J} A_j$ είναι μια οικογένεια $(a_j)_{j\in J}$ στοιχείων $a_j \in A_j$, χωρίς κανένα περιορισμό για τα a_j. Η πρόσθεση και ο Λ-πολλαπλασιασμός ορίζονται, όπως και στο ευθύ άθροισμα, από τις σχέσεις

$$(a_j)_{j\in J} + (b_j)_{j\in J} = (a_j + b_j)_{j\in J} \quad \lambda(a_j)_{j\in J} = (\lambda a_j)_{j\in J}.$$

Παρατήρηση: ▲ Για μια πεπερασμένη οικογένεια Λ-modules $\{A_j, j = 1, 2, ...n\}$, το ευθύ άθροισμα και το ευθύ γινόμενο ταυτίζονται. Στην περίπτωση όμως του άπειρου πλήθους των A_j, το $\bigoplus_{j\in J} A_j$ είναι υπο-module του $\prod_{j\in J} A_j$.

▼ Η άλλη διαφοροποίηση μεταξύ τους έγκειται στην καθολική ιδιότητα που έχει το καθένα. Στην περίπτωση του γινομένου, για κάθε $k \in J$ ορίζουμε τις προβολές $\pi_k : \prod_{j\in J} A_j \to A_k$ με τη σχέση $\pi_k(a_j)_{j\in J} = a_k$. Αυτές είναι module-ομομορφισμοί, συνδέονται με το ευθύ γινόμενο και έχουν μ' αυτό την ακόλουθη καθολική ιδιότητα, μέχρις ενός μοναδικού ισομορφισμού.

1.4.5 Πρόταση. *Αν M είναι ένα Λ-module και $\{\phi_j : M \to A_j, j \in J\}$ μία οικογένεια Λ-module ομομορφισμών, τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\phi = \{\phi_j\} : M \to \prod_{j\in J} A_j$, έτσι ώστε $\pi_j\phi = \phi_j$, για κάθε $j \in J$ δηλαδή το καθένα από τα παρακάτω τρίγωνα είναι αντιμεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} & A_j \\ M \arrow[ur, "\phi_j"] \arrow[r, dotted, "\exists!\ \phi"'] & \prod_{j\in J} A_j \arrow[u, "\pi_j"'] \end{tikzcd}$$

Επιπλέον, για οποιοδήποτε Λ-module P ισχύει μια τέτοια ιδιότητα, υπάρχει μοναδικός ισομορφισμός $P \cong \prod_{j\in J} A_j$.

Σημείωση: Η ακολουθία $A \rightarrowtail^{i_A} A \oplus C \xrightarrow{\pi_C} C$ είναι ακριβής και διασπάται από τον ομομορφισμό i_C. Το ακόλουθο λήμμα δείχνει ότι όλες οι διασπώμενες, βραχείες, ακριβείς ακολουθίες είναι αυτής της μορφής.

1.4.6 Λήμμα. *Αν ο ομομορφισμός $\sigma : C \to B$ είναι διασπαστικός για τη βραχεία, ακριβή ακολουθία $A \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\varepsilon} C$, τότε το Λ-module B είναι ισόμορφο με το ευθύ άθροισμα $A \oplus C$. Μέσω αυτού του ισομορφισμού, ο μ αντιστοιχεί στον i_A και ο σ στον i_C.*

Απόδειξη: Λόγω της καθολικής ιδιότητας του ευθέως αθροίσματος, ορίζεται ο μοναδικός ομομορφισμός ψ του παρακάτω διαγράμματος

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "i_A"'] \arrow[drr, "\mu"] & & \\
& A \oplus C \arrow[r, dotted, "\psi"] & B \\
C \arrow[ur, "i_C"] \arrow[urr, "\sigma"'] & &
\end{tikzcd}$$

Τότε το ακόλουθο διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό, διότι:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "i_A"] \arrow[d, equal] & A \oplus C \arrow[r, two heads, "\pi_C"] \arrow[d, "\psi"'] & C \arrow[d, equal] \\
A \arrow[r, tail, "\mu"] & B \arrow[r, two heads, "\varepsilon"] & C
\end{tikzcd}$$

◀ απ' το πρώτο διάγραμμα, προκύπτει αντιμεταθετικό το αριστερό τετράγωνο,
◀ ενώ είναι και το δεξί τετράγωνο, αφού για $a \in A$, $c \in C$, έχουμε
$\varepsilon\psi(a, c) = \varepsilon(\mu a + \sigma c) = \varepsilon\mu a + \varepsilon\sigma c = 0 + c = c = \pi_C(a, c)$
($\varepsilon\mu = 0$ και $\varepsilon\sigma = 1_C$). Δηλαδή ισχύει $\varepsilon\psi = \pi_C$.
Από το λήμμα, λοιπόν, (1.2.4) προκύπτει ότι ο ψ είναι ισομορφισμός. $\Diamond$

Κλείνοντας την παράγραφο, παραθέτουμε δύο προτάσεις που αναφέρονται σε ομάδες Hom_Λ ομομορφισμών ευθέων αθροισμάτων ή γινομένων Λ-modules.

1.4.7 Πρόταση. *Αν B είναι ένα Λ-module και $\{A_j, j \in J\}$ μια οικογένεια Λ-modules, τότε υπάρχει ένας ισομορφισμός*

$$\eta : \ Hom_\Lambda(\textstyle\bigoplus_{j\in J} A_j, B) \xrightarrow{\sim} \prod_{j\in J} Hom_\Lambda(A_j, B)$$

Απόδειξη: Αν δοθεί $\psi \in Hom_\Lambda(\bigoplus_{j\in J} A_j, B)$, δηλαδή $\psi : \bigoplus_{j\in J} A_j \to B$, ορίζουμε $\eta(\psi) = (\psi i_j : A_j \to B)_{j\in J}$.

$$\begin{tikzcd}
A_j \arrow[d, "i_j"'] \arrow[dr, dotted, "\psi i_j"] & \\
\bigoplus_{j\in J} A_j \arrow[r, "\psi"'] & B
\end{tikzcd}$$

Η καθολική ιδιότητα του $\bigoplus_{j\in J} A_j$ εξασφαλίζει το ότι ο η είναι 1-1. Αντιστρόφως, για κάθε οικογένεια Λ-module ομομορφισμών $\{\psi_j : A_j \to B, j \in J\}$, λόγω της καθολικής ιδιότητας του ευθέως αθροίσματος, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\psi =< \psi_j >$: $\bigoplus_{j\in J} A_j \to B$, ώστε καθένα από τα παραπάνω τρίγωνα να είναι αντιμεταθετικό. Αυτό κάνει τον η επί.

Οι προβολές $\pi_j : \prod_{j\in J} Hom_\Lambda(A_j, B) \to Hom_\Lambda(A_j, B)$ δίνονται από τη σχέση: $\pi_j\eta = Hom_\Lambda(i_j, B)$ που δηλώνεται με το σχήμα:

$$\begin{tikzcd} Hom_\Lambda(\bigoplus_{j\in J} A_j, B) \arrow[d, "\eta"'] \arrow[dr, "Hom_\Lambda(i_j,B)"] & \\ \prod_{j\in J} Hom_\Lambda(A_j, B) \arrow[r, dotted, "\pi_j"'] & Hom_\Lambda(A_j, B). \end{tikzcd} \qquad \Diamond$$

.

1.4.8 Πρόταση. *Αν A είναι ένα Λ-module και $\{B_j, j \in J\}$ μια οικογένεια Λ-modules, τότε υπάρχει ένας ισομορφισμός*

$$\zeta : \ Hom_\Lambda(A, \prod_{j\in J} B_j) \xrightarrow{\sim} \prod_{j\in J} Hom_\Lambda(A, B_j)$$

Απόδειξη: Αν δοθεί $\phi \in Hom_\Lambda(A, \prod_{j\in J} B_j)$, $\phi = \{\phi_j\} : A \to \prod_{j\in J} B_j$, ανάλογα με την προηγούμενη απόδειξη, ορίζουμε $\zeta(\phi) = (\pi_j\phi : A \to B_j)_{j\in J}$,

$$\begin{tikzcd} & B_j \\ A \arrow[ur, dotted, "\pi_j\phi"] \arrow[r, "\phi"'] & \prod_{j\in J} B_j \arrow[u, "\pi_j"'] \end{tikzcd}$$

που λόγω της καθολικής ιδιότητας του ευθέως γινομένου, είναι 1-1 και επί. Οι προβολές $\pi'_j : \prod_{j\in J} Hom_\Lambda(A, B_j) \to Hom_\Lambda(A, B_j)$, σ′ αυτή την περίπτωση, δίνονται από τη σχέση: $\pi'_j\zeta = Hom_\Lambda(A, \pi_j)$ που δηλώνεται με το σχήμα:

$$\begin{tikzcd} Hom_\Lambda(A, \prod_{j\in J} B_j) \arrow[d, "\zeta"'] \arrow[dr, "Hom_\Lambda(A,\pi_j)"] & \\ \prod_{j\in J} Hom_\Lambda(A, B_j) \arrow[r, dotted, "\pi'_j"'] & Hom_\Lambda(A, B_j). \end{tikzcd} \qquad \Diamond$$

1.5 Προβολικά και ενριπτικά modules

Δύο περιπτώσεις χρήσιμες για τη συνέχεια, είναι αυτές του προβολικού και του ενριπτικού Λ-module. Με το προβολικό συνδέεται και η έννοια του ελεύθερου Λ-module. Αναφέρουμε τους ορισμούς και τις απαιτούμενες προτάσεις.

1.5.1 Ορισμός. Ένα υποσύνολο S ενός Λ-module A, λέγεται **σύνολο γεννητόρων** του A, όταν i)$S \neq \emptyset$, ii)$\forall a \in A$ είναι $a = \sum_{s \in S} \lambda_s s, \lambda_s \in \Lambda$ με $\lambda_s \neq 0$ για πεπερασμένο πλήθος στοιχείων $s \in S$ και iii) κάθε στοιχείο αυτής της μορφής, ανήκει στο A.

Αν η έκφραση κάθε στοιχείου του A διά των στοιχείων του S είναι μοναδική, τότε το S είναι **βάση** του A και το A ονομάζεται **ελεύθερο (επί του** S**)**.

Η μοναδικότητα της παραπάνω γραφής κάθε στοιχείου του A, ισοδύναμα, σημαίνει ότι το σύνολο βάσης S είναι **γραμμικά ανεξάρτητο**, δηλαδή $\sum_{s \in S} \lambda_s s = 0 \Longrightarrow \lambda_s = 0, \forall s \in S$.

1.5.2 Πρόταση. *Αν ένα Λ-module A είναι ελεύθερο επί ενός συνόλου S, τότε $A \cong \bigoplus_{s \in S} \Lambda_s$, όπου $\Lambda_s = \Lambda$, για κάθε $s \in S$. Αντιστρόφως, το σύνολο $\bigoplus_{s \in S} \Lambda_s$ είναι ελεύθερο επί του υποσυνόλου του $\{1_{\Lambda_s}, s \in S\}$.*

Αυτό σημαίνει ότι η βάση του συνόλου $\bigoplus_{s \in S} \Lambda_s$ αποτελείται από τα στοιχεία του e_s, όπου η $s-$θέσεως συνιστώσα τους είναι το στοιχείο 1_{Λ_s}, ενώ όλες οι άλλες συνιστώσες τους είναι 0.

Η επόμενη πρόταση δείχνει τη χρησιμότητα του ελεύθερου Λ-module στο χώρο των επεκτάσεων, που θα μας απασχολήσει στη συνέχεια και προσδίδει σ' αυτό έναν καθολικό χαρακτηρισμό.

1.5.3 Πρόταση. *Αν ένα Λ-module P είναι ελεύθερο επί ενός συνόλου S, για κάθε Λ-module M και για κάθε συνάρτηση f από το S στο σύνολο γεννητόρων του M, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\phi : P \to M$, που επεκτείνει την f.*

Απόδειξη: Αν $f(s) = m_s$, όπου $s \in S$ και το m_s στοιχείο του συνόλου γεννητόρων του M, τότε θέτουμε $\phi(\sum_{s \in S} \lambda_s s) = \sum_{s \in S} \lambda_s m_s$. Ο ϕ είναι, προφανώς, ομομορφισμός που επεκτείνει την f σε ολόκληρο το P. $\Diamond$

1.5.4 Πρόταση. *Κάθε Λ-module A είναι πηλίκο ενός ελεύθερου module P.*

Απόδειξη: Αν S είναι το σύνολο γεννητόρων του A, θεωρούμε το ελεύθερο Λ-module $P = \bigoplus_{s\in S} \Lambda_s$ με $\Lambda_s = \Lambda$. Παίρνοντας ως $f : \Lambda_s \to S$ τη συνάρτηση με τύπο $f(1_{\Lambda_s}) = s$, καταλήγουμε στην επέκτασή της $\phi : P \to A$. Ο ομομορφισμός ϕ είναι επί, αφού $\forall a \in A \Longrightarrow a = \sum_{s\in S} \lambda_s s$ και $\phi(\sum_{s\in S} \lambda_s) = \sum_{s\in S} \lambda_s s = a$ με $\sum_{s\in S} \lambda_s \in \bigoplus_{s\in S} \Lambda_s$. Άρα $A \cong \bigoplus_{s\in S} \Lambda_s / Ker\phi$. $\Diamond$

1.5.5 Πρόταση. *Έστω P ένα ελεύθερο Λ-module. Σε κάθε Λ-module επιμορφισμό $\varepsilon : B \twoheadrightarrow C$ και σε κάθε ομομορφισμό $\gamma : P \to C$, υπάρχει ένας ομομορφισμός $\beta : P \to B$, τέτοιος ώστε $\varepsilon\beta = \gamma$.*

Απόδειξη: Έστω ότι το P είναι ελεύθερο επί του υποσυνόλου του S.
ε : επί $\Longrightarrow \forall \gamma(s) \in C, \exists b_s \in B, s \in S, \varepsilon(b_s) = \gamma(s), s \in S$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f : S \to B$ με $f(s) = b_s, s \in S$, τότε βάσει της πρότασης (1.5.3), ο β θα είναι η μοναδική επέκταση της f, όπου $\beta : P \to B$ κι έτσι, από τον ορισμό του β και από το ότι είναι ομομορφισμός, ισχύει $\varepsilon\beta = \gamma$. $\Diamond$

Αυτή η τελευταία ιδιότητα του ελεύθερου module είναι τόσο σημαντική, ώστε να μας οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό.

1.5.6 Ορισμός. Ένα Λ-module P ονομάζεται **προβολικό**, αν για κάθε επιμορφισμό $\varepsilon : B \twoheadrightarrow C$ και κάθε ομομορφισμό $\gamma : P \to C$, υπάρχει ένας ομομορφισμός $\beta : P \to B$, τέτοιος ώστε $\varepsilon\beta = \gamma$. Ισοδύναμα, για οποιουσδήποτε ομομορφισμούς ε, γ με τον ε επί, υπάρχει ο ομομορφισμός β, ώστε το ακόλουθο τρίγωνο να είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "\beta"'] \arrow[d, "\gamma"] \\ B \arrow[r, two heads, "\varepsilon"'] & C \end{tikzcd}$$

Από τα παραπάνω, προκύπτει ότι:

1.5.7 Πόρισμα. *Κάθε ελεύθερο module είναι προβολικό.*

Σημειώνουμε τη σημασία των προβολικών modules με την εξής:

Παρατήρηση: Αν $A \overset{\mu}{\rightarrowtail} B \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} C$ είναι μια βραχεία, ακριβής ακολουθία και P ένα προβολικό Λ-module, τότε κάθε ομομορφισμός $\gamma : P \to C$ δίνει ένα ομομορφισμό $\beta : P \to B$, ώστε $\varepsilon\beta = \gamma$, δηλαδή ο ομομορφισμός

$\varepsilon_* : Hom_\Lambda(P, B) \to Hom_\Lambda(P, C)$ είναι επί κι έτσι καταλήγουμε, με τη χρήση του θεωρήματος (1.3.1), στο ότι η επόμενη ακολουθία είναι ακριβής:

$$0 \longrightarrow Hom_\Lambda(P, A) \xrightarrow{\mu_*} Hom_\Lambda(P, B) \xrightarrow{\varepsilon_*} Hom_\Lambda(P, C) \longrightarrow 0.$$

Αντιστρόφως, η ακρίβεια της πιο πάνω ακολουθίας των Hom, για κάθε βραχεία, ακριβή ακολουθία $A \overset{\mu}{\rightarrowtail} B \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} C$, συνεπάγεται ότι το P είναι προβολικό Λ-module, αφού ο ε_* ως επιμορφισμός, για κάθε $\gamma \in Hom_\Lambda(P, C)$, μας δίνει έναν ομομορφισμό $\beta \in Hom_\Lambda(P, B)$ ώστε $\varepsilon_*(\beta) = \gamma$ δηλαδή $\varepsilon\beta = \gamma$. $\diamondsuit$

Παραθέτουμε και κάποιες βασικές προτάσεις για τα προβολικά modules.

1.5.8 Πρόταση. *Το ευθύ άθροισμα $\bigoplus_{i \in I} P_i$ είναι προβολικό, αν και μόνο αν κάθε P_i είναι προβολικό.*

1.5.9 Θεώρημα. *Για ένα Λ-module P, οι ακόλουθες ιδιότητες είναι ισοδύναμες:*

1. *Το P είναι προβολικό.*
2. *Για κάθε βραχεία, ακριβή ακολουθία $A \overset{\mu}{\rightarrowtail} B \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} C$ από Λ-modules, η επαγόμενη ακολουθία είναι ακριβής:*

$$0 \longrightarrow Hom_\Lambda(P, A) \xrightarrow{\mu_*} Hom_\Lambda(P, B) \xrightarrow{\varepsilon_*} Hom_\Lambda(P, C) \longrightarrow 0.$$

3. *Κάθε βραχεία, ακριβής ακολουθία $A \overset{\mu}{\rightarrowtail} B \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} P$ διασπάται.*
4. *Αν $\varepsilon : B \twoheadrightarrow P$ είναι επί, τότε υπάρχει ένας ομομορφισμός $\beta : P \to B$, ώστε $\varepsilon\beta = 1_P$.*
5. *Το P είναι ευθύς προσθετέος σε κάθε module του οποίου είναι πηλίκο.*
6. *Υπάρχει ένα Λ-module M ώστε το $P \oplus M$ να είναι ελεύθερο, με άλλα λόγια, το P είναι ευθύς προσθετέος σ' ένα ελεύθερο module.*

Δυϊκή έννοια αυτής του προβολικού module είναι το ενριπτικό module. (Πρακτικά, παίρνουμε δυϊκή σχέση, αλλάζοντας τη φορά των ομομορφισμών.)

1.5.10 Ορισμός. Ένα Λ-module I ονομάζεται **ενριπτικό**, αν για κάθε ομομορφισμό $\alpha : A \to I$ και κάθε μονομορφισμό $\mu : A \rightarrowtail B$, υπάρχει ένας ομομορφισμός $\beta : B \to I$, τέτοιος ώστε $\beta\mu = \alpha$. Ισοδύναμα, για οποιουσδήποτε ομομορφισμούς α, μ με τον μ: 1-1, υπάρχει ο ομομορφισμός β, ώστε το ακόλουθο τρίγωνο να είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "\mu"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[dl, dotted, "\beta"] \\ I & \end{tikzcd}$$

Επειδή το δυϊκό του ευθέως αθροίσματος, στην κατηγορία των modules, είναι το ευθύ γινόμενο, εκφράζουμε τη δυϊκή της πρότασης (1.5.8).

1.5.11 Πρόταση. *Το ευθύ γινόμενο από modules $\prod_{j \in J} I_j$ είναι ενριπτικό, αν και μόνο αν κάθε I_j είναι ενριπτικό.*

Β. ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ - ΣΥΝΑΡΤΗΤΕΣ

1.6 Οι έννοιες κατηγοριών και συναρτητών

Ύστερα από τα προηγούμενα, σ' αυτή την παράγραφο εισάγουμε την έννοια της κατηγορίας, για να δώσουμε μια γενική περιγραφή μαθηματικών συστημάτων διαφόρων αντικειμένων, όπως π.χ. ομάδων, δακτυλίων, modules, κλπ., αλλά και απεικονίσεων μεταξύ αυτών των αντικειμένων, θέτοντας μια κατάλληλη μαθηματική γλώσσα και γενική ορολογία για όλα αυτά τα συστήματα.

1.6.1 Ορισμός. Μια κατηγορία $\mathcal{C}$ συνίσταται από τα εξής δεδομένα:

► i) μια συλλογή αντικειμένων $A, B, C, \ldots \in Ob(\mathcal{C})$
► ii) για κάθε δύο αντικείμενα $A, B \in Ob(\mathcal{C})$, ένα σύνολο $\mathcal{C}(A, B)$ των *μορφισμών* από το A στο B και
► iii) για κάθε τρία αντικείμενα $A, B, C \in Ob(\mathcal{C})$, ένα κανόνα σύνθεσης, δηλαδή μια απεικόνιση

$$\mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \to \mathcal{C}(A, C)$$

που ικανοποιεί τα αξιώματα:

• $A1$. Τα σύνολα $\mathcal{C}(A_1, B_1)$ και $\mathcal{C}(A_2, B_2)$ δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο, εκτός εάν $A_1 = A_2$ και $B_1 = B_2$.

• $A2$. Για κάθε $A \in Ob(\mathcal{C})$, υπάρχει ένας μορφισμός $1_A \in \mathcal{C}(A, A)$, ο $1_A : A \to A$, που δρα ως αριστερό και δεξί ταυτοτικό στοιχείο στα σύνολα $\mathcal{C}(A, B)$ και $\mathcal{C}(C, A)$, δηλαδή για κάθε $f : A \to B$ και $g : C \to A$, όπου $B, C \in Ob(\mathcal{C})$, είναι

$$f1_A = f, \quad 1_A g = g$$

• $A3$. Η σύνθεση μορφισμών ακολουθεί τον προσεταιριστικό κανόνα, δηλαδή αν δοθούν οι μορφισμοί $f : A \to B$, $g : B \to C$ και $h : C \to D$, τότε ισχύει

$$h(gf) = (hg)f,$$

για κάθε $A, B, C, D \in Ob(\mathcal{C})$.

<u>**Σημείωση:**</u> Θεωρούμε το μορφισμό $f : A \to B$ ως μία «γενικευμένη περίπτωση συνάρτησης» από το A στο B. Το σύνολο $\mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C)$ αποτελείται από ζεύγη (f, g), με $f : A \to B$, $g : B \to C$ και γράφουμε τη σύνθεση των μορφισμών f, g ως $g \circ f$, ή απλά gf, όπου $(gf)(a) = g(f(a)), \quad a \in A$.

Παραδείγματα κατηγοριών :

♦ **(α)** Η κατηγορία $\mathfrak{S}$ των συνόλων και συναρτήσεων.

♦ **(β)** Η κατηγορία $\mathfrak{G}$ των ομάδων και ομομορφισμών μεταξύ τους.

♦ **(γ)** Η κατηγορία $\mathfrak{Ab}$ των αβελιανών ομάδων και ομομορφισμών μεταξύ τους.

♦ **(δ)** Η κατηγορία $\mathfrak{R}$ των δακτυλίων και ομομορφισμών δακτυλίων.

♦ **(ε)** Οι κατηγορίες $\mathfrak{M}_\Lambda^l$ και $\mathfrak{M}_\Lambda^r$ των αριστερών και δεξιών, αντίστοιχα, Λ-modules και Λ-module ομομορφισμών, όπου $\Lambda \in Ob(\mathfrak{R})$.

♦ **(στ)** Η κατηγορία $\mathfrak{V}_F$ των διανυσματικών χώρων επί του σώματος F και των γραμμικών μετασχηματισμών μεταξύ τους.

Στα παραδείγματα (β), (γ), (ε) και (στ), σε καθεμιά απ' αυτές τις κατηγορίες, υπάρχει ένα αντικείμενο $0 \in Ob(\mathcal{C})$ (μηδενικό αντικείμενο), με την ιδιότητα για κάθε $X \in Ob(\mathcal{C})$, τα σύνολα $\mathcal{C}(X,0)$ και $\mathcal{C}(0,X)$ και τα δύο, ν' απαρτίζονται ακριβώς από ένα στοιχείο. Έτσι, π.χ. στις κατηγορίες $\mathfrak{G}$ και $\mathfrak{Ab}$ μηδενικό αντικείμενο μπορεί να θεωρηθεί το $\{0\}$, δηλαδή η ομάδα που έχει ένα μόνο στοιχείο. Αν μια κατηγορία περιέχει δύο μηδενικά αντικείμενα, τότε αυτά είναι ισόμορφα και ισχύει ότι για κάθε $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$, το σύνολο $\mathcal{C}(X,Y)$ περιέχει ένα ξεχωριστό μορφισμό

$$X \to 0 \to Y$$

τον μηδενικό μορφισμό, που θα σημειώνεται 0_{XY}. Για κάθε $f : A \to X$, $g : Y \to B$, στην κατηγορία $\mathcal{C}$, είναι

$$0_{XY} f = 0_{AY}, \quad g 0_{XY} = 0_{XB}.$$

Αν μια κατηγορία $\mathcal{C}$ περιέχει μηδενικά αντικείμενα, ονομάζεται κατηγορία με μηδενικά αντικείμενα.

Πέρα όμως από τη «διασύνδεση», μέσω των μορφισμών, των διαφορετικών αντικειμένων μιας κατηγορίας, μπορούμε στη γλώσσα των κατηγοριών, μέσω των *συναρτητών*, να «συνδέουμε» διαφορετικές κατηγορίες, μεταφερόμενοι από μία κατηγορία σε άλλη.

1.6.2 Ορισμός. Αν δοθούν, λοιπόν, δύο κατηγορίες $\mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$, ονομάζουμε **συναρτητή** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ τον κανόνα, ο οποίος αντιστοιχίζει κάθε $X \in Ob(\mathcal{C})$, σε ένα αντικείμενο $FX \in Ob(\mathcal{D})$ και ακόμα κάθε μορφισμό $f \in \mathcal{C}(Y, Z)$ σ' ένα μορφισμό $Ff \in \mathcal{D}(FY, FZ)$, που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$F(fg) = (Ff)(Fg), \quad F(1_A) = 1_{FA}$$

όπου $A, X, Y, Z \in Ob(\mathcal{C})$, $g \in \mathcal{C}(X, Y)$, $f \in \mathcal{C}(Y, Z)$ και σχηματικά:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "fg"] & & \rightsquigarrow & FX \arrow[d, "Fg"'] \arrow[dr, "F(fg)"] & \\ Y \arrow[r, "f"'] & Z & \overset{F}{\rightsquigarrow} & FY \arrow[r, "Ff"'] & FZ \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "1_A"'] & \rightsquigarrow & FA \arrow[d, "1_{FA}"'] \\ A & \overset{F}{\rightsquigarrow} & FA \end{tikzcd}$$

Παρατηρούμε ότι ένας συναρτητής μεταφέρει διασπαστικούς σε διασπαστικούς μορφισμούς και ισομορφισμούς σε ισομορφισμούς αφού, αν $g : A \to B, f : B \to A$, $f \circ g = 1_A \Longrightarrow F(f) \circ F(g) = F(f \circ g) = F(1_A) = 1_{FA}$.

♦ Ένα παράδειγμα συναρτητή μπορούμε να δώσουμε, αν στο σύνολο $Hom_\Lambda(A, B) = \mathfrak{M}^l_\Lambda(A, B)$ κρατήσουμε σταθερό το σύνολο A και μεταβάλλουμε το B, ορίζοντας το συναρτητή $\mathfrak{M}^l_\Lambda(A, -) : \mathfrak{M}^l_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ με τύπο

$$\mathfrak{M}^l_\Lambda(A, -)(B) = \mathfrak{M}^l_\Lambda(A, B).$$

Ανάλογα με το παράδειγμα του συναρτητή $\mathfrak{M}^l_\Lambda(A, -)$, που δώσαμε, αν θελήσουμε να κατασκευάσουμε τον $F = \mathfrak{M}^l_\Lambda(-, B) : \mathfrak{M}^l_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$, παρατηρούμε ότι για $f : B \to A$, είναι $Ff : FA \to FB$, δηλαδή «αντιστρέφονται τα βέλη» των συναρτήσεων. Δημιουργείται, έτσι, η ανάγκη να επεκτείνουμε τους ορισμούς και σε επίπεδο κατηγοριών και σε συναρτητές.

Αν δοθεί, λοιπόν, μία κατηγορία $\mathcal{C}$, μπορούμε να σχηματίσουμε μια νέα κατηγορία, την $\mathcal{C}^{op}$, η οποία έχει τα ίδια αντικείμενα με τη $\mathcal{C}$, αλλά ισχύει

$$\mathcal{C}^{op}(X, Y) = \mathcal{C}(Y, X).$$

Οι δύο κατηγορίες $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}^{op}$ έχουν, προφανώς, τους ίδιους ταυτοτικούς μορφισμούς και ακόμη, αν μια απ' αυτές έχει μηδενικά στοιχεία, τότε τα ίδια ακριβώς έχει και η άλλη. Ακόμα ισχύει:

$$(\mathcal{C}^{op})^{op} = \mathcal{C}.$$

1.6.3 Ορισμός. **Ανταλλοίωτος συναρτητής** από μια κατηγορία $\mathcal{C}$ προς μια κατηγορία $\mathcal{D}$, είναι ένας συναρτητής από την $\mathcal{C}^{op}$ προς την $\mathcal{D}$. Αν δηλαδή $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ένας ανταλλοίωτος συναρτητής, αυτός αντιστοιχίζει το σύνολο $\mathcal{C}(X, Y)$ στο $\mathcal{D}(FY, FX)$ και για τη σύνθεση συναρτήσεων ισχύει
$F(fg) = (Fg)(Ff)$. Ένας απλός συναρτητής, συνήθως, αναφέρεται ως **συναλλοίωτος συναρτητής**.

♦ Ο $\mathfrak{M}^l_\Lambda(-, B) : \mathfrak{M}^l_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ καθώς και ο $\mathfrak{M}^r_\Lambda(-, B) : \mathfrak{M}^r_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ είναι δύο παραδείγματα ανταλλοίωτων συναρτητών.

Η κατασκευή της κατηγορίας $\mathcal{C}^{op}$ μας δίνει τη δυνατότητα να παρουσιάζουμε τη **δυϊκότητα** μεταξύ δύο εννοιών, π.χ. όπως εδώ, μεταξύ συναλλοίωτου και ανταλλοίωτου συναρτητή.

Γενικά, οι δυϊκές έννοιες στις κατηγορίες απαντώνται συχνά και η αλληλεξάρτησή τους βοηθά στην κατανόηση και στην απόδειξη αντίστοιχων προτάσεων που τις αφορούν. Ως χαρακτηριστικά παραδείγματα δυϊκών, αναφέρουμε τους ορισμούς του επιμορφισμού και μονομορφισμού, καθώς και αυτούς του πυρήνα και συν-πυρήνα ενός μορφισμού.

1.6.4 Ορισμός. Σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$:
► ένας μορφισμός $\varepsilon : B \to C$ είναι **επιμορφισμός**, αν και μόνο αν για οποιουσδήποτε δύο μορφισμούς $\alpha_i : C \to M$, $i = 1, 2$, όπου $B, C, M \in Ob(\mathcal{C})$, ισχύει: $\alpha_1\varepsilon = \alpha_2\varepsilon \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$.
► ένας μορφισμός $\mu : A \to B$ είναι **μονομορφισμός**, αν και μόνο αν για οποιουσδήποτε μορφισμούς $\alpha_i : M \to A$, $i = 1, 2$, όπου $A, B, M \in Ob(\mathcal{C})$, ισχύει: $\mu\alpha_1 = \mu\alpha_2 \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$.

1.6.5 Πρόταση. • *Ο $\varepsilon : B \to C$ είναι module-επιμορφισμός, αν και μόνο αν είναι ένας επί module-ομομορφισμός.*
• *Ο $\mu : A \to B$ είναι module-μονομορφισμός, αν και μόνο αν είναι ένας 1-1 module-ομομορφισμός.*

Σημείωση: Ένας μορφισμός ϕ είναι μονομορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$, αν και μόνο αν ο ϕ είναι επιμορφισμός στην $\mathcal{C}^{op}$.

Γενικά, αν έχουμε δύο δυϊκές έννοιες τις β και β^{op}, τότε για κάθε κατηγορία $\mathcal{C}$ ισχύει (ο συμβολισμός $\beta(\mathcal{C})$ δηλώνει την τυχαία έννοια β, που απαντάται στην κατηγορία $\mathcal{C}$):

$$\beta^{op}(\mathcal{C}) = \beta(\mathcal{C}^{op}).$$

1.6.6 Ορισμός. Έστω ένας μορφισμός $\phi : A \to B$, σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$ με μηδενικούς μορφισμούς. Ορίζουμε ως:
► **πυρήνα του μορφισμού** ϕ, το μορφισμό $\mu : K \to A$, $K \in Ob(\mathcal{C})$, που είναι τέτοιος ώστε (i) $\phi\mu = 0$ και (ii) αν $\phi\psi = 0$, τότε $\psi = \mu\psi'$, με τον ψ' μοναδικό.
► **συνπυρήνα του μορφισμού** ϕ, το μορφισμό $\varepsilon : B \to \Lambda$, $\Lambda \in Ob(\mathcal{C})$, που είναι τέτοιος ώστε (i) $\varepsilon\phi = 0$ και (ii) αν $\theta\phi = 0$, τότε $\theta = \theta'\varepsilon$, με τον θ' μοναδικό.

Σημείωση: ▲ Ο πυρήνας μορφισμού, αν υπάρχει, είναι πάντα μονομορφισμός και ο συν-πυρήνας του, αν υπάρχει, πάντα επιμορφισμός.
▼ Ο συν-πυρήνας του μορφισμού ϕ, στην κατηγορία $\mathcal{C}$, είναι ο μορφισμός που είναι πυρήνας του $\phi^{op} = \phi^{-1}$, στην $\mathcal{C}^{op}$.

Τέλος, κλείνουμε την παράγραφο με τη *συσχέτιση μεταξύ συναρτητών, που επιτυγχάνεται μέσω φυσικών μετασχηματισμών.*

1.6.7 Ορισμός. ► Αν $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ δύο συναρτητές από την κατηγορία $\mathcal{C}$ στην $\mathcal{D}$ κατηγορία, **φυσικός μετασχηματισμός τ** : $F \to G$ από τον F στον G, ονομάζεται ένας κανόνας, που αντιστοιχίζει σε κάθε αντικείμενο $X \in Ob(\mathcal{C})$ ένα μορφισμό $t_X \in \mathcal{D}(FX, GX)$, τέτοιον ώστε, για κάθε μορφισμό $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, $Y \in Ob(\mathcal{C})$, το ακόλουθο διάγραμμα ν΄ αντιμετατίθεται:

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "t_X"] \arrow[d, "Ff"'] & GX \arrow[d, "Ff"] \\ FY \arrow[r, "t_Y"] & GY \end{tikzcd}$$

► Αν t_X : ισομορφισμός, $\forall X \in Ob(\mathcal{C})$, τότε ο t ονομάζεται **φυσική ισοδυναμία μεταξύ των F και** G και γράφουμε $t : F \simeq G$. Σ΄ αυτή την περίπτωση ισχύει και $t^{-1} : G \simeq F$, όπου ο φυσικός μετασχηματισμός t^{-1} δίνεται από τον τύπο: $(t^{-1})_X = (t_X)^{-1}$. Ακόμα για δύο φυσικούς μετασχηματισμούς $t : F \to G$ και $u : G \to H$, ορίζεται η σύνθεση $ut : F \to H$ από τη σχέση: $(ut)_X = (u_X)(t_X)$, που ακολουθεί τον προσεταιριστικό κανόνα.
► Τέλος, αν υπάρχουν δύο συναρτητές $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, ώστε $GF \simeq I : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ και $FG \simeq I : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ (όπου I : ο ταυτοτικός συναρτητής για κάθε κατηγορία), τότε λέμε ότι οι $\mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$ είναι **ισοδύναμες κατηγορίες**.

♦ **Παράδειγμα φυσικού μετασχηματισμού:**

Αν V είναι διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος F,
$V^* = Hom(V, F)$ ο δυϊκός διανυσματικός χώρος του V και

$V^{**} = Hom(V^*, F) = Hom(Hom(V, F), F)$ ο δυϊκός του δυϊκού του V, υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση $i_V : V \rightarrow V^{**}$, που δίνεται απ΄ τη σχέση $\upsilon \mapsto \widetilde{\upsilon}$, όπου $\widetilde{\upsilon}(\phi) = \phi(\upsilon), \upsilon \in V, \phi \in V^*, \widetilde{\upsilon} \in V^{**}$. Τότε ο i είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός από τον ταυτοτικό συναρτητή $I : \mathfrak{B}_F \rightarrow \mathfrak{B}_F$ στο διπλά δυϊκό συναρτητή $^{**} : \mathfrak{B}_F \rightarrow \mathfrak{B}_F$. Αν τώρα, συμβολίσουμε $\mathfrak{B}_F^f$ την υπο-κατηγορία της $\mathfrak{B}_F$, που αποτελείται απ΄ τους διανυσματικούς χώρους πεπερασμένης διάστασης, τότε ο περιορισμός του φυσικού μετασχηματισμού i στην $\mathfrak{B}_F^f$ είναι, σύμφωνα με βασικό θεώρημα της γραμμικής άλγεβρας, μια *φυσική ισοδυναμία*, δηλαδή κατά το θεώρημα: $\forall V \in Ob(\mathfrak{B}_F^f)$, ο i_V είναι ισομορφισμός.

Σημείωση: Δύο ισόμορφες κατηγορίες είναι και ισοδύναμες, αλλά οι ισοδύναμες δεν είναι πάντα ισόμορφες.

1.7 Καθολικές κατασκευές σε κατηγορίες

■ i) ΓΙΝΟΜΕΝΑ ΚΑΙ ΣΥΝ-ΓΙΝΟΜΕΝΑ

Η καθολική ιδιότητα του ευθέως γινομένου των Λ-modules είναι το σημείο στο οποίο στηριζόμαστε για να εισάγουμε την έννοια του γινομένου, σε μια κατηγορία, γενικά.

1.7.1 Ορισμός. Αν $\{X_i\}, i \in I$, είναι μια οικογένεια αντικειμένων μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$, με δείκτες από το σύνολο I, τότε το **γινόμενο** $(X; p_i)$ **των αντικειμένων** X_i είναι ένα αντικείμενο $X = \prod_i X_i$, μαζί με τους μορφισμούς $p_i : X \rightarrow X_i$, που ονομάζονται *προβολές*, με την εξής καθολική ιδιότητα: αν δοθεί οποιοδήποτε αντικείμενο Y και μορφισμοί $f_i : Y \rightarrow X_i$, υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός $f = \{f_i\} : Y \rightarrow X$, ώστε $p_i f = f_i$. Δηλαδή τα παρακάτω τρίγωνα είναι αντιμεταθετικά, για κάθε $i \in I$:

$$\begin{tikzcd} & X_i \\ Y \arrow[ur, "f_i"] \arrow[r, dotted, "\exists!\, f"'] & X = \prod_{i \in I} X_i \arrow[u, "p_i"'] \end{tikzcd}$$

Σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$ το γινόμενο μιας οικογένειας αντικειμένων δεν υπάρχει πάντοτε όμως, σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα, αν υπάρχει, είναι μοναδικό μέχρις ισομορφισμού.

1.7.2 Θεώρημα. *Αν $(X; p_i)$ και $(X'; p'_i)$ είναι και τα δύο γινόμενα της οικογένειας $X_i, i \in I$, αντικειμένων μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$, τότε υπάρχει ένας μοναδικός ισομορφισμός $\xi : X \to X'$, ώστε $p'_i\xi = p_i, i \in I$.*

Απόδειξη: Λόγω της καθολικής ιδιότητας του X, υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός $\eta : X \to X'$, ώστε $p_i\eta = p'_i$. Παρόμοια, από την καθολικότητα του X', προκύπτει ο μοναδικός μορφισμός $\xi : X \to X'$, ώστε $p'_i\xi = p_i$. Άρα $p_i\eta\xi = p'_i\xi = p_i = p_i 1$, για κάθε $i \in I$. Όμως, από τη μοναδικότητα του μορφισμού, που αναφέρει η καθολική ιδιότητα του γινομένου, έπεται ότι $\eta\xi = 1$. Παρόμοια παίρνουμε και $\xi\eta = 1$. $\quad\Diamond$

1.7.3 Πρόταση. *Αν δοθούν δύο οικογένειες $\{X_i\}$,$\{Y_i\}$ αντικειμένων της κατηγορίας $\mathcal{C}$, με δείκτες από το ίδιο σύνολο I, τότε, αν υπάρχουν τα γινόμενα $\prod_i X_i$ και $\prod_i Y_i$ και οι μορφισμοί $f_i : X_i \to Y_i, i \in I$, υπάρχει ένας μοναδικά ορισμένος μορφισμός*

$$\prod_i f_i : \prod_i X_i \to \prod_i Y_i, \text{ ώστε } p_i(\prod_i f_i) = f_i p_i.$$

Επιπλέον, αν η κατηγορία $\mathcal{C}$ δέχεται γινόμενα για όλες τις οικογένειες με δείκτες από το I, τότε ο $\prod_i$ είναι ένας συναρτητής $\prod_i : \mathcal{C}^{\mathcal{I}} \to \mathcal{C}$.

1.7.4 Πρόταση. *Αν σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$ οποιαδήποτε δύο αντικείμενα δέχονται ένα γινόμενο, τότε και για τα τυχαία τρία αντικείμενα $X, Y, Z \in Ob(\mathcal{C})$, το $((X \times Y) \times Z; p_1q_1, p_2q_1, q_2)$ είναι το γινόμενο των X, Y, Z, όπου*

$$p_1 : X \times Y \to X,\ q_1 : (X \times Y) \times Z \to X \times Y$$
$$p_2 : X \times Y \to Y,\ q_2 : (X \times Y) \times Z \to Z.$$

Επαγωγικά, οδηγούμαστε στην επόμενη πρόταση:

1.7.5 Πρόταση. *Αν δύο τυχαία αντικείμενα σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$ δέχονται ένα γινόμενο, τότε το ίδιο ισχύει για οποιαδήποτε πεπερασμένη οικογένεια αντικειμένων της $\mathcal{C}$.*

Η πρόταση (1.7.4) μας εξασφαλίζει, επίσης, την *προσεταιριστικότητα του γινομένου*. Δηλαδή ισχύουν οι κανονικές ισοδυναμίες:

$$(X \times Y) \times Z \cong X \times Y \times Z \cong X \times (Y \times Z).$$

Το ότι *το γινόμενο είναι αντιμεταθετικό*, εξασφαλίζεται από τη συμμετρικότητα του ορισμού του $X \times Y$ ως προς τα X και Y.

Παραδείγματα:

♦ (α) Στην κατηγορία $\mathfrak{M}^l_\Lambda$ των (αριστερών) Λ-modules, παράδειγμα γινομένου των X_i είναι, όπως ήδη αναφέρθηκε, το ευθύ τους γινόμενο, ενώ

♦ (β) στην κατηγορία των συνόλων και συναρτήσεων $\mathfrak{S}$ έχουμε το καρτεσιανό γινόμενο των X_i.

♦ (γ) Στην κατηγορία $\mathfrak{S}(2)$ των συνόλων με δύο στοιχεία, οποιαδήποτε δύο αντικείμενα δεν έχουν γινόμενο. Διότι, αν $B = \{b_1, b_2\}, C = \{c_1, c_2\}$ δύο αντικείμενα της $\mathfrak{S}(2)$ και έστω $(D; p_1, p_2)$,$D = \{d_1, d_2\}$ το γινόμενο των B και C, τότε για τυχαίο $A = \{a_1, a_2\}$ και $f : A \to B, g : A \to C$, υπάρχει μοναδικός $h : A \to D$ με $p_1h = f, p_2h = g$. Επειδή ο f μπορεί να είναι επί, πρέπει και ο p_1 να είναι επί, όπως και ο p_2. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω $p_1(d_i) = b_i$ και $p_2(d_i) = c_i, i = 1, 2$. Αν $F(A) = \{b_1\}, g(A) = \{c_2\}$, καταλήγουμε σε άτοπο, αφού ο h θα έπρεπε να μην έχει στην εικόνα του imh ούτε το d_1, ούτε το d_2.

Η δυϊκή έννοια του γινομένου σε μια κατηγορία είναι το συν-γινόμενο:

1.7.6 Ορισμός. Αν $\{X_i\}, i \in I$, είναι μια οικογένεια αντικειμένων μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$, με δείκτες από το σύνολο I, τότε το **συν-γινόμενο** $(X; q_i)$ των αντικειμένων X_i στην $\mathcal{C}$ είναι ένα αντικείμενο $X = \coprod_i X_i$, με τους μορφισμούς $q_i : X_i \to X$, που ονομάζονται *ενρίψεις*, αν και μόνο αν αυτό είναι γινόμενο των X_i στην κατηγορία $\mathcal{C}^{op}$. Αυτό σημαίνει ότι στην $\mathcal{C}$ ισχύει η εξής καθολική ιδιότητα: αν δοθεί οποιοδήποτε αντικείμενο Y και μορφισμοί $f_i : X_i \to Y$, υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός $f =< f_i >: X \to Y$, ώστε $fq_i = f_i$. Δηλαδή τα παρακάτω τρίγωνα είναι αντιμεταθετικά, για κάθε $i \in I$:

$$\begin{tikzcd} & X_i \arrow[dl, "q_i"'] \arrow[d, "f_i"] \\ X = \coprod_{i\in I} X_i \arrow[r, dotted, "\exists! f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Παραδείγματα:

♦ (α) Στην κατηγορία $\mathfrak{M}^l_\Lambda$ των (αριστερών) Λ-modules, συν-γινόμενο των X_i είναι το ευθύ τους άθροισμα $\bigoplus_i X_i$, ενώ

♦ (β) στην κατηγορία των συνόλων και συναρτήσεων $\mathfrak{S}$ το συν-γινόμενο των X_i είναι η διαζευγμένη ένωση $\bigsqcup_i X_i$ των X_i με τις προφανείς ενρίψεις q_i.

■ ii) ΕΦΕΛΚΥΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΞΩΘΗΣΕΙΣ

1.7.7 Ορισμός. Αν σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$ δοθούν δύο μορφισμοί $\phi : A \to X$, $\psi : B \to X$, δηλαδή:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "\phi"] \\ B \arrow[r, "\psi"] & X \end{tikzcd}$$

εφέλκυση (pull-back) του ζεύγους (ϕ, ψ) είναι ένα ζεύγος μορφισμών (α, β), με $\alpha : Y \to A$ και $\beta : Y \to B$, ώστε $\phi\alpha = \psi\beta$, δηλαδή το ακόλουθο τετράγωνο είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "\phi"] \\ B \arrow[r, "\psi"] & X \end{tikzcd}$$

και έχει την εξής καθολική ιδιότητα: Αν δοθούν δύο μορφισμοί $\gamma : Z \to A$, $\delta : Z \to B$, με $\phi\gamma = \psi\delta$, υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός $\zeta : Z \to Y$, ώστε $\gamma = \alpha\zeta$ και $\delta = \beta\zeta$. Δηλαδή τα τρίγωνα του παρακάτω σχήματος είναι αντιμεταθετικά:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, dotted, "\zeta!"] \arrow[drr, "\gamma"] \arrow[ddr, "\delta"'] & & \\ & Y \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "\phi"] \\ & B \arrow[r, "\psi"] & X \end{tikzcd}$$

Όπως και το γινόμενο, έτσι και η εφέλκυση, αν υπάρχει, τότε είναι στοιχειωδώς μοναδική. Δηλαδή αν το ζεύγος (α', β') είναι, επίσης, μια εφέλκυση του (ϕ, ψ), $\alpha' : Y' \to A$, $\beta' : Y' \to B$, τότε υπάρχει μια μοναδική ισοδυναμία $\omega : Y \to Y'$, τέτοια ώστε $\alpha'\omega = \alpha$ και $\beta'\omega = \beta$. Έτσι, γράφουμε $(Y; \alpha, \beta)$ για να δηλώσουμε την εφέλκυση των ϕ και ψ. Λέμε επίσης, ότι το τετράγωνο του παραπάνω σχήματος είναι ένα τετράγωνο εφέλκυσης.

Προχωρούμε στη δυϊκή της έννοιας της εφέλκυσης, που ονομάζεται εξώθηση. Έτσι, στο πιο πάνω τετράγωνο, το ζεύγος (ϕ, ψ) είναι η εξώθηση του (α, β) στην κατηγορία $\mathcal{C}$, αν και μόνο αν αυτό το ίδιο ζεύγος (ϕ, ψ) είναι η εφέλκυση του (α, β) στην $\mathcal{C}^{op}$. Δηλαδή έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

1.7.8 Ορισμός. Αν σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$ δοθούν δύο μορφισμοί $\alpha : Y \to A$, $\beta : Y \to B$:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \\ B & \end{tikzcd}$$

εξώθηση (push-out) του ζεύγους (α, β) είναι ένα ζεύγος μορφισμών (ϕ, ψ), με $\phi : A \to X$ και $\psi : B \to X$, ώστε $\phi\alpha = \psi\beta$, δηλαδή το ακόλουθο τετράγωνο είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "\phi"] \\ B \arrow[r, "\psi"] & X \end{tikzcd}$$

και έχει την εξής καθολική ιδιότητα: Αν δοθούν δύο μορφισμοί $\kappa : A \to H$, $\lambda : B \to H$, με $\kappa\alpha = \lambda\beta$, υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός $\eta : X \to H$, ώστε $\kappa = \eta\phi$ και $\lambda = \eta\psi$. Δηλαδή τα τρίγωνα του παρακάτω σχήματος είναι αντιμεταθετικά:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "\phi"] \arrow[ddr, "\kappa"] & \\ B \arrow[r, "\psi"] \arrow[drr, "\lambda"'] & X \arrow[dr, dotted, "\eta!"] & \\ & & H \end{tikzcd}$$

Εργαζόμενοι στην κατηγορία $\mathcal{C}^{op}$, μπορούμε πάλι να δείξουμε ότι και η εξώθηση, αν υπάρχει, είναι στοιχειωδώς μοναδική. Δηλαδή αν το ζεύγος (ϕ', ψ') είναι, επίσης, μια εξώθηση του (α, β), $\phi' : A \to X'$, $\psi' : B \to X'$, τότε υπάρχει μια μοναδική ισοδυναμία $\theta : X \to X'$, τέτοια ώστε $\theta\phi = \phi'$ και $\theta\psi = \psi'$. Έτσι, γράφουμε $(X; \phi, \psi)$ για να δηλώσουμε την εξώθηση των α και β. Λέμε, επίσης, ότι το τετράγωνο του παραπάνω σχήματος είναι ένα τετράγωνο εξώθησης.

1.8 Αβελιανές κατηγορίες

1.8.1 Ορισμός. Προσθετική κατηγορία είναι μια κατηγορία $\mathfrak{A}$ με μηδενικό αντικείμενο, στην οποία

► (i) κάθε ζεύγος αντικειμένων έχει γινόμενο και

► (ii) τα σύνολα των μορφισμών $\mathfrak{A}(A,B)$ είναι αβελιανές ομάδες, ώστε η σύνθεση $\mathfrak{A}(A,B)\times\mathfrak{A}(B,C)\to\mathfrak{A}(A,C)$ να είναι διγραμμική.

Σημείωση: Έστω μια συνάρτηση $f: A\times B\to G$, A: δεξί Λ-module, B: αριστερό Λ-module και G: αβελιανή ομάδα. Η f καλείται **διγραμμική**, αν:

1. $f(a_1+a_2,b)=f(a_1,b)+f(a_2,b), a_1,a_2\in A, b\in B$
2. $f(a,b_1+b_2)=f(a,b_1)+f(a,b_2), a\in A, b_1,b_2\in B$
3. $f(a\lambda,b)=f(a,\lambda b), a\in A, b\in B, \lambda\in\Lambda$.

Παραδείγματα προσθετικών κατηγοριών:

♦ (α) ► Ένα **βαθμωτό Λ-module $\mathbf{A}$** (βαθμωτό από ακεραίους), είναι μια οικογένεια από Λ-modules $\mathbf{A}=\{A_n\}, n\in\mathbb{Z}$.

► Αν $\mathbf{A},\mathbf{B}$ είναι δύο βαθμωτά Λ-modules, **ένας μορφισμός βαθμωτών modules** $\phi:\mathbf{A}\to\mathbf{B}$, βαθμού k, είναι μία οικογένεια Λ-module ομομορφισμών: $\{\phi_n: A_n\to B_{n+k}\}, n\in\mathbb{Z}$.

Η κατηγορία των βαθμωτών Λ-modules που ορίζεται έτσι, συμβολίζεται $\mathfrak{M}_\Lambda^\mathbb{Z}$. Αν περιοριστούμε σε *μορφισμούς βαθμωτών modules βαθμού* 0, έχουμε μια προσθετική κατηγορία. Διότι:

◄ (i) $\forall\mathbf{A},\mathbf{B}\in Ob(\mathfrak{M}_\Lambda^\mathbb{Z}), \exists\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\{A_n\times B_n\}\in Ob(\mathfrak{M}_\Lambda^\mathbb{Z}), n\in\mathbb{Z}$.

◄ (ii) • Το σύνολο $\mathfrak{M}_\Lambda^\mathbb{Z}(\mathbf{A},\mathbf{B})$ είναι αβελιανή ομάδα, $\forall\mathbf{A},\mathbf{B}\in Ob(\mathfrak{M}_\Lambda^\mathbb{Z})$ (αφού $\forall n\in\mathbb{Z}$, τα $Hom_\Lambda(A_n,B_n)$ είναι αβελιανές ομάδες) και

• η σύνθεση $f:\mathfrak{M}_\Lambda^\mathbb{Z}(\mathbf{A},\mathbf{B})\times\mathfrak{M}_\Lambda^\mathbb{Z}(\mathbf{B},\mathbf{C})\to\mathfrak{M}_\Lambda^\mathbb{Z}(\mathbf{A},\mathbf{C})$ είναι διγραμμική:

$$\phi',\phi\in\mathfrak{M}_\Lambda^\mathbb{Z}(\mathbf{A},\mathbf{B}),\quad \psi',\psi\in\mathfrak{M}_\Lambda^\mathbb{Z}(\mathbf{B},\mathbf{C}) \implies \psi\circ\phi,\psi'\circ\phi,\psi\circ\phi'\in\mathfrak{M}_\Lambda^\mathbb{Z}(\mathbf{A},\mathbf{C})$$

($\forall n\in\mathbb{Z}, \phi'_n,\phi_n$: $A_n\to B_n, \psi'_n,\psi_n$: $B_n\to C_n\Rightarrow\psi_n\phi_n,\psi'_n\phi_n,\psi_n\phi'_n$: $A_n\to C_n$)

και ισχύουν οι ισότητες:

1. $\psi_n \circ (\phi_n + \phi'_n) = \psi_n \circ \phi_n + \psi_n \circ \phi'_n \Rightarrow f(\phi + \phi', \psi) = f(\phi, \psi) + f(\phi', \psi)$

2. $(\psi_n + \psi'_n) \circ \phi_n = \psi_n \circ \phi_n + \psi'_n \circ \phi_n \Rightarrow f(\phi, \psi + \psi') = f(\phi, \psi) + f(\phi, \psi')$

3. $f(\phi\lambda, \psi) = \psi \circ (\phi\lambda) = (\lambda\psi) \circ \phi = f(\phi, \lambda\psi)$ (επειδή $\forall (\lambda, a) \in \Lambda \times A$, $[\psi \circ (\phi\lambda)](a) = \psi[(\phi\lambda)a] = \psi[\phi(a\lambda)] = \psi[\lambda\phi(a)] = \lambda\psi[\phi(a)] = [(\lambda\psi)\phi](a)$, αφού οι ϕ και ψ είναι οικογένειες ομομορφισμών και αυτές οι σχέσεις ισχύουν $\forall (\phi_n, \psi_n), n \in \mathbb{Z}$). $\Diamond$

♦ (β) Μπορούμε ν' αντικαταστήσουμε το βαθμοσύνολο $\mathbb{Z}$, του προηγούμενου παραδείγματος, με κάποιο άλλο σύνολο, π.χ. με το $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Τα modules που προκύπτουν, ονομάζονται **δι-βαθμωτά**. Αν, λοιπόν, $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in Ob(\mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}})$, είναι δι-βαθμωτά modules, ένας μορφισμός $\phi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ δι-βαθμού (k, l), είναι μια οικογένεια module - ομομορφισμών $\{\phi_{n,m} : A_{n,m} \to B_{n+k,m+l}$. Η κατηγορία $\mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ των δι-βαθμωτών Λ-modules, αν περιοριστούμε σε μορφισμούς δι-βαθμού $(0,0)$ είναι προσθετική.

1.8.2 Πρόταση. *Αν $A_1, A_2 \in Ob(\mathfrak{A})$ αντικείμενα της προσθετικής κατηγορίας $\mathfrak{A}$ και $i_1 = \{1, 0\} : A_1 \to A_1 \bigoplus A_2$, $i_2 = \{0, 1\} : A_2 \to A_1 \bigoplus A_2$ μορφισμοί στην $\mathfrak{A}$, τότε το $(A_1 \bigoplus A_2; i_1, i_2)$ είναι ένα συν-γινόμενο των A_1, A_2 στην $\mathfrak{A}$.*

1.8.3 Λήμμα. $i_1 p_1 + i_2 p_2 = 1 : A_1 \bigoplus A_2 \to A_1 \bigoplus A_2$

1.8.4 Πρόταση. *Αν δοθεί* $A \xrightarrow{\{\phi,\psi\}} B \bigoplus C \xrightarrow{<\gamma,\delta>} D$ *, έχουμε* $< \gamma, \delta > \{\phi, \psi\} = \gamma\phi + \delta\psi$.

1.8.5 Πόρισμα. *Η πρόσθεση στο σύνολο $\mathfrak{A}(A, B)$ καθορίζεται από την κατηγορία $\mathfrak{A}$.*

(Διότι αν $\phi_1, \phi_2 : A \to B$, τότε $\phi_1 + \phi_2 =< \phi_1, \phi_2 > \{1, 1\}$).

Σημείωση: Σε μια προσθετική κατηγορία, ένας μονομορφισμός χαρακτηρίζεται από το ότι έχει πυρήνα 0 και ο επιμορφισμός, από το ότι έχει συν-πυρήνα 0.

1.8.6 Πρόταση. *Έστω $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ είναι ένας συναρτητής μεταξύ των προσθετικών κατηγοριών $\mathfrak{A}$ και $\mathfrak{B}$. Οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*
i) *Ο F διατηρεί τα αθροίσματα (δύο αντικειμένων)*
ii) *Ο F διατηρεί τα γινόμενα (δύο αντικειμένων)*
iii) *$\forall A, A' \in Ob(\mathfrak{A})$, ο $F : \mathfrak{A}(A, A') \to \mathfrak{B}(FA, FA')$ είναι ομομορφισμός.*

Απόδειξη: ◀ i) $\Rightarrow$ ii). Αρκεί να δείξουμε ότι $F(<1,0>) =< 1,0 >$ και $F(<0,1>) =< 0,1 >$, δηλαδή ότι $F(0) = 0$. Έστω, λοιπόν, ένα μηδενικό αντικείμενο $0 \in Ob(\mathfrak{A})$. $\forall A \in Ob(\mathfrak{A})$ είναι $A \cong A \bigoplus 0$ θεωρώντας τους 1_A και 0 ως τις κανονικές ενρίψεις, δηλαδή $A \xrightarrow{1_A} A \bigoplus 0 \xleftarrow{0} 0$. Αν, τώρα, $B = F(0)$, τότε $FA \cong FA \bigoplus B$ θεωρώντας τους 1_{FA} και $\beta = F(0)$ ως τις κανονικές ενρίψεις, δηλαδή $FA \xrightarrow{1_{FA}} FA \bigoplus B \xleftarrow{\beta} B = F(0)$. Θεωρούμε τους μορφισμούς $0 : FA \to B$ και $1 : B \to B$. Τότε, βάσει της καθολικότητας του $FA \bigoplus B$, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\theta : FA \to B$, ώστε $\theta 1 = 0, \theta\beta = 1$. Σχηματικά:

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[dr, "1_{FA}"'] \arrow[drr, "0"] & & \\
& FA \cong FA \oplus B \arrow[r, dotted, "\exists!\theta"] & B \\
B \arrow[ur, "\beta"] \arrow[urr, "1"'] & &
\end{tikzcd}$$

Καταλήγουμε έτσι, στο ότι $1 = \theta\beta = (\theta 1)\beta = 0\beta = 0 : B \to B$ άρα $B = 0$.

◀ ii) $\Rightarrow$ i). Προκύπτει από εφαρμογή της δυϊκότητας στην προηγούμενη απόδειξη.

◀ i) $\Rightarrow$ iii). Αν $\phi_1, \phi_2 \in \mathfrak{A}(A, A')$, δηλαδή $\phi_1, \phi_2 : A \to A'$, τότε

$$\phi_1 + \phi_2 =< \phi_1, \phi_2 > \{1, 1\}$$

κι έτσι, αφού ο F διατηρεί τα αθροίσματα και τα γινόμενα, είναι:

$$F(\phi_1 + \phi_2) =< F\phi_1, F\phi_2 > \{1, 1\} \Rightarrow F(\phi_1 + \phi_2) = F\phi_1 + F\phi_2.$$

◀ iii) $\Rightarrow$ ii). Για να δείξουμε ότι ο F διατηρεί τα γινόμενα, θα πρέπει να δείξουμε ότι ο

$$\{Fp_1, Fp_2\} : F(A_1 \bigoplus A_2) \to FA_1 \bigoplus FA_2$$

είναι ισομορφισμός. Εκφράζουμε, λοιπόν, τον αντίστροφό του ως τον

$$F(i_1)p_1 + F(i_2)p_2 : FA_1 \bigoplus FA_2 \to F(A_1 \bigoplus A_2)$$

και αποδεικνύουμε ότι είναι αντίστροφοι:

$$\begin{aligned}\{Fp_1,Fp_2\}(F(i_1)p_1+F(i_2)p_2) &= \{Fp_1,Fp_2\}F(i_1)p_1+\{Fp_1,Fp_2\}F(i_2)p_2\\ &= \{F(p_1i_1),F(p_2i_1)\}p_1+\{F(p_1i_2),F(p_2i_2)\}p_2\\ &= \{1,0\}p_1+\{0,1\}p_2\\ &= i_1p_1+i_2p_2\\ &= 1, \text{ αφού } F(0)=0\end{aligned}$$

και ακόμα

$$\begin{aligned}(F(i_1)p_1+F(i_2)p_2)\{Fp_1,Fp_2\} &= F(i_1)p_1\{Fp_1,Fp_2\}+F(i_2)p_2\{Fp_1,Fp_2\}\\ &= Fi_1Fp_1+Fi_2Fp_2\\ &= F(i_1p_1+i_2p_2)\\ &= F(1)\\ &= 1,\end{aligned}$$

αφού ο F ικανοποιεί την iii). $\Diamond$

1.8.7 Ορισμός. Ένα συναρτητή που ικανοποιεί μια από τις τρείς ισοδύναμες προτάσεις της προηγούμενης πρότασης, τον ονομάζουμε **προσθετικό συναρτητή**.

1.8.8 Ορισμός. **Αβελιανή κατηγορία** είναι μια προσθετική κατηγορία, στην οποία

(i) κάθε μορφισμός έχει ένα πυρήνα κι ένα συν-πυρήνα

(ii) κάθε μονομορφισμός είναι ο πυρήνας του συν-πυρήνα του και κάθε επιμορφισμός είναι ο συν-πυρήνας του πυρήνα του.

(iii) κάθε μορφισμός εκφράζεται ως η σύνθεση ενός επιμορφισμού κι ενός μονομορφισμού.

Σημείωση: Ο ορισμός της αβελιανής κατηγορίας είναι ισοδύναμος με την έκφραση: Μια κατηγορία $\mathfrak{A}$ ονομάζεται αβελιανή, αν και μόνο αν κάθε σύνολο ομομορφισμών $Hom(A,B)$, με $A,B\in Ob(\mathfrak{A})$, έχει δομή αβελιανής ομάδας, ώστε η σύνθεση να είναι επιμεριστική επί της πρόσθεσης. Δηλαδή για το διάγραμμα:

$$A \xrightarrow{f} B \underset{g'}{\overset{g}{\rightrightarrows}} C \xrightarrow{h} D$$

ισχύει

$$h(g+g')f = hgf + hg'f \in Hom(A,D)$$

.

Παραδείγματα: Τα δύο, που αναφέραμε ως παραδείγματα προσθετικών, είναι και αβελιανές κατηγορίες.

Ακόμα, η κατηγορία των πεπερασμένων αβελιανών ομάδων είναι αβελιανή.

Δικαιολογούμε το πρώτο από τα παραδείγματα των προσθετικών κατηγοριών, δηλαδή για την κατηγορία των βαθμωτών Λ-modules $\mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}}$, με μορφισμούς μηδενικού βαθμού μεταξύ τους.

Αν $\mathbf{A} = \{A_n\}$ και $\mathbf{B} = \{B_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$ βαθμωτά Λ-modules και $\phi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ ένας μορφισμός βαθμού 0, δηλαδή $\phi = \{\phi_n : A_n \to B_n, n \in \mathbb{Z}\}$, τότε $\forall n \in \mathbb{Z}$ ισχύει:

◀ (i) • $Ker\phi_n \rightarrowtail^{i_n} A_n \xrightarrow{\phi_n} B_n \implies Ker\phi \rightarrowtail^{\mathbf{i}} \mathbf{A} \xrightarrow{\phi} \mathbf{B}$,
όπου $\mathbf{i} = \{i_n : Ker\phi_n \to A_n\}, n \in \mathbb{Z}$ ο μορφισμός εγκλεισμού.
Ο πυρήνας, λοιπόν, του ϕ είναι ο μορφισμός $\mathbf{i} = \{i_n\}, n \in \mathbb{Z}$.

• $A_n \xrightarrow{\phi_n} B_n \overset{\mu_n}{\twoheadrightarrow} B_n/im\phi_n \implies \mathbf{A} \xrightarrow{\phi} \mathbf{B} \overset{\mu}{\twoheadrightarrow} coker\phi$,
με το μορφισμό $\mu = \{\mu_n\}, n \in \mathbb{Z}$ να είναι ο συν-πυρήνας του ϕ.

◀ (iii) $A_n \overset{\phi_{A_n}}{\twoheadrightarrow} im\phi_n \rightarrowtail^{i_n} B_n \implies \mathbf{A} \overset{\phi_{\mathbf{A}}}{\twoheadrightarrow} im\phi \rightarrowtail^{\mathbf{i}} \mathbf{B}$,
με το μορφισμό $\phi = \mathbf{i} \circ \phi_{\mathbf{A}}$ ως σύνθεση ενός επιμορφισμού και ενός μονομορφισμού.

◀ (ii) Αν, τώρα, ο ϕ είναι μονομορφισμός, τότε από το (i) έχουμε
$\mathbf{A} \rightarrowtail^{\phi} \mathbf{B} \overset{\mu}{\twoheadrightarrow} coker\phi$, δηλαδή ο ϕ είναι πυρήνας του μ, του συν-πυρήνα του. Ενώ αν ο ϕ είναι επιμορφισμός, από τη σχέση στο (i),
$Ker\phi \rightarrowtail^{\mathbf{i}} \mathbf{A} \overset{\phi}{\twoheadrightarrow} \mathbf{B}$, ο ϕ έχει θέση συν-πυρήνα του πυρήνα του, δηλαδή του μορφισμού $\mathbf{i}$. ◊

1.8.9 Πρόταση. *Αν σε μια κατηγορία $\mathfrak{A}$ δοθεί ο μορφισμός $\phi : A \to B$, μπορούμε απ΄ αυτόν, να δημιουργήσουμε την ακολουθία*

$$K \rightarrowtail^{\mu} A \overset{\eta}{\twoheadrightarrow} I \rightarrowtail^{\nu} B \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} C$$

όπου $\phi = \nu\eta$, μ : πυρήνας του ϕ, ε : συν-πυρήνας του ϕ, η : συν-πυρήνας του μ και ν : πυρήνας του ϵ. Επιπλέον, η επίλυση του ϕ ως σύνθετο ενός επιμορφισμού κι ενός μονομορφισμού, είναι στοιχειωδώς μοναδική.

1.8.10 Ορισμός. Σε μια αβελιανή κατηγορία $\mathfrak{A}$

• μια **βραχεία, ακριβής ακολουθία** είναι η ακολουθία:

$$\cdot \rightarrowtail^{\mu} \cdot \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} \cdot$$

στην οποία μ : ο πυρήνας του ε και ε : ο συν-πυρήνας του μ ενώ

- μια **μακρά ακριβής ακολουθία** είναι μια ακολουθία:

$$\cdots \xrightarrow{\phi_n} \cdot \xrightarrow{\phi_{n+1}} \cdots$$

στην οποία $\forall n \in \mathbb{Z}$, είναι $\phi_n = \mu_n \circ \varepsilon_n$, με μ_n: μονομορφισμό, ε_n: επιμορφισμό και ακόμα τον μ_n να είναι ο πυρήνας του ε_{n+1} (και τον ε_{n+1} να είναι ο συν-πυρήνας του μ_n).

Παρατήρηση: Στη μακρά, ακριβή ακολουθία ισχύει $\phi_{n+1} \circ \phi_n = 0$, διότι το διάγραμμά της αναλύεται ως εξής:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \cdot \arrow[rr, "\phi_n"] \arrow[dr, "\varepsilon_n"'] & & \cdot \arrow[rr, "\phi_{n+1}"] \arrow[dr, "\varepsilon_{n+1}"'] & & \cdot \arrow[r] & \cdots \\
& & \cdot \arrow[ur, tail, "\mu_n"'] & & \cdot \arrow[ur, tail, "\mu_{n+1}"'] & &
\end{tikzcd}$$

και επειδή $\varepsilon_{n+1} \circ \mu_n = 0$, άρα
$\phi_{n+1} \circ \phi_n = (\mu_{n+1} \circ \varepsilon_{n+1}) \circ (\mu_n \circ \varepsilon_n) = \mu_{n+1} \circ (\varepsilon_{n+1} \circ \mu_n) \circ \varepsilon_n = 0.$

Κεφάλαιο 2

ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ MODULES

Το πρόβλημα επέκτασης με το οποίο ασχολούμαστε σ' αυτό το κεφάλαιο, αρχικά, μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Αν δοθούν σε μια κατηγορία $\mathfrak{A}$ δύο μορφισμοί $g : B \to A$ και $f : B \to C$, πότε υπάρχει μορφισμός $h : A \to C$, ώστε να αντιμετατίθεται το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[dl, dotted, "h"] \\ C & \end{tikzcd}$$

δηλαδή να ισχύει $h \circ g = f$; Αυτό ονομάζεται πρόβλημα επέκτασης, γιατί στην πράξη, συνήθως, είναι $B \subseteq A$, ο g μορφισμός εγκλεισμού, με $g(x) = x, x \in B$ κι έτσι ο h, αν υπάρχει, είναι επέκταση του f από το B σε όλο το A.

2.1 Επεκτάσεις των modules

Στη θεωρία των modules το πρόβλημα επέκτασης έχει την εξής μορφή:

2.1.1 Ορισμός. Αν δοθούν δύο modules A και B, επί ενός σταθερού δακτυλίου Λ, ποια modules E μπορούν να κατασκευαστούν, ώστε το B να είναι υπο-module του E και το A ένα module-πηλίκο αυτών; Προσπαθούμε, δηλαδή, να θεωρήσουμε όλα τα πιθανά Λ-modules E, που B : υπο-module του E και $E/B \cong A$. Έχουμε, λοιπόν, μια βραχεία, ακριβή ακολουθία

$$B \overset{\kappa}{\rightarrowtail} E \overset{\nu}{\twoheadrightarrow} A,$$

διότι $A \cong E/B \Rightarrow ker\nu = B = im\kappa$. Μια τέτοια ακολουθία, καλείται **επέκταση του** A **δια του** B.

Θα λέμε ότι η επέκταση $B \rightarrowtail E_1 \twoheadrightarrow A$ είναι ισοδύναμη με την επέκταση $B \rightarrowtail E_2 \twoheadrightarrow A$, αν υπάρχει ένας ομομορφισμός $\xi : E_1 \to E_2$, ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, tail, "\kappa_1"] \arrow[d, equal] & E_1 \arrow[r, two heads, "\nu_1"] \arrow[d, squiggly, "\exists\xi"'] & A \arrow[d, equal] \\ B \arrow[r, tail, "\kappa_2"] & E_2 \arrow[r, two heads, "\nu_2"] & A \end{tikzcd}$$

Αυτή η σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας, ως: α) αυτοπαθής (προφανώς) β) συμμετρική, αφού από το λήμμα (1.2.4) ο ξ είναι ισομορφισμός και γ) μεταβατική, διότι αν υπάρχουν $\xi : E_1 \to E_2$ και $\psi : E_2 \to E_3$, ώστε τα αντίστοιχα διαγράμματα να είναι αντιμεταθετικά, τότε ο $\psi \circ \xi : E_1 \to E_3$ κάνει το ολικό διάγραμμα αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, tail, dotted, "\kappa_1"] \arrow[d, equal] & E_1 \arrow[r, two heads, dotted, "\nu_1"] \arrow[d, "\xi"'] \arrow[dd, bend left, dotted, "\psi\circ\xi"] & A \arrow[d, equal] \\ B \arrow[r, tail, dotted, "\kappa_2"'] \arrow[d, equal] & E_2 \arrow[r, two heads, dotted, "\nu_2"'] \arrow[d, "\psi"'] & A \arrow[d, equal] \\ B \arrow[r, tail, dotted, "\kappa_3"] & E_3 \arrow[r, two heads, dotted, "\nu_3"] & A \end{tikzcd}$$

Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας των επεκτάσεων του A δια του B το σημειώνουμε $E(A, B)$ και περιέχει, προφανώς, τουλάχιστον ένα στοιχείο: το Λ-module $A \oplus B$, με τους ομομορφισμούς i_B, π_A και την επέκταση:

$$B \xrightarrow{i_B} A \oplus B \xrightarrow{\pi_A} A \tag{2.1}$$

όπου ο $i_A : A \to A \oplus B$ ικανοποιεί την ισότητα: $\pi_A i_A = 1_A$ ενώ, αντίστοιχα, ο $\pi_B : A \oplus B \to B$ την ισότητα: $\pi_B i_B = 1_B$. Κάθε επέκταση ισοδύναμη της (2.1) λέγεται επέκταση διάσπασης του A δια του B.

Θα προσπαθήσουμε να κάνουμε τον $E(-,-)$ συναρτητή, με το να ορίσουμε τους ομομορφισμούς που επάγει.

2.1.2 Λήμμα. *Το τετράγωνο:*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & A \arrow[d, "\phi"] \\ B \arrow[r, "\psi"'] & Q \end{tikzcd}$$

είναι ένα διάγραμμα εφέλκυσης, αν και μόνο αν η ακολουθία:

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{\{\alpha,\beta\}} A \oplus B \xrightarrow{<\phi,-\psi>} Q$$

είναι ακριβής.

Απόδειξη: Πρέπει ν' αποδείξουμε ότι η καθολική ιδιότητα της εφέλκυσης του (ϕ, ψ) είναι η ίδια με την καθολική ιδιότητα του πυρήνα του $< \phi, -\psi >$. Δύο συναρτήσεις, λοιπόν, $\gamma : Z \to A$ και $\delta : Z \to B$, που κάνουν το επόμενο τετράγωνο αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\delta"'] & A \arrow[d, "\phi"] \\ B \arrow[r, "\psi"'] & X \end{tikzcd}$$

τότε και μόνο τότε εισάγουν μια απεικόνιση $\{\gamma, \delta\} : Z \to A \oplus B$, τέτοια ώστε $< \phi, -\psi > \circ\{\gamma, \delta\} = 0$. Η καθολικότητα του πυρήνα του $< \phi, -\psi >$ συνεπάγεται την ύπαρξη μιας μοναδικής απεικόνισης $\zeta : Z \to Y$, ώστε το ακόλουθο τρίγωνο να είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "\{\alpha,\beta\}"] & A \oplus B \arrow[r, "<\phi,-\psi>"] & X \\ & & Z \arrow[ul, dotted, "!\zeta"] \arrow[u, "\{\gamma,\delta\}"'] & \end{tikzcd}$$

δηλαδή να είναι $\{\alpha, \beta\} \circ \zeta = \{\gamma, \delta\}$. Η ισοδύναμη μ' αυτήν πρόταση, που εκφράζει την καθολική ιδιότητα της εφέλκυσης, ισχυρίζεται την ύπαρξη της μοναδικής απεικόνισης $\zeta : Z \to Y$, ώστε $\alpha \circ \zeta = \gamma$ και $\beta \circ \zeta = \delta$. $\Diamond$

2.1.3 Λήμμα. *Στην κατηγορία των Λ-modules: $\mathfrak{M}_\Lambda$ (και γενικότερα σε μια αβελιανή κατηγορία), αν το τετράγωνο* (1), *του προηγούμενου λήμματος, είναι τετράγωνο εφέλκυσης, τότε:*

(i) *Ο β επάγει τον ισομορφισμό: $Ker\alpha \cong Ker\psi$*

(ii) *Αν ο ψ είναι επιμορφισμός, τότε, ομοίως και ο α είναι επιμορφισμός.*

Απόδειξη: (i) Αν $\kappa \in ker\alpha \Longrightarrow \alpha(\kappa) = 0 \Longrightarrow \psi[\beta(\kappa)] = \phi[\alpha(\kappa)] = 0$

$\Longrightarrow \beta(\kappa) \in ker\psi$ και αντιστρόφως,

αν $\lambda \in ker\psi \Longrightarrow < \phi, -\psi > (0, \lambda) = 0$

$\Longrightarrow (0, \lambda) \in ker < \phi, -\psi >= im\{\alpha, \beta\}$

$\Longrightarrow \exists\kappa' \in ker\alpha, \{\alpha, \beta\}(\kappa') = (0, \lambda)$

$\Longrightarrow \exists\kappa' \in ker\alpha, \beta(\kappa') = \lambda.$ Άρα

$$ker\alpha \cong ker\psi.$$

(ii)Από το λήμμα (2.1.2), έχουμε το παρακάτω αντιμεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rrr, bend left, "\alpha"] \arrow[dr, dotted, twoheadrightarrow, "\{\alpha,\beta\}"] \arrow[ddr, bend right, "\beta"'] & & & \\
& A \oplus B \supseteq im\{\alpha,\beta\} \arrow[rr, "i_{\pi_A}"] \arrow[dr, "i"] \arrow[dd, "i_{\pi_B}"] & & A \arrow[dd, "\phi"] \\
& & A \times B \arrow[ur, "\pi_A"'] \arrow[dl, "\pi_B"'] & \\
& B \arrow[rr, "\psi"'] & & X
\end{tikzcd}$$

και σύμφωνα με αυτό, αν ψ : επιμορφισμός, τότε

$$\begin{aligned}
\forall a \in A, \exists b \in B, \psi(b) = \phi(a) &\Longrightarrow (a,b) \in ker < \phi, -\psi >= im\{\alpha,\beta\} \\
&\Longrightarrow i_{\pi_A}(a,b) = \pi_A i(a,b) = \pi_A(a,b) = a \\
&\Longrightarrow i_{\pi_A} : \text{επιμορφισμός. Άρα}
\end{aligned}$$

$$\alpha : \text{επιμορφισμός.} \qquad \Diamond$$

Το λήμμα στη συνέχεια, είναι εν μέρει, αντίστροφο του λήμματος (2.1.3).

2.1.4 Λήμμα. *Αν το ακόλουθο διάγραμμα, με ακριβείς σειρές, είναι αντιμεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, rightarrowtail, "\kappa'"] \arrow[d, equal] & E' \arrow[r, twoheadrightarrow, "\nu'"] \arrow[d, "\xi"'] & A' \arrow[d, "\alpha"'] \\
B \arrow[r, rightarrowtail, "\kappa"] & E \arrow[r, twoheadrightarrow, "\nu"] & A
\end{tikzcd}$$

τότε το δεξί τετράγωνο είναι τετράγωνο εφέλκυσης.

Απόδειξη: Αν

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\phi"'] & A' \arrow[d, "\alpha"] \\
E \arrow[r, twoheadrightarrow, "\nu"] & A
\end{tikzcd}$$

είναι ένα τετράγωνο εφέλκυσης, τότε από το λήμμα (2.1.3), επειδή ν : επιμορφισμός, άρα και ο ε : επιμορφισμός και ο ϕ μας δίνει τον ισομορφισμό: $Ker\varepsilon \cong Ker\nu \cong B$. Έτσι, έχουμε την επέκταση:

$$B \overset{\mu}{\rightarrowtail} P \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} A'.$$

και το αντιμεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς σειρές:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, tail, "\mu"] \arrow[d, equal] & P \arrow[r, two heads, "\varepsilon"] \arrow[d, "\phi"'] & A' \arrow[d, "\alpha"'] \\
B \arrow[r, tail, "\kappa"] & E \arrow[r, two heads, "\nu"] & A
\end{tikzcd}$$

Εξαιτίας, λοιπόν, της καθολικότητας της εφέλκυσης $(P; \varepsilon, \phi)$, υπάρχει η απεικόνιση $\zeta : E' \to P$, ώστε $\phi\zeta = \xi$ και $\varepsilon\zeta = \nu'$, δηλαδή τα τρίγωνα του διαγράμματος που ακολουθεί, να είναι αντιμεταθετικά:

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[drr, "\nu'", bend left=10] \arrow[dr, dotted, "\zeta!"] \arrow[ddr, "\xi"'] & & \\
& P \arrow[r, two heads, "\varepsilon"'] \arrow[d, "\phi"'] & A' \arrow[d, "\alpha"] \\
& E \arrow[r, two heads, "\nu"] & A
\end{tikzcd}$$

Επειδή, τώρα, $\xi\kappa' = \kappa \Rightarrow (\phi\zeta)\kappa' = \phi\mu \Rightarrow \phi(\zeta\kappa') = \phi\mu$ και ο ϕ, από το λήμμα (2.1.3), επάγει τον ισομορφισμό, που προαναφέραμε, άρα $\zeta\kappa' = \mu$ κι έτσι, το ακόλουθο διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό, με τις $1_{A'}$ και 1_B: ταυτοτικές, άρα ισομορφισμούς.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, tail, "\kappa'"] \arrow[d, equal, "1_B"'] & E' \arrow[r, two heads, "\nu'"] \arrow[d, "\zeta"'] \arrow[ddr, dotted, "\xi"] & A' \arrow[d, equal, "1_{A'}"'] \arrow[ddr, dotted, "\alpha"] & \\
B \arrow[r, tail, "\mu"'] \arrow[dr, equal] & P \arrow[r, two heads, "\varepsilon"'] \arrow[dr, dotted, "\phi"] & A' \arrow[dr, dotted, "\alpha"] & \\
& B \arrow[r, tail, dotted, "\kappa"'] & E \arrow[r, two heads, dotted, "\nu"'] & A
\end{tikzcd}$$

Βάσει, λοιπόν, του λήμματος (1.2.4), ο ζ είναι επίσης ισομορφισμός, με $E' \cong P$, δηλαδή $(E'; \nu', \xi)$: εφέλκυση του ζεύγους (α, ν). $\Diamond$

Προσπαθώντας να δώσουμε το συναρτητή $E(-, B)$, παίρνουμε τον ομομορφισμό $\alpha : A' \to A$ και την επέκταση $B \rightarrowtail^{\kappa} E \xrightarrow{\nu} A$, ως αντιπρόσωπο ενός στοιχείου (κλάσης ισοδυναμίας) του $E(A, B)$. Θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
& E^{\alpha} \arrow[r, dotted, "\nu'"] \arrow[d, dotted, "\xi"'] & A' \arrow[d, "\alpha"] \\
B \arrow[ur, squiggly, "\kappa'"] \arrow[r, tail, "\kappa"] & E \arrow[r, two heads, "\nu"] & A
\end{tikzcd}$$

όπου η τριάδα $(E^{\alpha}; \nu', \xi)$ είναι η εφέλκυση του ζεύγους (α, ν). Λόγω του λήμματος (2.1.2), παίρνουμε μια επέκταση $B \xrightarrow{\kappa'} E^{\alpha} \xrightarrow{\nu'} A'$ κι αυτό διότι από το λήμμα (2.1.3), ο ν' είναι επιμορφισμός (αφού είναι ο ν) και ο $\kappa' : B \to E^{\alpha}$

είναι μονομορφισμός, επειδή μέσω του ξ, $ker\nu' \cong ker\nu = im\kappa = B$. Έτσι, $\forall b \in B, \exists! e \in Ker\nu' \subseteq E^\alpha$, ώστε $\xi(e) = \kappa(b)$. Άρα ορίζουμε τον ομομορφισμό $\kappa' : B \rightarrowtail E^\alpha, \kappa'(b) = e$, που είναι 1-1, καθώς κ : 1-1 και $Ker\nu' \cong Ker\nu$. Κατ' αυτό τον τρόπο, προκύπτει η συνάρτηση

$$\alpha^* : E(A, B) \to E(A', B),$$

που αντιστοιχίζει στην κλάση του $B \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A$ της $E(A, B)$, την κλάση του $B \rightarrowtail E^\alpha \twoheadrightarrow A'$ της $E(A', B)$. Ισχυριζόμαστε ότι αυτός ο ορισμός του $E(\alpha, B) = \alpha^*$, που είναι ανεξάρτητος του αντιπροσώπου $B \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A$, κάνει τον $E(-, B)$ έναν ανταλλοίωτο συναρτητή.

Κι αυτό, διότι αντιστοιχίζει κάθε Λ-module $A \in Ob(\mathfrak{M}_\Lambda)$, στο σύνολο των κλάσεων των επεκτάσεων του A δια του B, το $E(A, B)$ και ακόμα κάθε μορφισμό $\alpha \in \mathfrak{M}_\Lambda(A', A)$ σ' ένα μορφισμό $\alpha^* = E(\alpha, B) \in \mathfrak{S}(E(A, B), E(A', B))$, που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$(fg)^* = g^* f^*, \quad (1_A)^* = 1_{E(A,B)}$$

Παρομοίως, αν $\beta : B \to B'$ ένας ομομορφισμός, και $B \overset{\kappa}{\rightarrowtail} E \overset{\nu}{\twoheadrightarrow} A$, ένας αντιπρόσωπος ενός στοιχείου του $E(A, B)$, θεωρούμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, tail, "\kappa"] \arrow[d, "\beta"] & E \arrow[r, two heads, "\nu"] \arrow[d, dotted, "\xi"] & A \\
B' \arrow[r, dotted, "\kappa'"] & E_\beta \arrow[ur, squiggly, two heads, "\nu'"'] &
\end{tikzcd}$$

όπου η τριάδα $(E_\beta; \kappa', \xi)$ είναι η εξώθηση του ζεύγους (β, κ). Λόγω του δυϊκού του λήμματος (2.1.3), παίρνουμε μια επέκταση $B' \overset{\kappa'}{\rightarrowtail} E_\beta \overset{\nu'}{\twoheadrightarrow} A$ κι έχουμε τη συνάρτηση

$$\beta_* : E(A, B) \to E(A, B'),$$

που αντιστοιχίζει στην κλάση του $B \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A$ του συνόλου $E(A, B)$, την κλάση του $B' \rightarrowtail E_\beta \twoheadrightarrow A$ στο $E(A, B')$. Αυτός ο ορισμός του $E(A, \beta) = \beta_*$, ανεξάρτητος του αντιπροσώπου $B \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A$, κάνει τον $E(A, -)$ ένα συναλλοίωτο συναρτητή. Έτσι, αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα:

2.1.5 Θεώρημα. *Ο $E(-, -)$ είναι ένας δι-συναρτητής από την κατηγορία $\mathfrak{M}_\Lambda$ των Λ-modules στην κατηγορία των συνόλων $\mathfrak{S}$, ο οποίος είναι ανταλλοίωτος στην πρώτη και συναλλοίωτος στη δεύτερη μεταβλητή.*

2.2 Ο συναρτητής Ext

Ορίζουμε τώρα ένα άλλο δι-συναρτητή, τον $Ext_\Lambda(-,-)$ από την κατηγορία $\mathfrak{M}_\Lambda$ στην κατηγορία $\mathfrak{Ab}$, των αβελιανών ομάδων.

2.2.1 Ορισμός. Μια βραχεία, ακριβής ακολουθία

$$R \rightarrowtail^{\mu} P \xrightarrow{\varepsilon} A$$

των Λ-modules R, P, A, με το P προβολικό, ονομάζεται **προβολική παρουσίαση του** A.

Μια τέτοια παρουσίαση, λόγω του θεωρήματος (1.3.2), επάγει, για το τυχαίο Λ-module B, την ακριβή ακολουθία

$$Hom_\Lambda(A,B) \xrightarrow{\varepsilon^*} Hom_\Lambda(P,B) \xrightarrow[\mu^*(\phi)=\phi\mu]{\mu^*} Hom_\Lambda(R,B). \qquad (2.2)$$

Έτσι, θεωρούμε την αβελιανή ομάδα

$$Ext^\varepsilon_\Lambda(A,B) = coker[\mu^* : Hom_\Lambda(P,B) \to Hom_\Lambda(R,B)]$$

δηλαδή την

$$Ext^\varepsilon_\Lambda(A,B) = Hom_\Lambda(R,B) \big/ im\mu^*$$

που την αντιστοιχίζουμε στα modules A, B και στην επιλεγμένη προβολική παρουσίαση του A, όπως δηλώνει και ο υπερ-δείκτης ε.

Ένα στοιχείο του $Ext^\varepsilon_\Lambda(A,B)$ μπορεί ν′ αντιπροσωπευθεί από ένα ομομορφισμό $\phi : R \to B$ και αυτό, θα σημειώνεται $[\phi] \in Ext^\varepsilon_\Lambda(A,B)$. Αν λοιπόν, $[\phi_1], [\phi_2] \in Ext^\varepsilon_\Lambda(A,B)$ έχουμε

$$\begin{aligned}[\phi_1] = [\phi_2] &\iff \phi_1 - \phi_2 \in im\mu^* \\ &\iff \exists\phi \in Hom_\Lambda(P,B), \mu^*(\phi) = \phi_1 - \phi_2 \\ &\iff \exists\phi : P \to B, \phi\mu = \phi_1 - \phi_2.\end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση εκφράζεται με το παρακάτω σχήμα

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, tail, "\mu"] \arrow[d, "\phi_1-\phi_2"'] & P \arrow[dl, dotted, "\exists\phi"] \\ B & \end{tikzcd}$$

και δηλώνει ότι υπάρχει ομομορφισμός $\phi : P \to B$, ώστε ο ομομορφισμός $\phi_1 - \phi_2$ να επεκτείνεται στο P με τον ϕ.

Ένας ομομορφισμός $f : B \to B'$ απεικονίζει την ακολουθία (2.2) στην αντίστοιχη ακολουθία για το B'. Παίρνουμε, λοιπόν, την επαγόμενη απεικόνιση:

$$f_* : Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A, B) \to Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A, B'),$$

όπου, αν $\phi \in Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A, B)$ ($\phi : R \to B$), τότε $f_*(\phi) = f\phi \in Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A, B')$, δηλαδή $f\phi : R \to B'$, σύμφωνα με το σχήμα:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, dotted, "f_*(\phi)=f\phi"'] & B \arrow[d, "f"] \\ & B' \end{tikzcd}$$

κι έτσι ο $Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A, -)$ γίνεται ένας συναρτητής, που αντιστοιχίζει:

$$\text{(i)}\ \ Ob(\mathfrak{M}_{\Lambda}) \ni B \xrightarrow{Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A,-)} Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A, B)$$

$$\text{(ii)}\ \ \mathfrak{M}_{\Lambda}(B, B') \ni [f : B \to B'] \xrightarrow{Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A,-)} [f_* : Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A, B) \to Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A, B')]\ ,$$

καθώς ισχύουν οι σχέσεις $(fg)_* = f_*g_*$ και $(1_A)_* = 1_{Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A,A)}$, όπως φαίνεται απ'τα σχήματα:

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "fg"] & \\ B \arrow[r, "f"'] & B' \end{tikzcd} \quad \overset{\rightsquigarrow}{\underset{\rightsquigarrow}{Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A,-)}} \quad \begin{tikzcd} Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A, B_1) \arrow[d, "g_*"'] \arrow[dr, "(fg)_*"] & \\ Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A, B) \arrow[r, "f_*"'] & Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A, B') \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "1_A"'] \\ A \end{tikzcd} \quad \overset{\rightsquigarrow}{\underset{\rightsquigarrow}{Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A,-)}} \quad \begin{tikzcd} Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A, A) \arrow[d, "(1_A)_*"] \\ Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A, A) \end{tikzcd}$$

Τίθεται, όμως, το ερώτημα κατά πόσο επηρρεάζεται ο συναρτητής $Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A, -)$ από τις παρουσιάσεις του A. Θα δείξουμε ότι δύο διαφορετικές παρουσιάσεις του A δίνουν τον ίδιο συναρτητή.

Αρχικά, θεωρούμε τις $R' \overset{\mu'}{\rightarrowtail} P' \overset{\varepsilon'}{\twoheadrightarrow} A'$ και $R \overset{\mu}{\rightarrowtail} P \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} A$ προβολικές παρουσιάσεις των A' και A αντίστοιχα. Αν $\alpha : A' \to A$ ένας module-ομομορφισμός, επειδή το P' είναι προβολικό module, υπάρχει (για τον επιμορφισμό ε και τον ομομορφισμό $\alpha\varepsilon' : P' \to A$) ομομορφισμός $\pi : P' \to P$, που επάγει τον $\sigma : R' \to R$ (αφού, λόγω καθολικότητας του kerε, $\varepsilon\mu = 0 = \alpha\varepsilon'\mu' = \varepsilon\pi\mu' \Longrightarrow \exists\sigma : R' \to R$, με $\pi\mu' = \mu\sigma$), ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
R' \arrow[r, tail, "\mu'"] \arrow[d, squiggly, "\sigma"'] & P' \arrow[r, two heads, "\varepsilon'"] \arrow[d, dotted, "\pi"'] & A' \arrow[d, "\alpha"'] \\
R \arrow[r, tail, "\mu"] & P \arrow[r, two heads, "\varepsilon"] & A
\end{tikzcd}$$

Συνήθως, λέμε ότι ο π ανυψώνει τον α. Έτσι, ο π με τον σ επάγουν μια απεικόνιση

$$\pi^* : Ext_\Lambda^\varepsilon(A, B) \to Ext_\Lambda^{\varepsilon'}(A', B)$$

όπου αν $\phi \in Ext_\Lambda^\varepsilon(A, B)$, δηλαδή $\phi : R \to B$, τότε $\pi^*(\phi) = \phi\sigma \in Ext_\Lambda^\varepsilon(A', B)$, δηλαδή $\phi\sigma : R' \to B$ και το σχήμα συμπληρώνεται ως εξής:

$$\begin{tikzcd}
& R' \arrow[r, tail, "\mu'"] \arrow[d, "\sigma"] \arrow[ddl, dotted, "\pi^*(\phi)=\phi\sigma"'] & P' \arrow[r, two heads, "\varepsilon'"] \arrow[d, "\pi"'] & A' \arrow[d, "\alpha"'] \\
& R \arrow[r, tail, "\mu"] \arrow[dl, "\phi"] & P \arrow[r, two heads, "\varepsilon"] & A \\
B
\end{tikzcd}$$

Αυτή η απεικόνιση π^* είναι φυσική στο B, που σημαίνει ότι $\forall f \in \mathfrak{M}_\Lambda(B, B')$ $(f : B \to B')$, το παρακάτω διάγραμμα αντιμετατίθεται:

$$\begin{tikzcd}
Ext_\Lambda^\varepsilon(A, B) \arrow[r, "\pi_B^*"] \arrow[d, "f_*"'] & Ext_\Lambda^{\varepsilon'}(A', B) \arrow[d, "(f_*)'"] \\
Ext_\Lambda^\varepsilon(A, B') \arrow[r, "\pi_{B'}^*"] & Ext_\Lambda^{\varepsilon'}(A', B')
\end{tikzcd}$$

κι αυτό διότι για $\phi : R \to B$ και $\sigma : R' \to R$ ισχύει:

$$\begin{aligned}
\pi_{B'}^* f_* = (f_*)'\pi_B^* &\iff [\pi_{B'}^* f_*](\phi) = [(f_*)'\pi_B^*](\phi) \\
&\iff \pi_{B'}^*[f_*(\phi)] = (f_*)'[\pi_B^*(\phi)] \\
&\iff \pi_{B'}^*(f\phi) = (f_*)'(\phi\sigma) \\
&\iff (f\phi)\sigma = f(\phi\sigma).
\end{aligned}$$

Για κάθε π, λοιπόν, έχουμε το φυσικό μετασχηματισμό από το συναρτητή $Ext_\Lambda^\varepsilon(A, -)$ στο συναρτητή $Ext_\Lambda^{\varepsilon'}(A', -)$.

2.2.2 Λήμμα. *Η απεικόνιση π^* δεν εξαρτάται από τον ομομορφισμό $\pi : P' \to P$, αλλά μόνο από τον $\alpha : A' \to A$.*

Απόδειξη: Παίρνουμε $\pi_i : P' \to P$, $i = 1,2$ δύο ομομορφισμούς, που ανυψώνουν τον α και επάγουν τους $\sigma_i : R' \to R$, ώστε τ' ακόλουθα διαγράμματα για $i = 1,2$ να είναι αντιμεταθετικά:

$$\begin{tikzcd} R' \arrow[r, tail, "\mu'"] \arrow[d, "\sigma_i"'] & P' \arrow[r, two heads, "\varepsilon'"] \arrow[d, "\pi_i"] \arrow[dl, dotted, "\tau"'] & A' \arrow[d, "\alpha"] \\ R \arrow[r, tail, "\mu"] & P \arrow[r, two heads, "\varepsilon"] & A \end{tikzcd}$$

Επειδή $\varepsilon(\pi_1 - \pi_2)[= \alpha\varepsilon' - \alpha\varepsilon'] = 0$ και ο μ πυρήνας του ε, άρα υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\tau : P' \to R$, ώστε

$$\begin{aligned} \pi_1 - \pi_2 = \mu\tau &\Longrightarrow \mu(\sigma_1 - \sigma_2) = (\pi_1 - \pi_2)\mu' = (\mu\tau)\mu' \\ &\Longrightarrow \tau\mu' = \sigma_1 - \sigma_2 \text{ (αφού ο } \mu \text{ είναι 1-1).} \end{aligned}$$

Έτσι, αν $\phi : R \to B$ είναι ένας αντιπρόσωπος του $[\phi] \in Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A,B)$, έχουμε

$$\begin{aligned} \pi_1^*([\phi]) &= [\phi\sigma_1] \\ &= [\phi(\sigma_2 + \tau\mu')] \\ &= [\phi\sigma_2 + \phi\tau\mu'] \\ &= [\phi\sigma_2] \qquad (\text{αφού } \phi\tau\mu' \in im[(\mu')^* : Hom_{\Lambda}(P',B) \to Hom_{\Lambda}(R',B)]) \\ &= \pi_2^*([\phi]). \qquad \Diamond \end{aligned}$$

Εκφράζουμε, λοιπόν, το φυσικό μετασχηματισμό:

$$(\alpha; P', P) : Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A, -) \to Ext^{\varepsilon'}_{\Lambda}(A', -),$$

αντί του π^*, για να δηλώνουμε ότι είναι ανεξάρτητος του π.

Αν θεωρήσουμε, τώρα, τους module-ομομορφισμούς
$\alpha' : A'' \to A'$ και $\alpha : A' \to A$ και τις προβολικές παρουσιάσεις
$R'' \rightarrowtail P'' \twoheadrightarrow A''$, $R' \rightarrowtail P' \twoheadrightarrow A'$ και $R \rightarrowtail P \twoheadrightarrow A$ των A'', A', A αντίστοιχα και τους $\pi' : P'' \to P'$, $\pi : P \to P'$, που ανυψώνουν τους α', α αντίστοιχα, τότε ο $\pi \circ \pi' : P'' \to P$ ανυψώνει τον $\alpha \circ \alpha' : A'' \to A$ και ως εκ τούτου, έπεται ότι

$$(\alpha'; P'', P') \circ (\alpha; P', P) = (\alpha \circ \alpha'; P'', P) \qquad (2.3)$$

και επίσης, έχω

$$(1_A; P, P) = 1 : Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A, -) \to Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A, -). \qquad (2.4)$$

Έτσι, οδηγούμαστε στο επόμενο πόρισμα.

2.2.3 Πόρισμα. *Αν* $R \rightarrowtail P \xrightarrow{\varepsilon} A$ *και* $R' \rightarrowtail P' \xrightarrow{\varepsilon'} A$ *είναι δύο προβολικές παρουσιάσεις του* A, *τότε ο μετασχηματισμός*

$$(1_A; P', P) : Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A, -) \to Ext^{\varepsilon'}_{\Lambda}(A, -),$$

είναι μια φυσική ισοδυναμία.

Απόδειξη: Αν $\pi : P \to P'$ και $\pi' : P' \to P$ και οι δύο ανυψώνουν τον $1_A : A \to A$, τότε από τους τύπους (2.3) και (2.4) έχουμε

$$(1_A; P, P') \circ (1_A; P', P) = (1_A; P, P) = 1 : Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A, -) \to Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A, -)$$

και ομοίως

$$(1_A; P', P) \circ (1_A; P, P') = (1_A; P', P') = 1 : Ext^{\varepsilon'}_{\Lambda}(A, -) \to Ext^{\varepsilon'}_{\Lambda}(A, -).$$

Άρα

$$(1_A; P', P) : Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A, -) \simeq Ext^{\varepsilon'}_{\Lambda}(A, -). \quad \Diamond$$

Εξαιτίας της φυσικής αυτής ισοδυναμίας, μπορούμε να παραλείπουμε τον υπερ-δείκτη ε και να γράφουμε απλά $Ext_{\Lambda}(A, B)$.

Στόχος μας είναι στη συνέχεια, να δημιουργήσουμε το συναρτητή $Ext_{\Lambda}(-, B)$. Αν δοθεί λοιπόν, $f : A' \to A$, μπορούμε να ορίσουμε μια επαγόμενη συνάρτηση f^* ως ακολούθως: Διαλέγουμε προβολικές παρουσιάσεις των A' και A αντίστοιχα:

$$R' \rightarrowtail P' \xrightarrow{\varepsilon'} A' \quad \text{και} \quad R \rightarrowtail P \xrightarrow{\varepsilon} A$$

και έστω

$$f^* = (f; P', P) : Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A, B) \to Ext^{\varepsilon'}_{\Lambda}(A', B).$$

Λόγω των τύπων (2.3) και (2.4), όπως και στο πόρισμα (2.2.3), ο ορισμός αυτός είναι συμβατός με τη φυσική ισοδυναμία: $Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(-, B) \simeq Ext^{\varepsilon'}_{\Lambda}(-, B)$ κι έτσι ο $Ext_{\Lambda}(-, B)$ γίνεται ένας ανταλλοίωτος συναρτητής που αντιστοιχίζει:

$$\text{(i)} \;\; Ob(\mathfrak{M}_{\Lambda}) \ni A \xrightarrow{Ext_{\Lambda}(-,B)} Ext_{\Lambda}(A, B)$$

$$\text{(ii)} \;\; \mathfrak{M}_{\Lambda}(A', A) \ni [f : A' \to A] \xrightarrow{Ext_{\Lambda}(-,B)} [f^* : Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A, B) \to Ext^{\varepsilon'}_{\Lambda}(A', B)]\,,$$

καθώς ισχύουν οι σχέσεις $(gf)^* = f^* g^*$ και $(1_A)^* = 1_{Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A,B)}$, όπως φαίνεται απ΄ τα σχήματα:

$$\begin{tikzcd}
A_1 & & Ext_\Lambda^{\varepsilon_1}(A_1,B) \arrow[d, "g^*"'] \arrow[dr, "(gf)^*"] & \\
A \arrow[u, "g"] & A' \arrow[l, "f"] \arrow[ul, "gf"'] & Ext_\Lambda^{\varepsilon}(A,B) \arrow[r, "f^*"'] & Ext_\Lambda^{\varepsilon'}(A',B)
\end{tikzcd}
\quad \overset{\rightsquigarrow}{\underset{\rightsquigarrow}{Ext_\Lambda(-,B)}}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "1_A"'] & Ext_\Lambda^{\varepsilon}(A,B) \\
A & Ext_\Lambda^{\varepsilon}(A,B) \arrow[u, "(1_A)^*"]
\end{tikzcd}
\quad \overset{\rightsquigarrow}{\underset{\rightsquigarrow}{Ext_\Lambda(-,B)}}$$

Έτσι, σύμφωνα με τα παραπάνω, ισχύει το επόμενο θεώρημα.

2.2.4 Θεώρημα. *Ο $Ext_\Lambda(-,-)$ είναι ένας δι-συναρτητής από την κατηγορία $\mathfrak{M}_\Lambda$ των Λ-modules, στην κατηγορία $\mathfrak{Ab}$ των αβελιανών ομάδων. Είναι ανταλλοίωτος στην πρώτη και συναλλοίωτος στη δεύτερη μεταβλητή.*

2.3 Φυσική ισοδυναμία των Ext και E(-,-)

Αντί να θεωρούμε το $Ext_\Lambda(A,B)$ ως μία αβελιανή ομάδα, μπορούμε, προφανώς, να το θεωρήσουμε ως ένα σύνολο. Έτσι, παίρνουμε τον δι-συναρτητή από την κατηγορία $\mathfrak{M}_\Lambda$ των Λ-modules, στην κατηγορία $\mathfrak{S}$ των συνόλων, που ονομάζουμε πάλι $Ext_\Lambda(-,-)$.

2.3.1 Θεώρημα. *Υπάρχει μια φυσική ισοδυναμία μεταξύ των δι-συναρτητών με συνολο-τιμές:*

$$\eta:\ Ext_\Lambda(-,-) \xrightarrow{\sim} E(-,-)$$

Απόδειξη: Αν $R \overset{\mu}{\rightarrowtail} P \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} A$ είναι μια σταθερή προβολική παρουσίαση του A, ορίζουμε αρχικά, ένα ισομορφισμό των συνόλων

$$\eta : E(A,B) \xrightarrow{\sim} Ext_\Lambda^{\varepsilon}(A,B),$$

φυσικό στο B. Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι ο η είναι φυσικός και στο A. Θεωρώντας ένα στοιχείο του $E(A,B)$, που αντιπροσωπεύεται από την επέκταση $B \overset{\kappa}{\rightarrowtail} E \overset{\nu}{\twoheadrightarrow} A$, , αφού P : προβολικό, υπάρχει $\phi : P \to E$ και δημιουργούμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, tail, "\mu"] \arrow[d, squiggly, "\psi"'] & P \arrow[r, two heads, "\varepsilon"] \arrow[d, squiggly, "\phi"] \arrow[dl, dotted, "\tau"'] & A \arrow[d, equal] \\ B \arrow[r, tail, "\kappa"] & E \arrow[r, two heads, "\nu"] & A \end{tikzcd}$$

Ο ομομορφισμός $\psi : R \to B$ ορίζει ένα στοιχείο $[\psi] \in Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A,B) = coker(\mu^* : Hom(P,B) \to Hom(R,B))$. Θα δείξουμε ότι το $[\psi]$ είναι ανεξάρτητο της επιλογής του συγκεκριμένου ϕ. Έτσι, αν $\phi_i : P \to E$, $i = 1,2$ δύο ομομορφισμοί, που επάγουν τους $\psi_i : R \to B$, $i = 1,2$, τότε

$$\begin{aligned} \nu(\phi_1 - \phi_2) = 0 &\Longrightarrow \exists \tau : P \to B, \phi_1 - \phi_2 = \kappa\tau \qquad (\kappa : \text{πυρήνας του } \nu) \\ &\Longrightarrow \psi_1 - \psi_2 = \tau\mu \\ &\Longrightarrow [\psi_1] = [\psi_2 + \tau\mu] \\ &\Longrightarrow [\psi_1] = [\psi_2] \qquad\qquad (\tau\mu \in im\mu^*). \end{aligned}$$

Αφού δύο αντιπρόσωποι του ίδιου στοιχείου του $E(A,B)$, οι $B \rightarrowtail^{\kappa} E \xrightarrow{\nu} A$ και $B \rightarrowtail^{\kappa'} E' \xrightarrow{\nu'} A$, επάγουν το ίδιο στοιχείο $[\psi] \in Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A,B)$, σύμφωνα με το σχήμα:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, tail, "\mu"] \arrow[d, "\psi"'] & P \arrow[r, two heads, "\varepsilon"] \arrow[d, "\phi"] & A \arrow[d, equal] \\ B \arrow[r, tail, "\kappa"'] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, two heads, "\nu"'] \arrow[d, "\xi"] & A \arrow[d, equal] \\ B \arrow[r, tail, "\kappa'"'] & E' \arrow[r, two heads, "\nu'"'] & A, \end{tikzcd}$$

έχουμε ορίσει καλά μια απεικόνιση

$$\eta : E(A,B) \to Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A,B).$$

Η η είναι φυσική στο B διότι:

αν $f \in \mathfrak{M}_{\Lambda}(B,B')$ (δηλαδή $f : B \to B'$), το παρακάτω τετράγωνο για τις επεκτάσεις $B \rightarrowtail^{\kappa} E_B \xrightarrow{\nu} A$ και $B' \rightarrowtail^{\kappa'} E_{B'} \xrightarrow{\nu'} A$ και τα αντίστοιχά τους μέσω της η $[\psi_B]$ και $[\psi_{B'}]$, είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} E(A,B) \ni E_B \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[d, "E(A,f)"'] & {[\psi_B] \in Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A,B)} \arrow[d, "Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A,f)"] \\ E(A,B') \ni E_{B'} \arrow[r, "\eta_{B'}"] & {[\psi_{B'}] \in Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A,B')} \end{tikzcd}$$

γιατί αφού

$$Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A,f)\cdot\eta_B: \quad E_B \xrightarrow{\eta_B} [\psi_B] \xrightarrow{Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A,f)} [f\psi_B]$$

$$\text{και } \eta_{B'}\cdot E(A,f): \quad E_B \xrightarrow{E(A,f)} E_{B'} \xrightarrow{\eta_{B'}} [\psi_{B'}],$$

$$\text{πρέπει } [\psi_{B'}] = [f\psi_B]$$

και από το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
& R \arrow[rr, tail, "\mu"] \arrow[dl, "\psi_{B'}"'] \arrow[ddr, "\psi_B"] & & P \arrow[rr, two heads, "\varepsilon"] \arrow[dl, dotted, "\phi'"'] \arrow[ddr, "\phi"] & & A \arrow[dl, dotted, dash, shift left] \arrow[dl, dotted, dash, shift right] \arrow[ddr, equal] & \\
B' \arrow[rr, dotted, tail, "\kappa'"] & & E_{B'} \arrow[rr, dotted, two heads, "\nu'"] & & A \arrow[drr, dotted, dash, shift left] \arrow[drr, dotted, dash, shift right] & & \\
& & B \arrow[ull, "f"] \arrow[rr, tail, "\kappa"'] & & E_B \arrow[ull, dotted, "E(A,f)"'] \arrow[rr, two heads, "\nu"'] & & A,
\end{tikzcd}$$

προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned}
\kappa'\psi_{B'} = \phi'\mu &= [E(A,f)\phi]\mu \\
&= E(A,f)(\phi\mu) \\
&= E(A,f)(\kappa\psi_B) \\
&= [E(A,f)\kappa]\psi_B \\
&= (\kappa' f)\psi_B \\
&= \kappa'(f\psi_B). \text{ Επειδή, όμως } \kappa' : \text{1-1, άρα}
\end{aligned}$$

$$\psi_{B'} = f\psi_B \Longrightarrow [\psi_{B'}] = [f\psi_B]$$

.

Αντίστροφα, αν δοθεί ένα στοιχείο $[\psi] \in Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A,B)$, θεωρούμε ένα αντιπρόσωπό του $\psi : R \to B$ και παίρνουμε την εξώθηση του ζεύγους ομομορφισμών (ψ,μ), δηλαδή την τριάδα $(E;\kappa,\phi)$ κι έτσι, προκύπτει το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, tail, "\mu"] \arrow[d, "\psi"'] & P \arrow[r, two heads, "\varepsilon"] \arrow[d, squiggly, "\phi"'] & A \arrow[d, equal] \\
B \arrow[r, squiggly, "\kappa"] & E \arrow[r, dotted, "\nu"] & A.
\end{tikzcd}$$

Από το δυϊκό του λήμματος (2.1.3), προκύπτει $ker\kappa \cong ker\mu = \{0\} \Longrightarrow \kappa : 1{-}1$ και ακόμη,

$$\begin{aligned}
\varepsilon : \text{επί} &\Longrightarrow \forall a \in A, \exists \rho \in P, \varepsilon(\rho) = a \\
&\Longrightarrow \forall a \in A, \exists e = \phi(\rho) \in E, \nu(e) = \nu\phi(\rho) = \varepsilon(\rho) = a \\
&\Longrightarrow \nu : \text{επί}.
\end{aligned}$$

Η κάτω σειρά, λοιπόν, του διαγράμματος είναι μια επέκταση του A δια του B, ανεξάρτητη του αντιπροσώπου $\psi : R \to B$, γιατί ένας άλλος αντιπρόσωπος $\psi' : R \to B$ του $[\psi]$, θα γράφεται $\psi' = \psi + \tau\mu$, όπου $\tau : P \to B$ και τότε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, tail, "\mu"] \arrow[d, "\psi'"'] & P \arrow[r, two heads, "\varepsilon"] \arrow[d, "\phi'"] \arrow[dl, dotted, "\tau"'] & A \arrow[d, equal] \\ B \arrow[r, tail, "\kappa"] & E \arrow[r, two heads, "\nu"] & A. \end{tikzcd}$$

είναι αντιμεταθετικό, αφού $\phi'\mu = (\phi + \kappa\tau)\mu = \kappa\psi + \kappa\tau\mu = \kappa(\psi + \tau\mu) = \kappa\psi'$. Από το δυϊκό, λοιπόν, του λήμματος (2.1.4), το αριστερό τετράγωνο είναι διάγραμμα εξώθησης άρα, λόγω της καθολικότητας της εξώθησης $(E; \phi, \kappa)$ του ζεύγους (ψ, μ), η επέκταση είναι ανεξάρτητη του αντιπροσώπου ψ. Έτσι έχουμε ορίσει μια απεικόνιση

$$\xi : Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A, B) \ni [\psi] \longrightarrow [B \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A] \in E(A, B)$$

που όπως και η η, είναι φυσική στο B, σύμφωνα με το ακόλουθο αντιμεταθετικό σχήμα:

$$\begin{tikzcd} Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A, B) \ni [\psi_B] \arrow[r, "\xi_B"] \arrow[d, "Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A,f)"'] & E_B \in E(A, B) \arrow[d, "E(A,f)"] \\ Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A, B') \ni [\psi_{B'}] = [f\psi_B] \arrow[r, "\xi_{B'}"] & E_{B'} \in E(A, B') \end{tikzcd}$$

με

$$E(A, f) \cdot \xi_B : \quad [\psi_B] \xrightarrow{\xi_B} E_B \xrightarrow{E(A,f)} E_{B'}$$

$$\text{και } \xi_{B'} \cdot Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A, f) : \quad [\psi_B] \xrightarrow{Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A,f)} [f\psi_B] = [\psi_{B'}] \xrightarrow{\xi_{B'}} (E_1; \phi_1, \kappa_1),$$

όπου

$f \in \mathfrak{M}_{\Lambda}(B, B')$ $(f : B \to B')$, $[\psi_B] \in Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A, B)$, $[\psi_{B'}] \in Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A, B')$, οι $B \overset{\kappa}{\rightarrowtail} E_B \overset{\nu}{\twoheadrightarrow} A$ και $B' \overset{\kappa'}{\rightarrowtail} E_{B'} \overset{\nu'}{\twoheadrightarrow} A$ είναι οι επεκτάσεις, αντίστοιχες των $[\psi_B]$ και $[\psi_{B'}]$, μέσω της ξ, ενώ $(E_1; \phi_1, \kappa_1)$ η εξώθηση του ζεύγους $(\psi_{B'}, \mu)$.

Η αντιμεταθετικότητα του παραπάνω σχήματος εκφράζεται απ΄ την ισοδυναμί-α:

$$E_{B'} \cong (E_1; \phi_1, \kappa_1)$$

και αυτή προκύπτει από το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
 & R \arrow[rr, tail, "\mu"] \arrow[dl, "\psi_{B'}"'] \arrow[ddl, "f\psi_B"] \arrow[dddrr, "\psi_B"] & & P \arrow[rr, two heads, "\varepsilon"] \arrow[dl, dotted, "\phi_1"'] \arrow[ddl, dotted, "\phi'"] \arrow[dddr, "\phi"] & & A \arrow[dl, dotted, dash] \arrow[ddl, dotted, dash] \arrow[dddr, equal] & \\
B' \arrow[rr, tail, dotted, "\kappa_1"] \arrow[d, equal] & & E_1 \arrow[rr, dotted, two heads, "\nu_1"] & & A \arrow[d, dotted, equal] & & \\
B' \arrow[rr, tail, dotted, "\kappa'"] & & E_{B'} \arrow[rr, dotted, two heads, "\nu'"] \arrow[u, squiggly, "\exists\xi_1"] & & A \arrow[drr, dotted, dash] & & \\
 & & B \arrow[ull, "f"] \arrow[rr, tail, "\kappa"'] & & E_B \arrow[ul, dotted, "E(A,f)"'] \arrow[rr, two heads, "\nu"'] & & A,
\end{tikzcd}$$

διότι λόγω της καθολικότητας της $(E_1; \phi_1, \kappa_1)$, που είναι η εξώθηση του ζεύγους $(\psi_{B'}, \mu)$, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\xi_1 : E_{B'} \to E_1$ που κάνει τα αντίστοιχα τρίγωνα αντιμεταθετικά και άρα τις επεκτάσεις E_1 και $E_{B'}$ ισοδύναμες.

Από το λήμμα (2.1.4) και την καθολικότητα της εξώθησης, έπεται ότι

$\xi\eta = 1_{E(A,B)}$ και $\eta\xi = 1_{Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A,B)}$, άρα η και ξ αντίστροφες και επομένως ισχύει η ισοδυναμία:

$$\eta : E(-,-) \xrightarrow{\sim} Ext_{\Lambda}(-,-).$$

Θα δείξουμε ακόμη ότι η η δεν εξαρτάται από την προβολική παρουσίαση του A, με τη βοήθεια του επόμενου τρισδιάστατου διαγράμματος, το οποίο επίσης, δείχνει και τη φυσικότητα της η στο A:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[rr, tail] \arrow[dd, "\psi"'] & & P \arrow[rr, two heads, "\varepsilon"] \arrow[dd, dotted, "\phi"] & & A \arrow[dd, dotted, equal] & \\
 & R' \arrow[ul] \arrow[rr, tail] \arrow[dd, squiggly, "\exists\psi'"] & & P' \arrow[ul] \arrow[rr, two heads] \arrow[dd, squiggly, "\exists\phi'"] & & A' \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[dd, equal] \\
B \arrow[rr, tail, dotted] \arrow[dr, equal] & & E \arrow[rr, dotted, two heads] & & A & \\
 & B \arrow[rr, tail] & & E^{\alpha} \arrow[ul, dotted] \arrow[rr, two heads] & & A' \arrow[ul, dotted, "\alpha"']
\end{tikzcd}$$

όπου το E^α είναι η εφέλκυση του ζεύγους $(E \to A, A' \to A)$. Πρέπει να δειχθεί η ύπαρξη των ομομορφισμών ϕ' και ψ', ώστε όλες οι έδρες του παραλληλεπιπέδου ν' αντιμετατίθενται. Η ισότητα των συνθέσεων $P' \to E \to A$ και $P' \to A' \to A$ ορίζει (από την καθολικότητα της εφέλκυσης) ένα ομομορφισμό $\phi' : P' \to E^\alpha$. Κατά συνέπεια, ο ϕ' θα επάγει τον ψ', ώστε να ισχύει η ισότητα των $R' \to P' \to E^\alpha$ και $R' \to B \to E^\alpha$. Τέλος, οι $R' \to R \to B$ και ψ' συμπίπτουν, αφού, αν τις συνθέσουμε με το μονομορφισμό $B \rightarrowtail E$, προκύπτει ισότητα. Έτσι, το όλο παραλληλεπίπεδο είναι αντιμεταθετικό.

Άρα ισχύει και η αντιμεταθετικότητα του επόμενου διαγράμματος:

$$\begin{tikzcd}
E(A,B) \arrow[r, "\alpha^* = E(\alpha,B)"] \arrow[d, shift left, "\eta"] & E(A',B) \arrow[d, shift left, "\eta"] \\
Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A,B) \arrow[u, shift left, "\xi"] \arrow[r, "\alpha^* = Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(\alpha,B)"] & Ext^{\varepsilon'}_{\Lambda}(A',B) \arrow[u, shift left, "\xi"]
\end{tikzcd}$$

που εξασφαλίζει τη φυσικότητα των η και ξ στο A.

Αν τώρα $A' = A \Longrightarrow \alpha = 1_A$, τότε το σχήμα δείχνει ότι οι η και ξ είναι ανεξάρτητες της επιλεγμένης προβολικής παρουσίασης του A. $\Diamond$

2.3.2 Πόρισμα. *Το σύνολο $E(A,B)$ των κλάσεων ισοδυναμίας των επεκτάσεων του A διά του B, έχει τη δομή αβελιανής φυσικής ομάδας.*

Απόδειξη: Είναι προφανές, αφού η $Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A,B)$ έχει τη δομή φυσικής, αβελιανής ομάδας και η $\eta : E(-,-) \xrightarrow{\sim} Ext_{\Lambda}(-,-)$, που τις συνδέει, είναι μια φυσική ισοδυναμία. $\Diamond$

Δίνουμε εδώ το ουδέτερο στοιχείο της αβελιανής ομάδας $E(A,B)$. Θεωρούμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, tail, "\mu"] \arrow[d, "\psi"'] & P \arrow[r, two heads, "\varepsilon"] \arrow[d, "\phi"] \arrow[dl, dotted, "\tau"'] & A \arrow[d, equal] \arrow[dl, squiggly, "\sigma"] \\
B \arrow[r, tail, "\kappa"'] & E \arrow[r, two heads, "\nu"'] & A.
\end{tikzcd}$$

Η επέκταση $B \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A$ αντιπροσωπεύει το ουδέτερο στοιχείο της $E(A,B)$ αν και μόνο αν ο $\psi : R \to B$ είναι ο περιορισμός ενός ομομορφισμού $\tau : P \to B$, δηλαδή ισχύει $\psi = \tau\mu$. Επομένως έχουμε:

$$\begin{aligned}
\phi\mu = \kappa\psi = \kappa\tau\mu &\Longrightarrow (\phi - \kappa\tau)\mu = 0[: R \to E] \\
&\Longrightarrow \exists\sigma[: A \to E], \phi - \kappa\tau = \sigma\varepsilon
\end{aligned}$$

(λόγω καθολικότητας του συν-πυρήνα του μ, αφού και $\epsilon\mu = 0$).
Επειδή, όμως

$\begin{matrix} \nu\phi=\varepsilon \\ \nu\kappa=0 \end{matrix} \Big\} \Longrightarrow \nu(\phi-\kappa\tau)=\varepsilon,$

$$\Longrightarrow \phi - \kappa\tau = \sigma\varepsilon = \sigma\nu(\phi - \kappa\tau)$$
$\Longrightarrow$ ο σ : δεξί αντίστροφο του ν
$\Longrightarrow$ η επέκταση $B \overset{\kappa}{\rightarrowtail} E \overset{\nu}{\twoheadrightarrow} A$ διασπάται.

Αντιστρόφως, αν η $B \overset{\kappa}{\rightarrowtail} E \overset{\nu}{\twoheadrightarrow} A$ διασπάται, το αριστερό αντίστροφο του κ, αν το συνθέσουμε με τη $\phi : P \to E$, μας δίνει τον ομομορφισμό $\tau : P \to B$. Άρα $\psi = \tau\mu$, δηλαδή η $B \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A$ αντιπροσωπεύει το ουδέτερο της $E(A, B)$.

2.3.3 Πρόταση. *Αν το P : προβολικό module και το I : ενριπτικό module, τότε για οποιαδήποτε Λ-modules A, B, ισχύει $Ext_\Lambda(P, B) = 0 = Ext_\Lambda(A, I)$.*

Απόδειξη: Από το παραπάνω θεώρημα, η ομάδα $Ext_\Lambda(P, B)$ είναι σε $1-1$ αντιστοιχία με την $E(P, B)$, η οποία αποτελείται από τις κλάσεις επεκτάσεων του τύπου $B \rightarrowtail E \twoheadrightarrow P$. Αλλά από το θεώρημα (1.5.9), βραχείες, ακριβείς ακολουθίες αυτού του τύπου, διασπώνται. Άρα $E(A, B) = \{0\}$. Εργαζόμενοι δυϊκά, δείχνουμε το δεύτερο ισχυρισμό της πρότασης. $\diamondsuit$

2.4 Άλλοι Ext-συναρτητές

Στη συνέχεια, θα ορίσουμε άλλες μορφές ομάδων $Ext_\Lambda(A, B)$ και $E(A, B)$ και αντίστοιχων συναρτητών, που προκύπτουν παίρνοντας τη δυϊκή της μεθόδου, που ξεκίνησε με την προβολική παρουσίαση του Λ-module A.

2.4.1 Ορισμός. Μια βραχεία, ακριβής ακολουθία

$$B \overset{\nu}{\rightarrowtail} I \overset{\eta}{\twoheadrightarrow} S$$

των Λ-modules B, I, S, με το I ενριπτικό, ονομάζεται **ενριπτική παρουσίαση του** B.

Ορίζουμε, λοιπόν, την ομάδα

$$\overline{Ext}\,^{\nu}_{\Lambda}(A, B) = coker\ [\eta_* : Hom_\Lambda(A, I) \to Hom_\Lambda(A, S)],$$

που προκύπτει (λόγω του θεωρήματος 1.3.1) από την ακριβή ακολουθία:

$$Hom_\Lambda(A, B) \overset{\nu_*}{\rightarrowtail} Hom_\Lambda(A, I) \xrightarrow[\eta_*(\phi)=\eta\phi]{\eta_*} Hom_\Lambda(A, S). \qquad (2.5)$$

Αν θεωρήσουμε τα δυϊκά του λήμματος (2.2.2), του πορίσματος (2.2.3) και του θεωρήματος (2.2.4), καταλήγουμε στο ότι η $\overline{Ext}\,^{\nu}_{\Lambda}(A,B)$ δεν εξαρτάται από την ενριπτική παρουσίαση του B και οδηγούμαστε στο δι-συναρτητή $\overline{Ext}\,_{\Lambda}(-,-)$, ο οποίος είναι συναλλοίωτος στη δεύτερη και ανταλλοίωτος στην πρώτη του μεταβλητή. Επίσης, το δυϊκό του θεωρήματος (2.3.1) μας δίνει τη φυσική ισοδυναμία των δι-συναρτητών με συνολο-τιμές:

$$\overline{Ext}\,_{\Lambda}(-,-) \xrightarrow{\sim} E(-,-).$$

Θα μπορούσαμε να οδηγηθούμε στις ίδιες προτάσεις, εφαρμόζοντας το λήμμα του Lambek (Λήμμα 1.2.5) για την επόμενη πρόταση:

2.4.2 Πρόταση. *Για κάθε προβολική παρουσίαση* $R \rightarrowtail^{\mu} P \xrightarrow{\varepsilon} A$ *του* Λ*-module* A *και κάθε ενριπτική παρουσίαση* $B \rightarrowtail^{\nu} I \xrightarrow{\eta} S$ *του* Λ*-module* B*, υπάρχει ένας ισομορφισμός* σ *μεταξύ των ομάδων:*

$$\sigma : \ Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A,B) \xrightarrow{\sim} \overline{Ext}\,^{\nu}_{\Lambda}(A,B).$$

Απόδειξη: Θεωρούμε το ακόλουθο αντιμεταθετικό διάγραμμα, με ακριβείς σειρές και στήλες:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\Lambda}(A,B) \arrow[r, tail] \arrow[d, tail, "\varepsilon^*"'] & Hom_{\Lambda}(A,I) \arrow[r, "\eta_*"] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\Sigma_2"] & Hom_{\Lambda}(A,S) \arrow[r, two heads, "\phi_*"] \arrow[d, tail, "\theta"] \arrow[dr, phantom, "\Sigma_1"] & \overline{Ext}\,^{\nu}_{\Lambda}(A,B) \arrow[d, "\alpha"] \\
Hom_{\Lambda}(P,B) \arrow[r, tail] \arrow[d, "\mu^*"'] \arrow[dr, phantom, "\Sigma_4"] & Hom_{\Lambda}(P,I) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Sigma_3"] & Hom_{\Lambda}(P,S) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
Hom_{\Lambda}(R,B) \arrow[r, tail, "\phi'_*"'] \arrow[d, two heads, "\theta_1"'] \arrow[dr, phantom, "\Sigma_5"] & Hom_{\Lambda}(R,I) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & Hom_{\Lambda}(R,S) & \\
Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A,B) \arrow[r] & 0 & &
\end{tikzcd} \tag{2.6}$$

Επειδή $ker\Sigma_1 = \dfrac{ker(\alpha\phi_*)}{ker\phi_* + ker\theta} = \dfrac{Hom(A,S)}{im\eta_* + 0} = coker\eta_* = \overline{Ext}\,^{\nu}_{\Lambda}(A,B)$ και

$$ker\Sigma_5 = \frac{ker(\alpha_1\phi'_*)}{ker\phi'_* + ker\theta_1} = \frac{Hom_{\Lambda}(R,B)}{0 + im\mu^*} = coker\mu^* = Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A,B),$$

με συνεχή εφαρμογή του λήμματος του Lambek, έχουμε:

$$\overline{Ext}\,^{\nu}_{\Lambda}(A,B) = ker\Sigma_1 \cong im\Sigma_2 \cong ker\Sigma_3 \cong im\Sigma_4 \cong ker\Sigma_5 = Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A,B). \quad \Diamond$$

Επειδή, για κάθε ενριπτική παρουσίαση του B, η ομάδα $\overline{Ext}\,^{\nu}_{\Lambda}(A, B)$ είναι ισόμορφη με την $Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A, B)$, μπορούμε να παραλείπουμε τον υπερ-δείκτη ν, γράφοντας απλώς $\overline{Ext}\,_{\Lambda}(A, B)$.

Αν τώρα $\beta : B \to B'$ ένας ομομορφισμός, $B' \overset{\nu'}{\rightarrowtail} I' \twoheadrightarrow S'$ μια ενριπτική παρουσίαση του Λ-module B' και $\tau : I \to I'$ μια συνάρτηση που επάγει τον β, λόγω ενριπτικότητας του I', κατά το αντιμεταθετικό σχήμα:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, tail, "\nu"] \arrow[d, "\beta"'] \arrow[dr, dotted] & I \arrow[r, two heads, "\eta"] \arrow[d, squiggly, "\tau"] & S \arrow[d] \\
B' \arrow[r, tail, "\nu'"] & I' \arrow[r, two heads] & S',
\end{tikzcd}$$

τότε το παραπάνω πολλαπλό διάγραμμα (2.6) αντιστοιχίζεται σ΄ ένα αντίστοιχο για την $B' \rightarrowtail I' \twoheadrightarrow S$. Οπότε, παίρνουμε τον ομομορφισμό των αβελιανών ομάδων

$$\beta_* : \overline{Ext}\,_{\Lambda}(A, B) \to \overline{Ext}\,_{\Lambda}(A, B')$$

ο οποίος, εξαιτίας του ισομορφισμού της πρότασης (2.4.2), συμφωνεί με τον ομομορφισμό, που ήδη έχει αναλυθεί: $\beta_* : Ext_{\Lambda}(A, B) \to Ext_{\Lambda}(A, B')$.

Ανάλογα, ξεκινώντας απ΄ τον module-ομομορφισμό $\alpha : A' \to A$, μπορούμε να ορίσουμε τον αντίστοιχο ομομορφισμό, στην πρώτη μεταβλητή, των αβελιανών ομάδων:

$$\alpha^* : \overline{Ext}\,_{\Lambda}(A, B) \to \overline{Ext}\,_{\Lambda}(A', B).$$

Μ΄ αυτούς τους ορισμούς, ο $\overline{Ext}\,_{\Lambda}(-, -)$ γίνεται ένας δι-συναρτητής και η σ μια φυσική ισοδυναμία:

$$\sigma : \; Ext_{\Lambda}(-, -) \xrightarrow{\sim} \overline{Ext}\,_{\Lambda}(-, -).$$

Έχουμε λοιπόν,

2.4.3 Πόρισμα. *Ο $\overline{Ext}\,_{\Lambda}(-, -)$ είναι ένας δι-συναρτητής, ανταλλοίωτος στην πρώτη και συναλλοίωτος στη δεύτερη μεταβλητή του. Ακόμα, είναι φυσικά ισοδύναμος με τον $Ext_{\Lambda}(-, -)$ και άρα και με τον $E(-, -)$.*

Κάποιες φορές εκφράζουμε τη φυσική ισοδυναμία μεταξύ των $\overline{Ext}\,_{\Lambda}(-, -)$ και $Ext_{\Lambda}(-, -)$ με το να μιλάμε για την *ισορροπία του συναρτητή* Ext.

Τέλος, μέσω του πολλαπλού σχήματος (2.6), που χρησιμοποιήθηκε για την απόδειξη της πρότασης (2.4.2), προκύπτει μια συμμετρική περιγραφή του Ext. Δηλαδή

2.4.4 Πόρισμα. $Ext_{\Lambda}(A, B) \cong ker\Sigma_3$.

Έτσι, αντί για τους τρείς φυσικά ισοδύναμους συναρτητές, τον $E(-, -)$, τον $Ext_{\Lambda}(-, -)$ και τον $\overline{Ext}\,_{\Lambda}(-, -)$, θα χρησιμοποιούμε ένα συμβολισμό, αυτόν του συναρτητή $Ext_{\Lambda}(-, -)$.

2.5 Ακριβείς ακολουθίες μέσω Ext-συναρτητών

Σ' αυτή την παράγραφο θα οδηγηθούμε σε μακρές, ακριβείς ακολουθίες, που συνδέουν ομάδες Hom και Ext. Από το λήμμα του φιδιού (λήμμα 1.2.7), δοθέντος του αντιμεταθετικού διαγράμματος με ακριβείς σειρές:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\mu'"] & B' \arrow[r, "\varepsilon'"] & C' & \end{tikzcd}$$

οδηγηθήκαμε στη μακρά, ακριβή ακολουθία:

$$ker\alpha \xrightarrow{\mu_*} ker\beta \xrightarrow{\varepsilon_*} ker\gamma \overset{\omega}{\rightsquigarrow} coker\alpha \xrightarrow{\mu'_*} coker\beta \xrightarrow{\varepsilon'_*} coker\gamma \tag{2.7}$$

μέσω του «συνεκτικού» ομομορφισμού $\omega : ker\gamma \to coker\alpha$.

Σημείωση: ▲ Αν ο μ είναι μονομορφισμός, μονομορφισμός είναι, επίσης και ο μ_*.
Αν ο ε' είναι επιμορφισμός, ομοίως και ο ε'_* είναι επιμορφισμός.

▼ Η ακολουθία (2.7) είναι φυσική, με την εξής έννοια: Αν δοθεί ένα αντιμεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς σειρές:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & D \arrow[rr] \arrow[dd] & & E \arrow[rr] \arrow[dd] & & F \arrow[rr] \arrow[dd] & & 0 & \\ & & & A \arrow[ul] \arrow[rr] \arrow[dd] & & B \arrow[ul] \arrow[rr] \arrow[dd] & & C \arrow[ul] \arrow[rr] \arrow[dd] & & 0 \\ 0 \arrow[rr] & & D' \arrow[rr] & & E' \arrow[rr] & & F' & & & \\ & 0 \arrow[rr] & & A' \arrow[ul] \arrow[rr] & & B' \arrow[ul] \arrow[rr] & & C', \arrow[ul] & & \end{tikzcd} \tag{2.8}$$

έχουμε μια απεικόνιση από τη μακρά, ακριβή ακολουθία (2.7), που προκύπτει από την μπροστινή έδρα του παραλληλεπιπέδου, στην αντίστοιχη ακολουθία που προκύπτει από την πίσω έδρα του.

Χρησιμοποιώντας το λήμμα του φιδιού, θα δείξουμε τα θεωρήματα που ακολουθούν.

2.5.1 Θεώρημα. *Αν δοθούν ένα Λ-module A και $B' \rightarrowtail{\phi} B \xrightarrow{\psi} B''$ η ακριβής ακολουθία των Λ-modules B', B, B'', τότε υπάρχει ένας «συνεκτικός» ομομορφισμός $\omega : Hom_\Lambda(A, B'') \to Ext_\Lambda(A, B')$, ώστε η μακρά ακολουθία:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Hom_\Lambda(A,B') \arrow[r, "\phi_*"] & Hom_\Lambda(A,B) \arrow[r, "\psi_*"] & Hom_\Lambda(A,B'') \arrow[d, squiggly, "\omega"] \\ & Ext_\Lambda(A,B'') & Ext_\Lambda(A,B) \arrow[l, "\psi_*"'] & Ext_\Lambda(A,B') \arrow[l, "\phi_*"'] \end{tikzcd} \tag{2.9}$$

να είναι ακριβής και φυσική.

Αυτή η ακολουθία ονομάζεται *Hom-Ext-ακολουθία (στη δεύτερη μεταβλητή).*

Απόδειξη: Παίρνουμε μια τυχαία προβολική παρουσίαση $R \overset{\mu}{\rightarrowtail} P \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} A$ του A και προκύπτει το επόμενο αντιμεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & Hom_\Lambda(A,B') \arrow[r, tail, dotted, "\phi_*"] \arrow[d, "\varepsilon^*"'] & Hom_\Lambda(A,B) \arrow[r, dotted, "\psi_*"] \arrow[d, "\varepsilon^*"'] & Hom_\Lambda(A,B'') \arrow[d, "\varepsilon^*"] & \\ 0 \arrow[r] & Hom_\Lambda(P,B') \arrow[r] \arrow[d, "\mu^*"'] & Hom_\Lambda(P,B) \arrow[r] \arrow[d, "\mu^*"'] & Hom_\Lambda(P,B'') \arrow[r] \arrow[d, "\mu^*"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Hom_\Lambda(R,B') \arrow[r] \arrow[d] & Hom_\Lambda(R,B) \arrow[r] \arrow[d] & Hom_\Lambda(R,B'') \arrow[d] & \\ & Ext_\Lambda(A,B') \arrow[r, dotted, "\phi_*"] & Ext_\Lambda(A,B) \arrow[r, dotted, "\psi_*"] & Ext_\Lambda(A,B'') & \end{tikzcd} \tag{2.10}$$

με ακριβείς γραμμές και στήλες. Δηλαδή η δεύτερη και η τρίτη σειρά είναι ακριβείς, λόγω του θεωρήματος (1.3.1) και μάλιστα στη δεύτερη ο ομομορφισμός $\psi_* : Hom_\Lambda(P,B) \twoheadrightarrow Hom_\Lambda(P,B'')$ είναι επιμορφικός, αφού το P είναι προβολικό Λ-module. Με εφαρμογή λοιπόν, του λήμματος του φιδιού για τις δύο μεσαίες σειρές, παίρνουμε τον ομομορφισμό ω, και την ακριβή ακολουθία (2.9), όπου ο $\phi_* : Hom_\Lambda(A,B') \to Hom_\Lambda(A,B)$ είναι μονομορφικός, από το θεώρημα (1.3.1).

Έστω τώρα $\alpha : A' \to A$ ένας Λ-module-ομομορφισμός και μια προβολική παρουσίαση του A', η $R' \overset{\mu}{\rightarrowtail} P' \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} A'$. Επειδή P' : προβολικό, υπάρχει ο ομομορφισμός $\pi : P' \to P$, που επάγει τον $\sigma : R' \to R$, όπως φαίνονται στο αντιμεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} R' \arrow[r, tail] \arrow[d, squiggly, "\sigma"'] & P' \arrow[r, two heads] \arrow[d, dotted, "\pi"] & A' \arrow[d, "\alpha"] \\ R \arrow[r, tail] & P \arrow[r, two heads] & A. \end{tikzcd}$$

Τότε οι α, π, σ επάγουν μια απεικόνιση του διαγράμματος (2.10), που αναφέρεται στην προβολική παρουσίαση $R \rightarrowtail^{\mu} P \xrightarrow{\varepsilon} \!\!\!\!\rightarrow A$ του module A, στο αντίστοιχο διάγραμμα που αναφέρεται στην $R' \rightarrowtail^{\mu} P' \xrightarrow{\varepsilon} \!\!\!\!\rightarrow A'$ προβολική παρουσίαση του A'. Οι δύο μεσαίες γραμμές των δύο διαγραμμάτων σχηματίζουν ένα διάγραμμα-παραλληλεπίπεδο σαν το (2.8) κι έτσι, η *Hom*-*Ext*-ακολουθία που αντιστοιχεί στο A, απεικονίζεται στη *Hom*-*Ext*-ακολουθία που αντιστοιχεί στο A'. Στην ειδική περίπτωση που $\alpha = 1_A : A \to A$, συμπεραίνεται ότι ο ομομορφισμός ω δεν εξαρτάται από την επιλογή της προβολικής παρουσίασης του A.

Ανάλογα αν κινηθούμε, για τους ομομορφισμούς β', β, β'', που κάνουν το ακόλουθο διάγραμμα αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} B' \arrow[r, tail] \arrow[d, "\beta'"'] & B \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\beta"] & B'' \arrow[d, "\beta''"] \\ C' \arrow[r, tail] & C \arrow[r, two heads] & C'', \end{tikzcd}$$

αποδεικνύουμε τη φυσικότητα της (2.9). Πράγματι, αυτοί οι ομομορφισμοί επάγουν μια απεικόνιση, που αντιστοιχίζει τη *Hom*-*Ext*-ακολουθία (2.9), που αναφέρεται στη βραχεία, ακριβή ακολουθία $B' \rightarrowtail B \twoheadrightarrow B''$, σε μια νέα *Hom*-*Ext*-ακολουθία του ίδιου τύπου, που θα αναφέρεται στη βραχεία, ακριβή ακολουθία $C' \rightarrowtail C \twoheadrightarrow C''$. Συγκεκριμένα, από το αντίστοιχο παραλληλεπίπεδο-διάγραμμα, που θα προκύψει, ξεχωρίζουμε το αντιμεταθετικό τετράγωνο:

$$\begin{tikzcd} Hom_\Lambda(A, B'') \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\beta''_*"'] & Ext_\Lambda(A, B') \arrow[d, "\beta'_*"] \\ Hom_\Lambda(A, C'') \arrow[r, "\omega"] & Ext_\Lambda(A, C') \end{tikzcd}$$

που δικαιολογεί το ότι η (2.9) είναι φυσική ακολουθία. $\diamondsuit$

<u>**Παρατήρηση:**</u> Ο ομομορφισμός $\omega : Hom_\Lambda(A, B'') \to Ext_\Lambda(A, B')$ είναι συμβατός με την ισοδυναμία του (2.3.1) θεωρήματος. Διότι, έστω $\alpha : A \to B''$ και π, σ οι επαγόμενοι ομομορφισμοί, ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, tail] \arrow[d, "\sigma"'] & P \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\pi"] & A \arrow[d, "\alpha"] \\ B' \arrow[r, tail, "\phi"] & B \arrow[r, two heads, "\psi"] & B'', \end{tikzcd}$$

να αντιμετατίθεται. Από την κατασκευή του ω, έχουμε $\omega(\alpha) = [\sigma] \in Ext_\Lambda(A, B')$. Αν λοιπόν E είναι η εφέλκυση του ζεύγους (ψ, α) τότε, από τον καθολικό χαρακτήρα της εφέλκυσης, προκύπτει η απεικόνιση $\pi' : P \to E$, που ολοκληρώνει την αντιμεταθετικότητα του παρακάτω διαγράμματος:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, tail] \arrow[d, "\sigma"'] & P \arrow[r, two heads] \arrow[d, dotted, "\pi'"] & A \arrow[d, equal] \\
B' \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, two heads] \arrow[d] & A \arrow[d, "\alpha"] \\
B' \arrow[r, tail, "\phi"'] & B \arrow[r, two heads, "\psi"'] & B''.
\end{tikzcd}$$

Από τον ορισμό της φυσικής ισοδυναμίας $\xi : \ Ext^{\varepsilon}_{\Lambda}(A, B') \xrightarrow{\sim} E(A, B')$, που έγινε στο θεώρημα (2.3.1), έχουμε $\xi([\sigma]) = [B' \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A] \in E(A, B')$.

Προχωρούμε στη *Hom-Ext-ακολουθία (στην πρώτη μεταβλητή)*:

2.5.2 Θεώρημα. *Έστω ένα Λ-module B και* $A' \overset{\phi}{\rightarrowtail} A \overset{\psi}{\twoheadrightarrow} A''$ *μια βραχεία, ακριβής ακολουθία. Τότε θα υπάρχει ένας «συνεκτικός» ομομορφισμός* $\omega : Hom_{\Lambda}(A', B) \to Ext_{\Lambda}(A'', B)$, *ώστε η μακρά ακολουθία:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Hom_{\Lambda}(A'', B) \arrow[r, "\psi^*"] & Hom_{\Lambda}(A, B) \arrow[r, "\phi^*"] & Hom_{\Lambda}(A', B) \arrow[dl, squiggly, "\omega"] \\
Ext_{\Lambda}(A', B) & Ext_{\Lambda}(A, B) \arrow[l, "\phi^*"'] & Ext_{\Lambda}(A'', B) \arrow[l, "\psi^*"'] &
\end{tikzcd} \tag{2.11}$$

να είναι ακριβής και φυσική.

Απόδειξη: Αν αντικαταστήσουμε την ομάδα $Ext_{\Lambda}(A'', B)$ με την ισόμορφή της $\overline{Ext}_{\Lambda}(A'', B)$, τότε έχουμε το δυϊκό του θεωρήματος (2.5.1). $\Diamond$

Παρατήρηση: Στην απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος, η δυϊκότητα μας παραπέμπει στην έννοια των ενριπτικών παρουσιάσεων. Μπορούμε όμως να έχουμε και άλλη απόδειξη αυτού, χρησιμοποιώντας μόνο προβολικά modules, μέσω του λήμματος που ακολουθεί, το οποίο θα μας χρειαστεί και στο επόμενο κεφάλαιο.

2.5.3 Λήμμα. *Αν δοθεί μια βραχεία, ακριβής ακολουθία* $A' \overset{\phi}{\rightarrowtail} A \overset{\psi}{\twoheadrightarrow} A''$ *και οι προβολικές παρουσιάσεις* $\varepsilon' : P' \twoheadrightarrow A'$ *και* $\varepsilon'' : P'' \twoheadrightarrow A''$, *τότε υπάρχει μια προβολική παρουσίαση* $\varepsilon : P \twoheadrightarrow A$ *και ομομορφισμοί* $i : P' \rightarrowtail P$ *και*

$\pi : P \twoheadrightarrow P''$, *ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό, με ακριβείς σειρές:*

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[r, tail, dotted, "i"] \arrow[d, "\varepsilon'"'] & P \arrow[r, two heads, dotted, "\pi"] \arrow[d, dotted, "\varepsilon"] & P'' \arrow[d, "\varepsilon''"] \\ A' \arrow[r, tail, "\phi"] & A \arrow[r, two heads, "\psi"] & A'', \end{tikzcd}$$

Απόδειξη: Παίρνουμε $P = P' \oplus P''$ και έστω $i : P' \to P' \oplus P''$ η κανονική ένριψη, ενώ $\pi : P' \oplus P'' \to P''$ η κανονική προβολή. Ορίζουμε λοιπόν την $\varepsilon : P' \oplus P'' \to A$ μέσω των συνιστωσών-συναρτήσεών της. Η πρώτη συνιστώσα-συνάρτηση είναι η $\phi\varepsilon' : P' \to A$. Για τη δεύτερη, την $\theta : P'' \to A$, παίρνουμε αυτήν που αντιμεταθέτει, λόγω προβολικότητας του P'', το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd} & P'' \arrow[dl, dotted, "\theta"'] \arrow[d, "\varepsilon''"] \\ A \arrow[r, two heads, "\psi"'] & A''. \end{tikzcd}$$

Δηλαδή $\varepsilon =< \phi\varepsilon', \theta >: P' \oplus P'' \to A$ και πράγματι, $\varepsilon \cdot i = \phi\varepsilon'$ (προφανώς), ενώ $\varepsilon''\pi = (\psi\theta)\pi = \psi(\theta\pi) = \psi\varepsilon$. Τέλος, από το λήμμα (1.2.4) ο ε είναι επιμορφισμός. $\Diamond$

2.5.4 Πόρισμα. *Το Λ-module A είναι προβολικό, αν και μόνο αν $Ext_\Lambda(A, B) = 0$, για κάθε Λ-module B.*

Απόδειξη: Έστω A : προβολικό. Τότε η $1_A : A \xrightarrow{\sim} A$ είναι μια προβολική παρουσίαση του A κι έτσι, απ΄ την πρόταση (2.3.3), προκύπτει $Ext_\Lambda(A, B) = 0$, για κάθε Λ-module B.

Αντιστρόφως, αν $Ext_\Lambda(A, B) = 0$, για όλα τα Λ-modules B, τότε για κάθε βραχεία, ακριβή ακολουθία $B' \rightarrowtail B \twoheadrightarrow B''$, η ακολουθία

$$0 \to Hom_\Lambda(A, B') \to Hom_\Lambda(A, B) \to Hom_\Lambda(A, B'') \to 0$$

είναι ακριβής. Από το θεώρημα (1.5.9) λοιπόν, είναι A : προβολικό. $\Diamond$

Με τους δυϊκούς ισχυρισμούς, παίρνουμε το επόμενο πόρισμα.

2.5.5 Πόρισμα. *Το Λ-module B είναι ενριπτικό, αν και μόνο αν $Ext_\Lambda(A, B) = 0$, για κάθε Λ-module A.*

2.6 Υπολογισμός κάποιων Ext-ομάδων

Με τη βοήθεια του επόμενου λήμματος, θα παρουσιάσουμε κάποια παραδείγματα Ext-ομάδων.

2.6.1 Λήμμα. (i) $Ext_\Lambda(\bigoplus_{i\in I} A_i, B) \cong \prod_{i\in I} Ext_\Lambda(A_i, B)$

(ii) $Ext_\Lambda(A, \prod_{j\in J} B_j) \cong \prod_{j\in J} Ext_\Lambda(A, B_j)$

Απόδειξη:

◀ (i) $\forall i \in I$, διαλέγουμε μια προβολική παρουσίαση $R_i \rightarrowtail P_i \twoheadrightarrow A_i$ του A_i. Τότε η $\bigoplus_i R_i \rightarrowtail \bigoplus_i P_i \twoheadrightarrow \bigoplus_i A_i$ είναι μια προβολική παρουσίαση του $\bigoplus_i A_i$ (το $\bigoplus_{i\in I} P_i$, απ΄ την πρόταση (1.5.8), είναι προβολικό Λ-module). Έτσι, δημιουργείται η ακριβής ακολουθία:

$$Hom_\Lambda(\bigoplus_i A_i, B) \rightarrowtail Hom_\Lambda(\bigoplus_i R_i, B) \to Hom_\Lambda(\bigoplus_i R_i, B) \twoheadrightarrow Ext_\Lambda(\bigoplus_i A_i, B).$$

Επομένως, λόγω και των ισομορφισμών που προκύπτουν από την εφαρμογή της πρότασης (1.4.7), έχουμε το ακόλουθο αντιμεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
Hom_\Lambda(\bigoplus_i A_i, B) \arrow[r, tail] \arrow[d, "\wr"] & Hom_\Lambda(\bigoplus_i P_i, B) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & Hom_\Lambda(\bigoplus_i R_i, B) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\wr"] & Ext_\Lambda(\bigoplus_i A_i, B) \\
\prod_i Hom_\Lambda(A_i, B) \arrow[r, tail] & \prod_i Hom_\Lambda(P_i, B) \arrow[r] & \prod_i Hom_\Lambda(R_i, B) \arrow[r, two heads] & \prod_i Ext_\Lambda(A_i, B),
\end{tikzcd}$$

το οποίο δικαιολογεί τον ισομορφισμό: $Ext_\Lambda(\bigoplus_i A_i, B) \cong \prod_i Ext_\Lambda(A_i, B)$.

◀ (ii) Θεωρούμε $\forall j \in J$, την ενριπτική παρουσίαση $B_j \rightarrowtail I_j \twoheadrightarrow S_j$ του B_j. Οπότε η $\prod_j B_j \rightarrowtail \prod_j I_j \twoheadrightarrow \prod_j S_j$ είναι μια ενριπτική παρουσίαση του $\prod_j B_j$ (πρόταση 1.5.11). Άρα βάσει της πρότασης (1.4.8), παίρνουμε το αντιμεταθετικό σχήμα:

$$\begin{tikzcd}
Hom_\Lambda(A, \prod_j B_j) \arrow[r, tail] \arrow[d, "\wr"] & Hom_\Lambda(A, \prod_j I_j) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & Hom_\Lambda(A, \prod_j S_j) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\wr"] & \overline{Ext}_\Lambda(A, \prod_j B_j) \\
\prod_j Hom_\Lambda(A, B_j) \arrow[r, tail] & \prod_j Hom_\Lambda(A, I_j) \arrow[r] & \prod_i Hom_\Lambda(A, S_j) \arrow[r, two heads] & \prod_j \overline{Ext}_\Lambda(A, B_j),
\end{tikzcd}$$

απ' όπου προκύπτει:

$$Ext_\Lambda(A, \prod_j B_j) \cong \overline{Ext}_\Lambda(A, \prod_j B_j) \cong \prod_j \overline{Ext}_\Lambda(A, B_j) \cong \prod_j Ext_\Lambda(A, B_j). \quad \Diamond$$

Τώρα θα υπολογίσουμε την ομάδα $Ext_{\mathbb{Z}}(A, B)$, *για* A, B *πεπερασμένα παραγόμενες αβελιανές ομάδες*. Εξαιτίας του προηγούμενου λήμματος, αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση των κυκλικών ομάδων A, B. Για διευκόλυνση, όταν αναφερόμαστε σε $\mathbb{Z}$-modules, θα γράφουμε τις ομάδες Hom και Ext χωρίς τον υποδείκτη $\mathbb{Z}$, δηλαδή απλά, ως $Hom(A, B)$ και $Ext(A, B)$.

Αφού $\mathbb{Z}$ ελεύθερο $\mathbb{Z}$-module, άρα και προβολικό και από την πρόταση (2.3.3)

$$Ext(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0 = Ext(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_q), \qquad q \in \mathbb{Z}_+.$$

Για να υπολογίσουμε τις ομάδες $Ext(\mathbb{Z}_r, \mathbb{Z})$ και $Ext(\mathbb{Z}_r, \mathbb{Z}_q)$, χρησιμοποιούμε την προβολική παρουσίαση $\mathbb{Z} \rightarrowtail^{\mu} \mathbb{Z} \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Z}_r$ του $\mathbb{Z}_r$, όπου μ ο πολλαπλασιασμός επί r και ε ο προφανής επιμορφισμός $\varepsilon : \varepsilon(z) = z(mod r), z \in \mathbb{Z}$, που στέλνει το κάθε $z \in \mathbb{Z}$ στο υπόλοιπο της διαίρεσής του δια r. Έτσι θα πάρουμε την ακριβή ακολουθία:

$$\begin{tikzcd}
Hom(\mathbb{Z}_r, \mathbb{Z}) \arrow[r, tail] \arrow[d, "\wr"] & Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \arrow[r, "\mu^*"] \arrow[d, "\wr"] & Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\wr"] & Ext(\mathbb{Z}_r, \mathbb{Z}) \\
0 \arrow[r, tail] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\mu^*"] & \mathbb{Z}. &
\end{tikzcd}$$

Η ομάδα $Hom(\mathbb{Z}_r, \mathbb{Z}) \cong 0$, αφού ο μοναδικός ομομορφισμός από το $\mathbb{Z}_r$ στο $\mathbb{Z}$ είναι ο $\phi : \phi(1_{\mathbb{Z}_r}) = 1_{\mathbb{Z}}$. Ενώ $Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, γιατί $\forall z \in \mathbb{Z}, \exists! f_z$: ομομορφισμός, ώστε $f_z(1) = z$ και προφανώς, αυτοί είναι όλοι οι ομομορφισμοί $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Αφού λοιπόν ο μ^* είναι, πάλι, ο πολλαπλασιασμός επί r, έχουμε $Ext(\mathbb{Z}_r, \mathbb{Z}) = coker\mu^* = Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})/im\mu^* \cong \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$. Οπότε

$$Ext(\mathbb{Z}_r, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_r.$$

Όσον αφορά την ομάδα $Ext(\mathbb{Z}_r, \mathbb{Z}_q)$, ξεκινώντας από την ίδια προβολική παρουσίαση $\mathbb{Z} \rightarrowtail^{\mu} \mathbb{Z} \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Z}_r$ του $\mathbb{Z}_r$, δημιουργούμε την ακριβή ακολουθία:

$$\begin{tikzcd}
Hom(\mathbb{Z}_r, \mathbb{Z}_q) \arrow[r, tail] \arrow[d, "\wr"] & Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_q) \arrow[r, "\mu^*"] \arrow[d, "\wr"] & Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_q) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\wr"] & Ext(\mathbb{Z}_r, \mathbb{Z}_q) \\
\mathbb{Z}_{(r,q)} \arrow[r, tail] & \mathbb{Z}_q \arrow[r, "\mu^*"] & \mathbb{Z}_q &
\end{tikzcd}$$

με τον μ^* πάλι να είναι ο πολλαπλασιασμός επί r, τον (r, q) να είναι ο $M.K.\Delta.$ των r και q και ακόμη $Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_q) \cong \mathbb{Z}_q$, δεδομένου ότι
$\forall z_q \in \mathbb{Z}_q, \exists! f_{z_q} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_q$ ομομορφισμός, ώστε $f_{z_q}(1_{\mathbb{Z}}) = 1_{\mathbb{Z}_q} + z_q$.
Έτσι προκύπτει $Ext(\mathbb{Z}_r, \mathbb{Z}_q) = coker\mu^* = Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_q)/im\mu^* \cong \mathbb{Z}_q/r\mathbb{Z}$. Άρα

$$Ext(\mathbb{Z}_r, \mathbb{Z}_q) \cong \mathbb{Z}_{(r,q)}.$$

Κεφάλαιο 3

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΤΕΣ

Στο κεφάλαιο αυτό ασχολούμαστε με την καθ' αυτό ομολογιακή έννοια των παράγωγων συναρτητών, των οποίων χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι οι $Ext_\Lambda(A,B)$, που αναλύσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, και οι $Tor^\Lambda(A,B)$. Ξεκινώντας δηλαδή, από ένα προσθετικό συναρτητή $F:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ μεταξύ των δύο προσθετικών κατηγοριών $\mathfrak{A}$ και $\mathfrak{B}$, θα σχηματίσουμε αρχικά, τους αριστερά παράγωγους συναρτητές του, τους $L_nF:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}, n\geq 0$. Προϋπόθεση στην όλη πορεία μας, θα θεωρηθεί ότι η κατηγορία $\mathfrak{A}$ διαθέτει αρκετά προβολικά αντικείμενα, ώστε κάθε $A\in Ob(\mathfrak{A})$ να δέχεται μια προβολική παρουσίαση. Στη συνέχεια, με δυϊκό τρόπο, θα σχηματίσουμε τους δεξιά παράγωγους συναρτητές (R_nF) του $F:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$, με προϋπόθεση, τώρα, ότι κάθε $A\in Ob(\mathfrak{A})$ δέχεται μια ενριπτική παρουσίαση.

3.1 Συμπλέγματα και μορφισμοί συμπλεγμάτων

Έστω Λ ένας μοναδιαίος δακτύλιος, σταθερά ο ίδιος, σε όλη την πορεία μας. Θ' ασχοληθούμε με την κατηγορία $\mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}}$ των βαθμωτών Λ-modules, που την έχουμε ήδη αναφέρει ως παράδειγμα προσθετικής και στη συνέχεια, αβελιανής κατηγορίας. Θυμίζουμε ότι:

▲ το βαθμωτό (αριστερό) module είναι οικογένεια $\{M_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ από Λ-modules

▼ ο μορφισμός βαθμωτών modules $\phi:M\to M'$ βαθμού p, είναι οικογένεια module-ομομορφισμών $\{\phi_n:M_n\to M'_{n+p}\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

3.1.1 Ορισμός. Ένα **αλυσσωτό σύμπλεγμα (chain complex)** $\mathbf{C} = \{C_n, \partial_n\}$ επί του Λ, είναι ένα αντικείμενο της κατηγορίας $\mathfrak{M}_\Lambda^\mathbb{Z}$, μαζί μ' ένα ενδομορφισμό $\partial : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ βαθμού -1, όπου $\partial\partial = 0$.

Δηλαδή, όπως δείχνει το σχήμα:

$$\mathbf{C}: \ \ldots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots,$$

δίνονται μια οικογένεια $\{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ από Λ-modules και μια Λ-module ομομορφισμών: $\{\partial_n : C_n \to C_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, ώστε

$$\partial_n \partial_{n+1} = 0.$$

Ο μορφισμός ∂ (όπως και οι συνιστώσες του ∂_n) ονομάζεται **διαφορικό (ή οριακός τελεστής)**.

3.1.2 Ορισμός. Μορφισμός συμπλεγμάτων (chain map) $\phi : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ είναι ένας μορφισμός των αλυσσωτών συμπλεγμάτων $\mathbf{C}$ και $\mathbf{D}$ βαθμού 0, στην κατηγορία $\mathfrak{M}_\Lambda^\mathbb{Z}$ των βαθμωτών modules, ώστε

$$\phi\partial = \widetilde{\partial}\phi$$

όπου με $\widetilde{\partial}$ δηλώνουμε το διαφορικό του συμπλέγματος $\mathbf{D}$.

Έτσι, μορφισμός συμπλεγμάτων ϕ είναι οικογένεια ομομορφισμών $\{\phi_n : C_n \to D_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό ($\phi_{n-1}\partial_n = \widetilde{\partial}_n\phi_n, \forall n \in \mathbb{Z}$):

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\phi_n"'] & C_{n-1} \arrow[d, "\phi_{n-1}"] \\ D_n \arrow[r, "\widetilde{\partial}_n"'] & D_{n-1} \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

Για απλοποίηση, θα παραλείπουμε τους υπο-δείκτες των module-ομομορφισμών ∂_n και ϕ_n, όπου εννοούνται ξεκάθαρα. Για παράδειγμα, για να εκφράσουμε την αντιμεταθετικότητα του διαγράμματος (3.1), γράφουμε απλά $\phi\partial = \widetilde{\partial}\phi$. Και μάλιστα, παραλείπουμε και το σημειολογικό διαχωρισμό $\widetilde{\partial}$ και ∂, για τα διαφορικά διαφορετικών συμπλεγμάτων, γράφοντας για όλα το σύμβολο ∂.

Ένα σύμπλεγμα $\mathbf{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι **υπο-σύμπλεγμα ενός συμπλέγματος** $\mathbf{C} = \{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, αν κάθε B_n είναι υπο-module του C_n και ακόμα, το διαφορικό του $\mathbf{B}$ είναι περιορισμός του διαφορικού του $\mathbf{C}$. Οι εγκλεισμοί $i_n : B_n \to C_n$ δηλαδή, απαρτίζουν ένα μορφισμό συμπλεγμάτων: $\mathbf{B} \to \mathbf{C}$. Σ' αυτή την περίπτωση, μπορούμε να συλλέξουμε τα module-πηλίκα C_n/B_n σ' ένα σύμπλεγμα:

$$\mathbf{C}/\mathbf{B} : \ \ldots \to C_{n+1}/B_{n+1} \to C_n/B_n \to C_{n-1}/B_{n-1} \to \ldots,$$

που το ονομάζουμε **σύμπλεγμα-πηλίκο**.

Έστω, τώρα, $\mathbf{f} : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ ένας μορφισμός συμπλεγμάτων. Τότε η οικογένεια των πυρήνων των f_n, σχηματίζουν το σύμπλεγμα $ker\mathbf{f} = \{ker(f_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, υπο-σύμπλεγμα του $\mathbf{B}$ και παρομοίως, οι συν-πυρήνες το σύμπλεγμα-πηλίκο $coker\mathbf{f} = \{coker(f_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, που είναι υπο-σύμπλεγμα του C.

Σημείωση: Η κατηγορία $\mathfrak{Ch}(mod - \Lambda) = \mathfrak{Ch}$ των αλυσσωτών συμπλεγμάτων και των μορφισμών μεταξύ τους, αποτελεί μια αβελιανή υπο-κατηγορία της αβελιανής κατηγορίας $\mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}}$ των βαθμωτών Λ-modules. Διότι:

- **α) Είναι προσθετική υπο-κατηγορία:**

Περιέχει ως μηδενικό στοιχείο, το «**0**-σύμπλεγμα», των 0-modules και 0-συναρτήσεων. Ακόμα, αν δοθεί μια οικογένεια $\{\mathbf{A}_\alpha = \{A_{\alpha,n}\}, n \in \mathbb{Z}\}$ αλυσσωτών συμπλεγμάτων επί του Λ, το γινόμενο $\prod \mathbf{A}_\alpha = \{\prod_n A_{\alpha,n}\}, n \in \mathbb{Z}\}$ και το συν-γινόμενο, δηλαδή το ευθύ άθροισμα $\bigoplus \mathbf{A}_\alpha = \{\oplus_n A_{\alpha,n}\}, n \in \mathbb{Z}\}$, υπάρχουν μέσα στην $\mathfrak{Ch}$ και ορίζονται κατά βαθμό n τα διαφορικά:

$$\prod \partial_\alpha : \prod_\alpha A_{\alpha,n} \to \prod_\alpha A_{\alpha,n-1} \quad \text{και} \quad \bigoplus \partial\alpha : \bigoplus_\alpha A_{\alpha,n} \to \bigoplus_\alpha A_{\alpha,n-1}$$

αντίστοιχα. Αυτά αρκούν να κάνουν την $\mathfrak{Ch}$ προσθετική κατηγορία.

- **β) Είναι αβελιανή κατηγορία:**

◀ (i) Κάθε μορφισμός συμπλεγμάτων $\phi = \{\phi_n\}$ έχει πυρήνα $ker\phi = \{ker\phi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ και συν-πυρήνα $coker\phi = \{coker\phi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

◀ (ii) Αν $\phi : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ ένας μορφισμός συμπλεγμάτων και
ϕ : μονομορφισμός $\iff \forall n \in \mathbb{Z}, \phi_n : C_n \to D_n$: μονομορφισμός,
πράγμα που σημαίνει ότι το $\mathbf{C}$ είναι ισόμορφο με ένα υπο-σύμπλεγμα του $\mathbf{D}$. Άρα ο ϕ είναι ισομορφικός με τον πυρήνα του $\mathbf{D} \to \mathbf{D}/\mathbf{C}$, που είναι συν-πυρήνας του ϕ. Παρόμοια, αν ϕ επιμορφισμός, τότε είναι ισομορφικός με το συν-πυρήνα του μορφισμού συμπλεγμάτων $ker\phi \to \mathbf{C}$.

◀ (iii) Κάθε $\phi = \{\phi_n\}$, εκφράζεται ως σύνθεση ενός επιμορφισμού κι ενός μονομορφισμού, αφού αυτό ισχύει για κάθε ϕ_n. $\Diamond$

Επίσης, αν $F : \mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}} \to \mathfrak{M}_{\Lambda'}^{\mathbb{Z}}$ ένας προσθετικός συναλλοίωτος συναρτητής και $\mathbf{C} = \{C_n, \partial_n\}$ ένα αλυσσωτό σύμπλεγμα επί του Λ, τότε το $F\mathbf{C} = \{FC_n, F\partial_n\}$ είναι αλυσσωτό σύμπλεγμα επί του Λ' και ο F εισάγει ένα συναρτητή στην κατηγορία $\mathfrak{Ch}(mod - \Lambda) = \mathfrak{Ch}$ των αλυσσωτών συμπλεγμάτων.

3.2 Ομολογίες και συν -ομολογίες

Εισάγουμε, τώρα, τις πιο σημαντικές έννοιες, της **ομολογίας** και **συν-ομολογίας**. Έστω $\mathbf{C} = \{C_n, \partial_n\}$ ένα αλυσσωτό σύμπλεγμα, δηλαδή

$$\mathbf{C}: \ \ldots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots.$$

Η συνθήκη $\partial\partial = 0$ συνεπάγεται ότι $im\partial_{n+1} \subseteq ker\partial_n, n \in \mathbb{Z}$.

3.2.1 Ορισμός. Συσχετίζουμε με το αλυσσωτό σύμπλεγμα $\mathbf{C}$, το βαθμωτό module

$$\boxed{H(\mathbf{C}) = \{H_n(\mathbf{C}), \quad H_n(\mathbf{C}) = ker\partial_n / im\partial_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}\}}$$

Το $H_n(\mathbf{C})$ ονομάζεται **n-οστό ομολογιακό module** του $\mathbf{C}$ και το $H(\mathbf{C})$ ονομάζεται **ομολογιακό module του** $\mathbf{C}$. Αν $\Lambda = \mathbb{Z}$ τότε μιλάμε για την (n-οστή) ομολογιακή ομάδα του $\mathbf{C}$.

Ένας μορφισμός συμπλεγμάτων $\phi : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, όπως δείχνει και το σχήμα (3.1), επάγει έναν καλά ορισμένο μορφισμό βαθμού 0, τον

$$H(\phi) = \phi_* : H(\mathbf{C}) \to H(\mathbf{D}),$$

των βαθμωτών modules. Είναι φανερό ότι ο $H(-)$ γίνεται ένας συναρτητής, ο **ομολογιακός συναρτητής**, από την κατηγορία $\mathfrak{Ch}(mod - \Lambda)$ των αλυσσωτών συμπλεγμάτων επί του Λ, στην κατηγορία $\mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}}$ των βαθμωτών Λ-modules. Επίσης, κάθε $H_n(-)$ είναι ένας συναρτητής μέσα στην κατηγορία $\mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}}$.

Σημείωση: ▲ Ο συναρτητής $H_n(-)$ είναι προσθετικός, καθώς διατηρεί τα αθροίσματα. Αυτό προκύπτει από το παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C}: \ \ldots \arrow[r, dotted] & C_{n+1} \arrow[r, dotted, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "i_{C_{n+1}}"'] & C_n \arrow[r, dotted, "\partial_n"] \arrow[d, "i_{C_n}"] & C_{n-1} \arrow[r, dotted, "\partial_{n-1}"] \arrow[d, "i_{C_{n-1}}"] & \cdots \\
\mathbf{C} \bigoplus \mathbf{D}: \ \ldots \arrow[r] & C_{n+1} \oplus D_{n+1} \arrow[r, "\{\partial,\partial\}"] & C_n \oplus D_n \arrow[r, "\{\partial_n,\partial_n\}"] & C_{n-1} \oplus C_{n-1} \arrow[r, "\{\partial,\partial\}"] & \cdots \\
\mathbf{D}: \ \ldots \arrow[r, dotted] & D_{n+1} \arrow[r, dotted, "\partial_{n+1}"'] \arrow[u, "i_{D_{n+1}}"] & D_n \arrow[r, dotted, "\partial_n"'] \arrow[u, "i_{D_n}"'] & D_{n-1} \arrow[r, dotted, "\partial_{n-1}"'] \arrow[u, "i_{D_{n-1}}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

και από τις σχέσεις:

$$H_n(\mathbf{C} \oplus \mathbf{D}) = ker\{\partial_n, \partial_n\}/im\{\partial_{n+1}, \partial_{n+1}\}$$

$$= ker\partial_n/im\partial_{n+1} \oplus ker\partial_n/im\partial_{n+1} = H_n(\mathbf{C}) \oplus H_n(\mathbf{D}). \quad \Diamond$$

Συχνά, ειδικά στις εφαρμογές στην τοπολογία, ονομάζουμε:

- τα στοιχεία του C_n : n-**αλυσσίδες**,
- τα στοιχεία του $ker\partial_n$: n-**κύκλους**,
- τα στοιχεία του $im\partial_{n+1}$: n-**σύνορα**,
- δύο κύκλους, που καθορίζουν το ίδιο στοιχείο του $H_n(\mathbf{C})$: **ομόλογα**,
- αν $c \in ker\partial_n$, το στοιχείο $[c] \in H_n(\mathbf{C})$: **ομολογιακή κλάση** του c

και σημειώνουμε:

$$\blacksquare\ \textit{τον}\ ker\partial_n : \quad Z_n = Z_n(\mathbf{C})$$

$$\blacksquare\ \textit{το}\ im\partial_{n+1} : \quad B_n = B_n(\mathbf{C}).$$

Είναι λοιπόν

$$\partial\partial = 0 \Longrightarrow 0 \subseteq B_n \subseteq Z_n \subseteq C_n, \ \forall n \in \mathbb{Z} \quad \text{και}$$

$$H_n(\mathbf{C}) = Z_n/B_n\text{: υπο-πηλίκο του } C_n.$$

Διευκρινίζεται ότι αν δοθεί ένα αλυσσωτό σύμπλεγμα $\mathbf{C}$, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα νέο αλυσσωτό σύμπλεγμα $\mathbf{C}'$, αντικαθιστώντας κάποια ή και όλα τα διαφορικά $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ από τα αντίθετά τους $-\partial_n : C_n \to C_{n-1}$. Όπως φαίνεται κι από το σχήμα, που ακολουθεί, $\mathbf{C} \cong \mathbf{C}'$:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "\phi_{n+1}"', "\wr"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\phi_n"', "\wr"] & C_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}"] \arrow[d, "\phi_{n-1}"', "\wr"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"] & C'_n \arrow[r, "\partial'_n"] & C'_{n-1} \arrow[r, "\partial'_{n-1}"] & \cdots,
\end{tikzcd}$$

όπου $\partial'_n(c_n) = \partial_n(c_n)$ ή $\partial'_n(c_n) = -\partial_n(c_n)$ και ανάλογα, $\phi_n(c_n) = \pm c_n$. Προφανώς, ο $\phi = \{\phi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι ισομορφισμός συμπλεγμάτων και

$$Z(\mathbf{C}) = Z(\mathbf{C}'), \quad B(\mathbf{C}) = B(\mathbf{C}') \implies H(\mathbf{C}) = H(\mathbf{C}').$$

Έτσι, στην ομολογιακή θεωρία των αλυσσωτών συμπλεγμάτων μπορούμε ελεύθερα, αν διευκολύνει, ν' αλλάζουμε τα πρόσημα κάποιων από τα διαφορικά.

Προχωρούμε τώρα, στον ορισμό και σε κάποιες διευκρινίσεις σε ό,τι αφορά τη δυϊκή έννοια, δηλαδή των συν-αλυσσωτών συμπλεγμάτων.

3.2.2 Ορισμός. ▶ Ένα **συν-αλυσσωτό σύμπλεγμα (cochain complex)** είναι ένα βαθμωτό module $\mathbf{C} = \{C^n, \delta^n\}$ της κατηγορίας $\mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}}$, με ένα ενδομορφισμό $\delta : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ βαθμού $+1$, όπου $\delta\delta = 0$. Έχουμε δηλαδή:

$$\mathbf{C} : \ \ldots \longrightarrow C^{n-1} \xrightarrow{\delta^{n-1}} C^n \xrightarrow{\delta^n} C^{n+1} \xrightarrow{\delta^{n+1}} \cdots.$$

▶ Ο δ, πάλι, ονομάζεται **διαφορικό (ή συνοριακός τελεστής)**.

▶ Μορφισμοί από συν-αλυσσωτά συμπλέγματα ονομάζονται **μορφισμοί συν-αλυσσωτών συμπλεγμάτων (cochain maps)** και ορίζονται κατά ανάλογο τρόπο με τους μορφισμούς συμπλεγμάτων.

3.2.3 Ορισμός. Αν δοθεί ένα συν-αλυσσωτό σύμπλεγμα $\mathbf{C} = \{C^n, \delta^n\}$, ορίζουμε το **συν-ομολογιακό** του **module**:

$$\boxed{H(\mathbf{C}) = \{H^n(\mathbf{C}), \quad H^n(\mathbf{C}) = ker\delta^n / im\delta^{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}.\}}$$

Ομοίως ο $H(-)$ γίνεται ένας συναρτητής, ο **συν-ομολογιακός συναρτητής**. Στην περίπτωση του συν-αλυσσωτού συμπλέγματος, μιλάμε για **συν-κύκλους, συν-σύνορα, συνομόλογους συν-κύκλους και συν-ομολογιακές κλάσεις**. Δηλαδή

$$Z^n(\mathbf{C}) = ker\delta^n, \quad B^n(\mathbf{C}) = im\delta^{n-1} \subseteq C^n, \quad H^n(\mathbf{C}) = Z^n(\mathbf{C})/B^n(\mathbf{C}).$$

Παρατήρηση: Η διαφορά μεταξύ συν-αλυσσωτών και αλυσσωτών συμπλεγμάτων είναι αρκετά τυπική, για ν' ασχοληθούμε με τις θεωρίες τους ξεχωριστά. Και πράγματι, αν δοθεί ένα αλυσσωτό σύμπλεγμα $\mathbf{C} = \{C_n, \partial_n\}$, μπορούμε να σχηματίσουμε το συν-αλυσσωτό σύμπλεγμα $\mathbf{D} = \{D^n, \delta^n\}$, θέτοντας $D^n = C_{-n}$ και $\delta^n = \partial_{-n}$:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{-n+1} \arrow[r, "\partial_{-n+1}"] \arrow[d, equal] & C_{-n} \arrow[r, "\partial_{-n}"] \arrow[d, equal] & C_{-n-1} \arrow[r, "\partial_{-n-1}"] \arrow[d, equal] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D^{n-1} \arrow[r, "\delta^{n-1}=\partial_{-n+1}"] & D^n \arrow[r, "\delta^n=\partial_{-n}"] & D^{n+1} \arrow[r, "\delta^{n+1}=\partial_{-n-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Αντιστρόφως, αν δοθεί ένα συν-αλυσσωτό σύμπλεγμα, με την ίδια μέθοδο παίρνουμε το αντίστοιχο αλυσσωτό σύμπλεγμα.

Επομένως και η κατηγορία των συν-αλυσσωτών συμπλεγμάτων είναι αβελιανή.

Παραδείγματα (συν-)αλυσσωτών συμπλεγμάτων:

♦ (i) Έστω A, B δύο $\Lambda-$modules και $R \rightarrowtail^{\mu} P \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} A$ μια προβολική παρουσίαση του A. Ορίζουμε ένα συν-αλυσσωτό σύμπλεγμα $\mathbf{C}$ αβελιανών ομάδων, ως εξής:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Hom_\Lambda(P,B) \arrow[r, "\mu^*"] \arrow[d, equal] & Hom_\Lambda(R,B) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C^0 \arrow[r, "\delta^0"] & C^1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

όπου $C^n = 0$ για $n \neq 0,\ 1$. Επειδή, όμως, η ακολουθία:

$0 \longrightarrow Hom_\Lambda(A,B) \overset{\varepsilon^*}{\rightarrowtail} Hom_\Lambda(P,B) \xrightarrow{\mu^*} Hom_\Lambda(R,B)$ είναι ακριβής, έχουμε

$$\Longrightarrow ker\mu^* = im\varepsilon^* = Hom_\Lambda(A,B)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \bullet\ H^0(\mathbf{C}) = ker\delta^0/im\delta^{-1} = ker\mu^*/0 = Hom_\Lambda(A,B)/0 \\ \bullet\ H^1(\mathbf{C}) = ker\delta^1/im\delta^0 = Hom_\Lambda(R,B)/im\mu^* = coker\mu^* \\ \bullet\ H^n(\mathbf{C}) = ker\delta^n/im\delta^{n-1} = 0/0, n \neq 0,\ 1. \end{cases}$$

Δηλαδή

- $H^0(\mathbf{C}) = Hom_\Lambda(A,B)$
- $H^1(\mathbf{C}) = Ext_\Lambda(A,B)$
- $H^n(\mathbf{C}) = 0, \quad n \neq 0,\ 1.$

Συνεπώς παίρνουμε τις ομάδες $Hom_\Lambda(A,B)$ και $Ext_\Lambda(A,B)$ ως συν-ομολογιακές ομάδες ενός κατάλληλου συν-αλυσσωτού συμπλέγματος C.

♦ (ii) Αν A, B δύο $\Lambda-$modules και $B \rightarrowtail^{\kappa} I \overset{\nu}{\twoheadrightarrow} S$ μια ενριπτική παρουσίαση του B, δημιουργούμε το συν-αλυσσωτό σύμπλεγμα $\mathbf{C}'$ αβελιανών ομάδων:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Hom_\Lambda(A,I) \arrow[r, "\nu_*"] \arrow[d, equal] & Hom_\Lambda(A,S) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & (C')^0 \arrow[r, "\delta^0"] & (C')^1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

όπου $(C')^n = 0$ για $n \neq 0,\ 1$. Η ακολουθία:

$0 \longrightarrow Hom_\Lambda(A,B) \xrightarrow{\kappa_*} Hom_\Lambda(A,I) \xrightarrow{\nu_*} Hom_\Lambda(A,S)$ είναι ακριβής

$$\Longrightarrow ker\nu_* = imk_* = Hom_\Lambda(A,B)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \bullet\ H^0(\mathbf{C}') = ker\delta^0/im\delta^{-1} = ker\nu_*/0 = Hom_\Lambda(A,B)/0 \\ \bullet\ H^1(\mathbf{C}') = ker\delta^1/im\delta^0 = Hom_\Lambda(A,S)/im\nu_* = coker\nu_* \\ \bullet\ ker\delta^n = 0, n \neq 0,\ 1. \end{cases}$$

Δηλαδή

- $H^0(\mathbf{C}') = Hom_\Lambda(A,B)$
- $H^1(\mathbf{C}') = Ext_\Lambda(A,B)$
- $H^n(\mathbf{C}') = 0, \quad n \neq 0,\ 1.$

3.2.4 Ορισμός. ▶ (i) Ένας μορφισμός συμπλεγμάτων $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$ ονομάζεται **ασθενής ισομορφισμός** (οι Bourbaki χρησιμοποιούν τον όρο ομολογισμός), αν οι μορφισμοί $H_n(\mathbf{C}) \to H_n(\mathbf{D})$ είναι όλοι ισομορφισμοί.

▶ (ii) Ένα **αλυσσωτό σύμπλεγμα** $\mathbf{C}$ λέγεται **φραγμένο** αν $C_n \neq 0$ για πεπερασμένο αριθμό $n \in \mathbb{Z}$.

▶ (iii) Αν $Cn = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$, εκτός αν $a \leq n \leq b$, λέμε ότι **το σύμπλεγμα έχει όρισμα στο** $[a,b]$.

▶ (iv) Ένα σύμπλεγμα $\mathbf{C}$ είναι **φραγμένο άνω** (αντίστοιχα **κάτω**) αν υπάρχει ένα **φράγμα** b (αντίστοιχα a) ώστε $Cn = 0$, για όλα τα $n > b$ (αντίστοιχα $n < a$).

Τα φραγμένα (αντίστοιχα: άνω ή κάτω φραγμένα) αλυσσωτά συμπλέγματα σχηματίζουν υπο-κατηγορίες της κατηγορίας των αλυσσωτών συμπλεγμάτων $\mathfrak{Ch}(mod - \Lambda)$, τις $\mathfrak{Ch}_\mathfrak{b}$ (αντίστοιχα: $\mathfrak{Ch}_-, \mathfrak{Ch}_+$).

Η υπο-κατηγορία $\mathfrak{Ch}_{\geq o}$ των **μη αρνητικών συμπλεγμάτων** (δηλαδή αυτών που $C_n = 0, \forall n < 0$) είναι μια άλλη σημαντική υπο-κατηγορία της $\mathfrak{Ch}(mod - \Lambda)$.

▶ Ανάλογα, έχουμε τους ορισμούς για τα **φραγμένα συν-αλυσσωτά συμπλέγματα**. Προφανώς ισχύει ότι:

$$\mathbf{C} = \{C_n\} : \text{φραγμένο άνω (κάτω)} \Longleftrightarrow \mathbf{D} = \{C^{-n}\} : \text{φραγμένο κάτω (άνω)}$$
$$\mathbf{C} : \text{φραγμένο} \Longleftrightarrow \mathbf{D} : \text{φραγμένο}.$$

Οι αντίστοιχες κατηγορίες είναι $\mathfrak{Ch}^\mathfrak{b}$, $\mathfrak{Ch}^-, \mathfrak{Ch}^+$, $\mathfrak{Ch}^{\geq o}$.

3.3 Μακρά ακριβής (συν-)ομολογιακή ακολουθία

Έχουμε ήδη τονίσει ότι η κατηγορία των (συν-)αλυσσωτών συμπλεγμάτων είναι αβελιανή. Συνεπώς έχει νόημα να μιλάμε για βραχείες, ακριβείς ακολουθίες (συν-)αλυσσωτών συμπλεγμάτων.

Προφανώς, η ακολουθία $\mathbf{A} \overset{\phi}{\rightarrowtail} \mathbf{B} \overset{\psi}{\twoheadrightarrow} \mathbf{C}$ των (συν-)αλυσσωτών συμπλεγμάτων $\mathbf{A} = \{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \mathbf{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \mathbf{C} = \{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι ακριβής, αν και μόνο αν $0 \longrightarrow A_n \overset{\phi_n}{\rightarrowtail} B_n \overset{\psi_n}{\twoheadrightarrow} C_n \longrightarrow 0$ είναι ακριβής, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

3.3.1 Θεώρημα. *Αν δοθεί μια βραχεία ακριβής ακολουθία αλυσσωτών (ή συν-αλυσσωτών) συμπλεγμάτων* $\mathbf{A} \overset{\phi}{\rightarrowtail} \mathbf{B} \overset{\psi}{\twoheadrightarrow} \mathbf{C}$, *υπάρχει ένας μορφισμός βαθμού* -1 *(ή* $+1$*) βαθμωτών modules* $\omega : H(\mathbf{C}) \to H(\mathbf{A})$, *ώστε το τρίγωνο που ακολουθεί να είναι ακριβές:*

$$\begin{tikzcd} H(\mathbf{A}) \arrow[rr, "\phi_*"] & & H(\mathbf{B}) \arrow[dl, "\psi_*"] \\ & H(\mathbf{C}). \arrow[ul, dotted, "\omega"] & \end{tikzcd}$$

Ο ω *ονομάζεται «συνδετικός ομομορφισμός».*

Συγκεκριμένα, το θεώρημα ισχυρίζεται ότι προκύπτουν μακρές ακριβείς ακολουθίες. Στην περίπτωση των αλυσσωτών συμπλεγμάτων η εξής:

$$\cdots \xrightarrow{\omega_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{\phi_*} H_n(B) \xrightarrow{\psi_*} H_n(C) \xrightarrow{\omega_n} H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots, \tag{3.2}$$

ενώ στην περίπτωση των συν-αλυσσωτών συμπλεγμάτων η ακολουθία:

$$\cdots \xrightarrow{\omega^{n-1}} H^n(A) \xrightarrow{\phi_*} H^n(B) \xrightarrow{\psi_*} H^n(C) \xrightarrow{\omega^n} H^{n+1}(A) \longrightarrow \cdots. \tag{3.3}$$

Πρώτα αποδεικνύουμε το επόμενο λήμμα.

3.3.2 Λήμμα. *Ο* $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ *επάγει τον* $\widetilde{\partial}_n : coker\partial_{n+1} \to ker\partial_{n-1}$ *με* $ker\widetilde{\partial}_n = H_n(\mathbf{C})$ *και* $coker\widetilde{\partial}_n = H_{n-1}(\mathbf{C})$.

Απόδειξη λήμματος: Αφού $im\partial_{n+1} \subseteq ker\partial_n$ και $im\partial_n \subseteq ker\partial_{n-1}$, το διαφορικό ∂_n επάγει μια συνάρτηση με τον εξής τρόπο:

$$coker\partial_{n+1} = C_n/im\partial_{n+1} \xrightarrow{\widetilde{\partial}_n} C_n/ker\partial_n \cong im\partial_n \subseteq ker\partial_{n-1}.$$

$$\begin{aligned} \text{Αν } x \in ker\widetilde{\partial}_n &\iff x \in coker\partial_{n+1} = C_n/im\partial_{n+1}, \widetilde{\partial}_n(x) = 0 \\ &\iff x \in ker\partial_n \subseteq C_n \qquad\qquad (\text{και επειδή } x \in C_n/im\partial_{n+1},) \\ &\iff x \in ker\partial_n/im\partial_{n+1}. \end{aligned}$$

Έτσι, προκύπτει ότι

$$ker\widetilde{\partial}_n = ker\partial_n/im\partial_{n+1} = H_n(\mathbf{C})$$

και ακόμα

$$coker\widetilde{\partial}_n (= ker\partial_{n-1}/im\widetilde{\partial}_n) = ker\partial_{n-1}/im\partial_n = H_{n-1}(\mathbf{C}). \quad \diamondsuit$$

Απόδειξη θεωρήματος: Θα δώσουμε την απόδειξη για αλυσσωτά συμπλέγματα (για συν-αλυσσωτά συμπλέγματα η απόδειξη είναι ανάλογη). Αρχικά, θεωρούμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & ker\partial_n \arrow[r] \arrow[d, dotted, tail] & ker\partial_n \arrow[r] \arrow[d, dotted, tail] & ker\partial_n \arrow[d, dotted, tail] & \\
& A_n \arrow[r, tail, "\phi_n"] \arrow[d, "\partial_n"'] & B_n \arrow[r, two heads, "\psi_n"] \arrow[d, "\partial_n"'] & C_n \arrow[d, "\partial_n"] & \\
& A_{n-1} \arrow[r, tail, "\phi_{n-1}"] \arrow[d, dotted, two heads] & B_{n-1} \arrow[r, two heads, "\psi_{n-1}"] \arrow[d, dotted, two heads] & C_{n-1} \arrow[d, dotted, two heads] & \\
& coker\partial_n \arrow[r] & coker\partial_n \arrow[r] & coker\partial_n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

που αντιμετατίθεται και για το οποίο, από το λήμμα του φιδιού (1.2.7), έχουμε ότι η ακολουθία στην κορυφή και η άλλη στη βάση είναι ακριβείς. Έτσι, λόγω του προηγούμενου λήμματος, έχουμε το αντιμεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
& H_n(\mathbf{A}) = ker\widetilde{\partial}_n \arrow[r] \arrow[d, dotted, tail] & H_n(\mathbf{B}) = ker\widetilde{\partial}_n \arrow[r] \arrow[d, dotted, tail] & H_n(\mathbf{C}) = ker\widetilde{\partial}_n \arrow[d, dotted, tail] & \\
& coker\partial_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, squiggly, "\widetilde{\partial}_n"'] & coker\partial_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, squiggly, "\widetilde{\partial}_n"] & coker\partial_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, squiggly, "\widetilde{\partial}_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & ker\partial_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, dotted, two heads] & ker\partial_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, dotted, two heads] & ker\partial_{n-1} \arrow[d, dotted, two heads] & \\
& H_{n-1}(\mathbf{A}) = coker\widetilde{\partial}_n \arrow[r] & H_{n-1}(\mathbf{B}) = coker\widetilde{\partial}_n \arrow[r] & H_{n-1}(\mathbf{C}) = coker\widetilde{\partial}_n &
\end{tikzcd}$$

και με εφαρμογή πάλι του λήμματος του φιδιού (1.2.7), παίρνουμε το μορφισμό:

$$\omega_n : H_n(\mathbf{C}) \longrightarrow H_{n-1}(\mathbf{A}),$$

που κάνει ακριβή τη μακρά ακολουθία:

$$\cdots \xrightarrow{\omega_{n+1}} H_n(\mathbf{A}) \xrightarrow{\phi_*} H_n(\mathbf{B}) \xrightarrow{\psi_*} H_n(\mathbf{C}) \xrightarrow{\omega_n} H_{n-1}(\mathbf{A}) \longrightarrow \cdots \qquad \Diamond$$

<u>**Παρατήρηση:**</u> Όπως στο λήμμα του φιδιού ο συνδετικός μορφισμός ω, έτσι κι εδώ, ισοδύναμα, ο ω_n καθορίζεται με την ακόλουθη διαδικασία:

Έστω $c \in C_n$ ένας αντιπρόσωπος - κύκλος της ομολογιακής κλάσης $[c] \in H_n(C)$. Όπως φαίνεται και στο ακόλουθο αντιμεταθετικό σχήμα:

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[r, dotted, tail, "\phi_{n+1}"] \arrow[d, dotted, "\partial_{n+1}"'] & \vdots \arrow[r, dotted, two heads, "\psi_{n+1}"] \arrow[d, dotted, "\partial_{n+1}"'] & \vdots \arrow[d, dotted, "\partial_{n+1}"] \\
A_n \arrow[r, tail, "\phi_n"] \arrow[d, "\partial_n"'] & B_n(\ni b) \arrow[r, two heads, "\psi_n"] \arrow[d, "\partial_n"'] & C_n(\ni c) \arrow[d, "\partial_n"] \\
(a \in)A_{n-1} \arrow[r, tail, "\phi_{n-1}"] \arrow[d, dotted, "\partial_{n-1}"'] & B_{n-1} \arrow[r, two heads, "\psi_{n-1}"] \arrow[d, dotted, "\partial_{n-1}"'] & C_{n-1} \arrow[d, dotted, "\partial_{n-1}"] \\
\vdots \arrow[r, dotted, tail, "\phi_{n-2}"] & \vdots \arrow[r, dotted, two heads, "\psi_{n-2}"] & \vdots
\end{tikzcd}$$

επειδή ψ_n: επιμορφισμός, διαλέγουμε $b \in B_n$, με $\psi(b) = c$. Τότε έχουμε:

$$\psi\partial b = \partial\psi b = \partial c = 0 \implies \partial b \in ker\psi = im\phi$$

$$\implies \exists a \in A_{n-1}, \phi a = \partial b \implies \phi\partial a = \partial\phi a = \partial\partial b = 0.$$

Έτσι, ο a είναι ένας κύκλος του $Z_{n-1}(\mathbf{A})$ και ως εκ τούτου, ορίζει ένα στοιχείο $[a] \in H_{n-1}(\mathbf{A})$. Ο μορφισμός λοιπόν ω_n δίνεται από τον τύπο:

$$\omega_n[c] = [a].$$

<u>**Σημείωση:**</u> Υπογραμμίζουμε ότι η φυσικότητα της ακολουθίας "$ker-coker$" του λήμματος (1.2.7) (του φιδιού), συνεπάγεται τη φυσικότητα των ακολουθιών (3.2) και (3.3) του πιο πάνω θεωρήματος. Αυτό σημαίνει ότι ένα αντιμεταθετικό διάγραμμα αλυσσωτών (ή συν-αλυσσωτών) συμπλεγμάτων:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, tail, "\phi"] \arrow[d] & \mathbf{B} \arrow[r, two heads, "\psi"] \arrow[d] & \mathbf{C} \arrow[d] \\
\mathbf{A}' \arrow[r, tail, "\phi'"] & \mathbf{B}' \arrow[r, two heads, "\psi'"] & \mathbf{C}'
\end{tikzcd}$$

με ακριβείς σειρές αντιστοιχίζεται, μέσω της μακράς (συν-)ομολογιακής ακολουθίας, στο αντιμεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\omega_{n+1}"] \arrow[d, dotted] & H_n(\mathbf{A}) \arrow[r, "\phi_*"] \arrow[d] & H_n(\mathbf{B}) \arrow[r, "\psi_*"] \arrow[d] & H_n(\mathbf{C}) \arrow[r, "\omega_n"] \arrow[d] & H_{n-1}(\mathbf{A}) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[d, dotted] \\
\cdots \arrow[r, "\omega'_{n+1}"] & H_n(\mathbf{A}') \arrow[r, "\phi'_*"] & H_n(\mathbf{B}') \arrow[r, "\psi'_*"] & H_n(\mathbf{C}') \arrow[r, "\omega'_n"] & H_{n-1}(\mathbf{A}') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd},$$

ή στο ακόλουθο αντιμεταθετικό, για την περίπτωση συν-αλυσσωτών συμπλεγμάτων:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\omega^{n-1}"] \arrow[d, dotted] & H^n(\mathbf{A}) \arrow[r, "\phi_*"] \arrow[d] & H^n(\mathbf{B}) \arrow[r, "\psi_*"] \arrow[d] & H^n(\mathbf{C}) \arrow[r, "\omega^n"] \arrow[d] & H^{n+1}(\mathbf{A}) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[d, dotted] \\
\cdots \arrow[r, "\omega'^{n-1}"] & H^n(\mathbf{A}') \arrow[r, "\phi'_*"] & H^n(\mathbf{B}') \arrow[r, "\psi'_*"] & H^n(\mathbf{C}') \arrow[r, "\omega'_n"] & H^{n+1}(\mathbf{A}') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

<u>**Παραδείγματα:**</u> ♦ (i)Έστω $R \overset{\mu}{\rightarrowtail} F \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} A$ μια ελεύθερη παρουσίαση μιας αβελιανής ομάδας A (δηλαδή οι F και R είναι ελεύθερες αβελιανές ομάδες) και $B' \overset{\beta'}{\rightarrowtail} B \overset{\beta''}{\twoheadrightarrow} B''$ μια βραχεία, ακριβής ακολουθία των αβελιανών ομάδων B', B, B''. Δημιουργούνται, έτσι τα συν-αλυσσωτά συμπλέγματα:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C}' : \arrow[d, squiggly, "\beta'_*"'] & 0 \arrow[r] & Hom_\Lambda(F, B') \arrow[r, "\mu^*"] \arrow[d, tail, "\beta'_*"'] & Hom_\Lambda(R, B') \arrow[r] \arrow[d, tail, "\beta'_*"] & 0 \\
\mathbf{C} : \arrow[d, squiggly, "\beta''_*"'] & 0 \arrow[r] & Hom_\Lambda(F, B) \arrow[r, "\mu^*"] \arrow[d, two heads, "\beta''_*"'] & Hom_\Lambda(R, B) \arrow[r] \arrow[d, two heads, "\beta''_*"] & 0 \\
\mathbf{C}'' : & 0 \arrow[r] & Hom_\Lambda(F, B'') \arrow[r, "\mu^*"] & Hom_\Lambda(R, B'') \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Επειδή λοιπόν, οι F, R είναι ελεύθερες, αβελιανές ομάδες, έπεται ότι και οι δύο στήλες του διαγράμματος είναι βραχείες, ακριβείς ακολουθίες, επομένως έχουμε τη βραχεία, ακριβή ακολουθία συν-αλυσσωτών συμπλεγμάτων: $\mathbf{C}' \overset{\beta'_*}{\rightarrowtail} \mathbf{C} \overset{\beta''_*}{\twoheadrightarrow} \mathbf{C}''$.
Από το θεώρημα (3.3.1) προκύπτει η μακρά, ακριβής ακολουθία συν-ομολόγων:

$$\cdots \xrightarrow{\omega^{n-1}} H^n(\mathbf{C}') \xrightarrow{\beta'_*} H^n(\mathbf{C}) \xrightarrow{\beta''_*} H^n(\mathbf{C}'') \xrightarrow{\omega^n} H^{n+1}(\mathbf{C}') \longrightarrow H^{n+1}(\mathbf{C}) \longrightarrow \cdots.$$

όπου ▲ $H^n(\mathbf{C}) = \dfrac{ker\mu^*}{im[0 \to Hom_\Lambda(F,B)]} = ker\mu^*$

$$= im[Hom_\Lambda(A,B) \rightarrowtail Hom_\Lambda(F,B)] = Hom_\Lambda(A,B),$$

και ▼ $H^{n+1}(\mathbf{C}) = \dfrac{ker[Hom_\Lambda(R,B) \to 0]}{im\mu^*} = \dfrac{Hom_\Lambda(R,B)}{im\mu^*}$

$$= coker\mu^* = Ext_\Lambda(A,B).$$

Ανάλογα, προκύπτουν τα $H^n(\mathbf{C}')$, $H^n(\mathbf{C}'')$ και τα $H^{n+1}(\mathbf{C}')$, $H^{n+1}(\mathbf{C}'')$. Έτσι, καταλήγουμε στην ακολουθία:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow Hom_\Lambda(A,B') & \xrightarrow{\beta'_*} & Hom_\Lambda(A,B) & \xrightarrow{\beta''_*} & Hom_\Lambda(A,B'') \\
 & & & & \Big\downarrow \omega \\
0 \longleftarrow Ext_\Lambda(A,B'') & \xleftarrow{\beta''_*} & Ext_\Lambda(A,B) & \xleftarrow{\beta'_*} & Ext_\Lambda(A,B')
\end{array}$$

που είναι η μακρά, ακριβής ακολουθία του θεωρήματος (2.5.1).

♦ (ii) Αν κινηθούμε με τον ίδιο τρόπο, για τη βραχεία, ακριβή ακολουθία των αβελιανών ομάδων A', A, A'': $A' \overset{\alpha'}{\rightarrowtail} A \overset{\alpha''}{\twoheadrightarrow} A''$, διαλέγοντας, ταυτόχρονα, μια ενριπτική παρουσίαση της αβελιανής ομάδας B, καταλήγουμε στη μακρά, ακριβή ακολουθία:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow Hom_\Lambda(A'',B) & \xrightarrow{\alpha''^*} & Hom_\Lambda(A,B) & \xrightarrow{\alpha'^*} & Hom_\Lambda(A',B) \\
 & & & & \Big\downarrow \omega \\
0 \longleftarrow Ext_\Lambda(A',B) & \xleftarrow{\alpha'^*} & Ext_\Lambda(A,B) & \xleftarrow{\alpha''^*} & Ext_\Lambda(A'',B)
\end{array}$$

του θεωρήματος (2.5.2).

3.4 Έννοιες ομοτοπίας

Αν δοθούν δύο αλυσσωτά συμπλέγματα $\mathbf{C}$ και $\mathbf{D}$ και δύο μορφισμοί συμπλεγμάτων $\phi, \psi : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$, υπάρχει ένα σημαντικό ερώτημα, για το πότε και κάτω από ποιες συνθήκες, οι ϕ και ψ επάγουν τον ίδιο ομομορφισμό μεταξύ των $H(\mathbf{C})$ και $H(\mathbf{D})$.

Για τη μελέτη του συγκεκριμένου θέματος, εισάγουμε την έννοια της ομοτοπίας. Δηλαδή περιγράφουμε μία σχέση που συνδέει τους μορφισμούς ϕ, ψ, ικανή ώστε να ισχύει:

$$\phi_* = \psi_* : H(\mathbf{C}) \longrightarrow H(\mathbf{D}).$$

Αν και η σχέση αυτή δεν είναι αναγκαία ώστε να δώσει $\phi_* = \psi_*$, άρα δεν απαντά πλήρως στο προηγούμενο ερώτημα, εν τούτοις, ανταποκρίνεται πολύ καλά στους συναρτητές συμπλεγμάτων και ως εκ τούτου, είναι πολύ χρήσιμη ως έννοια. Αυτό, διότι στις περισσότερες από τις περιπτώσεις που ζητάμε να δείξουμε ότι $\phi_* = \psi_*$ (και μάλιστα σ' αυτές που θα μας απασχολήσουν), τούτο προκύπτει ως συνέπεια της ύπαρξης μιας ομοτοπίας.

Εδώ θ' ασχοληθούμε με την περίπτωση των αλυσσωτών συμπλεγμάτων, ενώ ανάλογη είναι η πορεία για τα συν-συμπλέγματα.

3.4.1 Ορισμός. Ομοτοπία $\mathbf{\Sigma}$: $\phi \to \psi$ μεταξύ δύο μορφισμών συμπλεγμάτων $\phi, \psi : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ είναι ένας μορφισμός βαθμού $+1$, των βαθμωτών modules $\mathbf{C}$ και $\mathbf{D}$, δηλαδή $\mathbf{\Sigma} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, τέτοιων ώστε

$$\psi - \phi = \partial\mathbf{\Sigma} + \mathbf{\Sigma}\partial.$$

Το οποίο σημαίνει ότι

$\forall n \in \mathbb{Z}$, ισχύει

$$[\psi_n - \phi_n = \partial_{n+1}\Sigma_n + \Sigma_{n-1}\partial_n] \quad : \quad C_n \longrightarrow D_n$$

για το διάγραμμα (όχι γενικά αντιμεταθετικό), που ακολουθεί:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, dotted] & C_{n+1} \arrow[r, dotted, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, squiggly, "\Sigma_{n+1}"'] \arrow[dr, shift left, "\psi_{n+1}"] \arrow[dr, shift right, "\phi_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, squiggly, "\Sigma_n"] \arrow[dr, shift left, "\psi_n"] \arrow[dr, shift right, "\phi_n"'] & C_{n-1} \arrow[r, dotted, "\partial_{n-1}"] \arrow[d, squiggly, "\Sigma_{n-1}"] \arrow[dr, shift left, "\psi_{n-1}"] \arrow[dr, shift right, "\phi_{n-1}"'] & C_{n-2} \arrow[r, dotted, "\partial_{n-2}"] \arrow[d, squiggly, "\Sigma_{n-2}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, dotted] & D_{n+2} \arrow[r, dotted, "\partial_{n+2}"'] & D_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"'] & D_n \arrow[r, dotted, "\partial_n"'] & D_{n-1} \arrow[r, dotted, "\partial_{n-1}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Αν υπάρχει μια τέτοια ομοτοπία $\mathbf{\Sigma} : \phi \to \psi$, λέμε ότι οι **μορφισμοί** ϕ και ψ είναι **ομοτοπικοί** και γράφουμε $\phi \simeq \psi$.

Η ουσιαστική χρησιμότητα των ομοτοπιών δίνεται στην επόμενη πρόταση.

3.4.2 Πρόταση. *Αν δύο μορφισμοί ϕ, ψ δύο αλυσσωτών συμπλεγμάτων $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ είναι ομοτοπικοί, τότε οι μορφισμοί που αυτοί επάγουν μεταξύ των αντίστοιχων ομολογιών, είναι ίσοι. Δηλαδή*

$$\phi \simeq \psi : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D} \quad \Longrightarrow \quad H(\phi) = H(\psi) : H(\mathbf{C}) \longrightarrow H(\mathbf{D}).$$

Απόδειξη: Έστω $[z] \in H_n(\mathbf{C})$ ένας κύκλος του C_n, δηλαδή $z \in ker\partial_n$.

Τότε $\forall n \in \mathbb{Z}$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\phi \simeq \psi &\Longrightarrow \exists \mathbf{\Sigma} : \phi \to \psi && \text{(ομοτοπία)}\\
&\Longrightarrow (\psi_n - \phi_n)z = \partial_{n+1}\Sigma_n z + \Sigma_{n-1}\partial_n z\\
&\Longrightarrow (\psi_n - \phi_n)z = \partial_{n+1}\Sigma_n z && (\text{διότι } \partial_n z = 0)\\
&\Longrightarrow \psi_n(z) - \phi_n(z) \in im\partial_{n+1} && (\text{είναι ένα σύνορο στο } D_n)\\
&\Longrightarrow [\psi_n(z)] = [\phi_n(z)] \quad (\in H_n(\mathbf{D}))\\
&\Longrightarrow \psi_n(z),\ \phi_n(z)\text{: ομόλογα. Οπότε}
\end{aligned}$$

$$H(\phi) = H(\psi). \quad \Diamond$$

<u>**Σημείωση:**</u> Στην ειδική περίπτωση που $\phi = \mathbf{0} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ και $\psi = \mathbf{1} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, η ομοτοπία $\mathbf{\Sigma} : \mathbf{0} \to \mathbf{1}$ ονομάζεται **συστελλόμενη ομοτοπία** για το αλυσσωτό σύμπλεγμα $\mathbf{C}$. Οι ομομορφισμοί $\Sigma_n : C_n \to C_{n+1}$ αυτής της ομοτοπίας, ικανοποιούν τη σχέση: $\partial_{n+1}\Sigma_n + \Sigma_{n-1}\partial_n = 1$, $n \in \mathbb{Z}$. Λόγω της προηγούμενης πρότασης (3.4.2), η ύπαρξη μιας συστελλόμενης ομοτοπίας συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned}
H(\mathbf{C}) = \mathbf{0} &\Longrightarrow H_n(\mathbf{C}) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}\\
&\Longrightarrow ker\partial_n / im\partial_{n+1} = 0\\
&\Longrightarrow ker\partial_n = im\partial_{n+1}, \forall n \in \mathbb{Z}\\
&\Longrightarrow \mathbf{C} : \text{ακριβές.}
\end{aligned}$$

Δηλαδή, με την κατασκευή μιας συστελλόμενης ομοτοπίας $\mathbf{\Sigma} : \mathbf{0} \to \mathbf{1}$, επιτυγχάνεται η δημιουργία ακριβούς αλυσσωτού συμπλέγματος.

Θ' αναφέρουμε στη συνέχεια κάποια συμπεράσματα που εξάγονται από την ομοτοπική σχέση.

3.4.3 Λήμμα. *Η ομοτοπική σχέση "$\simeq$" είναι σχέση ισοδυναμίας.*

Απόδειξη: Η σχέση ομοτοπίας " $\simeq$ " είναι:

◀ (i) Αυτοπαθής: $\forall \psi \in \mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}}(\mathbf{C},\mathbf{D})$, $\exists \mathbf{\Sigma} = \mathbf{0} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$,
$\psi - \psi = \partial\mathbf{\Sigma} + \mathbf{\Sigma}\partial = 0 + 0 \Longrightarrow \quad \psi \simeq \psi.$

◀ (ii) Συμμετρική: $\forall \phi, \psi \in \mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}}(\mathbf{C},\mathbf{D})$, με $\phi \simeq \psi$
$\Longrightarrow \exists \mathbf{\Sigma} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}, \psi - \phi = \partial\mathbf{\Sigma} + \mathbf{\Sigma}\partial$
$\Longrightarrow \exists \mathbf{\Sigma}' = -\mathbf{\Sigma} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}, \phi - \psi = \partial(-\mathbf{\Sigma}) + (-\mathbf{\Sigma})\partial \Longrightarrow \quad \psi \simeq \phi.$

◀ (iii) Μεταβατική: $\forall \phi, \psi, \tau \in \mathfrak{M}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}}(\mathbf{C},\mathbf{D})$, όπου $\phi \simeq \psi$ και $\psi \simeq \tau$
$\Longrightarrow \exists \mathbf{\Sigma}, \mathbf{T} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, $\psi - \phi = \partial\mathbf{\Sigma} + \mathbf{\Sigma}\partial$ και $\tau - \psi = \partial\mathbf{T} + \mathbf{T}\partial$
$\Longrightarrow \tau - \phi = \partial(\mathbf{\Sigma} + \mathbf{T}) + (\mathbf{\Sigma} + \mathbf{T})\partial \Longrightarrow \quad \phi \simeq \tau. \quad \lozenge$

3.4.4 Λήμμα. *Αν $\phi \simeq \psi : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ και $\phi' \simeq \psi' : \mathbf{D} \to \mathbf{E}$, τότε*

$$\phi'\phi \simeq \psi'\psi : \mathbf{C} \to \mathbf{E}.$$

Απόδειξη: Αν $\exists \mathbf{\Sigma} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}, \psi - \phi = \partial\mathbf{\Sigma} + \mathbf{\Sigma}\partial$
$\Longrightarrow \phi'\psi - \phi'\phi = \phi'\partial\mathbf{\Sigma} + \phi'\mathbf{\Sigma}\partial = \partial(\phi'\mathbf{\Sigma}) + (\phi'\mathbf{\Sigma})\partial \quad (\phi'\partial = \partial\phi'$ σχ. 3.1)
$\Longrightarrow \phi'\phi \simeq \phi'\psi.$

Ακόμη, αν $\exists \mathbf{T} : \mathbf{D} \to \mathbf{E}, \psi' - \phi' = \partial\mathbf{T} + \mathbf{T}\partial$
$\Longrightarrow \psi'\psi - \phi'\psi = \partial\mathbf{T}\psi + \mathbf{T}\partial\psi = \partial(\mathbf{T}\psi) + (\mathbf{T}\psi)\partial \qquad (\partial\psi = \psi\partial$ σχ.(3.1»
$\Longrightarrow \phi'\psi \simeq \psi'\psi.$

Άρα, λόγω μεταβατικότητας,

$$\phi'\phi \simeq \psi'\psi. \quad \lozenge$$

Σημείωση: ▲ Από την προηγούμενη απόδειξη, φαίνεται ότι αν $\mathbf{\Sigma} : \phi \to \psi$ και $\mathbf{T} : \phi' \to \psi'$ είναι ομοτοπίες, τότε $\phi'\mathbf{\Sigma} : \phi'\phi \to \phi'\psi$ και $\mathbf{T}\psi : \phi'\psi \to \psi'\psi$ είναι, επίσης, ομοτοπίες.

▼ Το λήμμα που προηγήθηκε, μας επιτρέπει να συνδέουμε την κατηγορία $\mathfrak{Ch}(mod - \Lambda)$ των αλυσσωτών συμπλεγμάτων και μορφισμών μεταξύ τους με αυτή των αλυσσωτών συμπλεγμάτων και των ομοτοπικών κλάσεων των μορφισμών συμπλεγμάτων, που την ονομάζουμε **ομοτοπική κατηγορία** . Αυτή η μετάβαση γίνεται απλά, με το να ταυτίζουμε τις κλάσεις δύο μορφισμών συμπλεγμάτων, αν αυτοί οι μορφισμοί είναι ομοτοπικοί.

3.4.5 Λήμμα. *Έστω $F : \mathfrak{M}_{\Lambda} \to \mathfrak{M}_{\Lambda'}$ ένας προσθετικός συναρτητής και $\phi \simeq \psi : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, όπου $\mathbf{C}$ και $\mathbf{D}$ αλυσσωτά συμπλέγματα από Λ-modules, τότε*

$$F\phi \simeq F\psi : F\mathbf{C} \to F\mathbf{D}.$$

Απόδειξη: Αν $\phi \simeq \psi : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ και $\mathbf{\Sigma} : \phi \to \psi$, τότε είναι

$$F\psi - F\phi = F(\psi - \phi) = F(\partial\mathbf{\Sigma} + \mathbf{\Sigma}\partial) = F\partial(F\mathbf{\Sigma}) + (F\mathbf{\Sigma})F\partial.$$

Άρα $F\mathbf{\Sigma} : F\phi \to F\psi. \quad \lozenge$

Σημείωση: ▲ Έτσι, ένας προσθετικός συναρτητής F επάγει ένα συναρτητή μεταξύ των ομοτοπικών κατηγοριών, καθώς επίσης, λόγω της πρότασης (3.4.2) και ο ομολογιακός συναρτητής μπορεί να δράσει μέσα από την ομοτοπική κατηγορία.

Από την πρόταση (3.4.2) και το λήμμα (3.4.5) καταλήγουμε, άμεσα, στο ακόλουθο πόρισμα.

3.4.6 Πόρισμα. *Αν $\phi \simeq \psi : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ και F: προσθετικός συναρτητής, τότε*

$$H(F\phi) = H(F\psi) : H(F\mathbf{C}) \to H(F\mathbf{D}).$$

3.4.7 Ορισμός. Λέμε ότι δύο **συμπλέγματα** $\mathbf{C}$ και $\mathbf{D}$ είναι **του ίδιου ομοτοπικού τύπου (ή ομοτοπικά)**, αν αυτά είναι *ισομορφικά στην κατηγορία ομοτοπίας*, το οποίο συμβαίνει όταν υπάρχουν μορφισμοί συμπλεγμάτων $\phi : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ και $\psi : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$, τέτοιοι ώστε:

$$\psi\phi \simeq \mathbf{1_C} \quad \text{και} \quad \phi\psi \simeq \mathbf{1_D}.$$

Ο μορφισμός συμπλεγμάτων ϕ (ή ψ) ονομάζεται τότε, **ομοτοπική ισοδυναμία**.

3.5 Επιλύσεις

Σ' αυτή την ενότητα εισάγουμε ένα βασικό εργαλείο για την ανάπτυξη της θεωρίας των παραγώγων συναρτητών, που είναι χαρακτηριστική περίπτωση (συν-)αλυσσωτού συμπλέγματος. Προς το παρόν, περιοριζόμαστε σε μη αρνητικά αλυσσωτά συμπλέγματα της κατηγορίας $\mathfrak{Ch}_{\geq 0}$, που, όπως ήδη έχουμε αναφέρει, είναι του τύπου

$$\mathbf{C} : ... \longrightarrow C_n \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow ... \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow 0 \tag{5.1}$$

δηλαδή $C_n = 0, \quad \forall n < 0$.

3.5.1 Ορισμός. ► Ένα μη αρνητικό αλυσσωτό σύμπλεγμα $\mathbf{C} = \{C_n\}$ λέγεται:

- **προβολικό** αν το C_n είναι προβολικό, $\forall n \geq 0$ και
- **α-κυκλικό** αν $H_n(\mathbf{C}) = 0, \forall n \geq 1$.

► **Προβολική επίλυση του** A ονομάζεται ένα (μη αρνητικό) προβολικό και α-κυκλικό σύμπλεγμα

$$\mathbf{P} : ... \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow ... \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0$$

μαζί με ένα ισομορφισμό $H_0(\mathbf{P}) \xrightarrow{\sim} A$.

Στη συνέχεια, θα ταυτίζουμε το $H_0(\mathbf{P})$ με το A, διά του δοθέντος ισομορφισμού.

Παρατήρηση: ▲ Το μη αρνητικό σύμπλεγμα $\mathbf{C}$ είναι α-κυκλικό, αν και μόνο αν η ακολουθία:

$$... \longrightarrow C_n \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow ... \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow H_0(\mathbf{C}) \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής. Κι αυτό, διότι $\forall n \geq 1$, ισχύει
$H_n(\mathbf{C}) = 0 \Longleftrightarrow ker\partial_n/im\partial_{n+1} = 0 \Longleftrightarrow ker\partial_n = im\partial_{n+1}$. Ενώ

$$H_0(\mathbf{C}) = ker\partial_0/im\partial_1 = C_0/im\partial_1 = coker\partial_1.$$

▼ Επομένως μια προβολική επίλυση του Λ-module A, ισοδύναμα, θα δίνει μια ακριβή ακολουθία της μορφής:

$$... \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow ... \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

όπου P_n: προβολικό, $\forall n \geq 0$.

3.5.2 Θεώρημα. *Αν δοθεί το προβολικό σύμπλεγμα*

$\mathbf{C} : ... \longrightarrow C_n \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow ... \longrightarrow C_0$ *και το α-κυκλικό σύμπλεγμα*

$\mathbf{D} : ... \longrightarrow D_n \longrightarrow D_{n-1} \longrightarrow ... \longrightarrow D_0$, *τότε*

(i) *για κάθε ομομορφισμό* $\phi : H_0(\mathbf{C}) \to H_0(\mathbf{D})$, *υπάρχει ένας μορφισμός συμπλεγμάτων* $\phi' : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, *που επάγει τον* ϕ *και*

(ii) *αν δύο μορφισμοί συμπλεγμάτων επάγουν τον* ϕ, *είναι ομοτοπικοί.*

Απόδειξη: ◄ (i) Θα ορίσουμε το μορφισμό συμπλεγμάτων $\phi' : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ αναδρομικά. Ξεκινώντας από το α-κυκλικό $\mathbf{D}$, παίρνουμε την ακριβή ακολουθία

$D_0 \to H_0(\mathbf{D}) \to 0$. Λόγω της προβολικότητας του C_0, υπάρχει $\phi'_0 : C_0 \to D_0$ ώστε το τετράγωνο:

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\phi'_0"'] & H_0(\mathbf{C}) \arrow[d, squiggly, "\phi"] \\ D_0 \arrow[r, two heads] & H_0(\mathbf{D}) \end{tikzcd} \tag{5.2}$$

ν' αντιμετατίθεται. Υποθέτουμε ότι $n \geqq 1$ και έχουν οριστεί τα $\phi'_0, \phi'_1, ..., \phi'_{n-1}$. Θεωρούμε τότε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, dotted, "\phi'_n"'] & C_{n-1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, squiggly, "\phi'_{n-1}"] & C_{n-2} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, squiggly, "\phi'_{n-2}"] & \cdots \\ D_n \arrow[r, "\partial"] & D_{n-1} \arrow[r, "\partial"] & D_{n-2} \arrow[r, "\partial"] & \cdots \end{tikzcd} \tag{5.3}$$

[Αν $n = 1$, τότε $C_{-1} = H_0(C), D_{-1} = H_0(D)$ και το δεξί τετράγωνο του παραπάνω διαγράμματος (5.3), είναι ακριβώς το τετράγωνο (5.2)]

Έχουμε, λοιπόν,

$\partial\phi'_{n-1} = \phi'_{n-2}\partial \Longrightarrow \partial\phi'_{n-1}\partial = \phi'_{n-2}\partial\partial = 0$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow im\phi'_{n-1}\partial \subseteq ker\partial : D_{n-1} \to D_{n-2} \\ &\qquad\qquad\qquad = im\partial : D_n \to D_{n-1} \\ &\Longrightarrow (D_n \to im\phi'_{n-1}\partial)\text{: επιμορφισμός} \\ &\Longrightarrow \exists \phi'_n : C_n \to D_n,\ \phi'_{n-1}\partial = \partial\phi'_n \qquad (C_n\text{: προβολικό}). \end{aligned}$$

Έτσι, ολοκληρώνεται το επαγωγικό βήμα για τον προσδιορισμό του ϕ'_n.

◀ (ii) Έστω, τώρα, ότι δύο μορφισμοί συμπλεγμάτων οι $\phi' = \{\phi'_n\}$ και $\psi' = \{\psi'_n\}$ επάγουν τον ίδιο ομομορφισμό $\phi : H_0(\mathbf{C}) \to H_0(\mathbf{D})$. Αναδρομικά θα προσδιορίσουμε μια ομοτοπία $\mathbf{\Sigma} : \psi' \to \phi'$.
Αρχικά, θεωρούμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\phi'_1"'] \arrow[d, shift left, "\psi'_1"] & C_0 \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, shift right, "\phi'_0"'] \arrow[d, shift left, "\psi'_0"] \arrow[dl, dotted, "\Sigma_0"'] & H_0(\mathbf{C}) \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & 0 \\ D_1 \arrow[r, "\partial"'] & D_0 \arrow[r, "\kappa"'] & H_0(\mathbf{D}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Οι ϕ'_0 και ψ'_0 επάγουν τον ϕ $\Longrightarrow \kappa(\phi'_0 - \psi'_0) = \lambda\phi - \lambda\phi = 0$

$$\Longrightarrow im(\phi'_0 - \psi'_0) \subseteq ker\kappa = im(D_1 \to D_0)$$

$$\Longrightarrow (D_1 \to im(\phi'_0 - \psi'_0)): \text{ επιμορφισμός}$$

$$(\text{επειδή } C_0\text{: προβολικό}), \quad \Longrightarrow \exists \Sigma_0 : C_0 \to D_1, \phi'_0 - \psi'_0 = \partial\Sigma_0.$$

Υποθέτουμε, τώρα, ότι $n \geqq 1$ και ότι έχουν οριστεί οι μορφισμοί $\Sigma_0, \Sigma_1, ..., \Sigma_{n-1}$, έτσι ώστε $\phi'_r - \psi'_r = \partial\Sigma_r + \Sigma_{r-1}\partial$, $0 \leqq r \leqq n-1$ (θεωρώντας το $\Sigma_{-1}\partial = 0$). Θα προσδιορίσουμε τον $\Sigma_n : C_n \to D_{n-1}$. Από το παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, shift right, "\phi'_{n+1}"'] \arrow[d, shift left, "\psi'_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[dl, dotted, "\Sigma_n"] \arrow[d, shift right, "\phi'_n"'] \arrow[d, shift left, "\psi'_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[dl, squiggly, "\Sigma_{n-1}"'] \arrow[d, shift right, "\phi'_{n-1}"'] \arrow[d, shift left, "\psi'_{n-1}"] & \cdots \\
D_{n+1} \arrow[r, "\partial"'] & D_n \arrow[r, "\partial"'] & D_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

έχουμε $\partial(\phi'_n - \psi'_n - \Sigma_{n-1}\partial) = \phi'_{n-1}\partial - \psi'_{n-1}\partial - \partial\Sigma_{n-1}\partial$
$= (\phi'_{n-1} - \psi'_{n-1} - \partial\Sigma_{n-1})\partial = \Sigma_{n-2}\partial\partial = 0.$

Άρα $im(\phi'_n - \psi'_n - \Sigma_{n-1}\partial) \subseteq ker\partial : D_n \to D_{n-1} = im\partial : D_{n+1} \to D_n$,

επομένως $(D_{n+1} \to im(\phi'_n - \psi'_n - \Sigma_{n-1}))$: επιμορφισμός.

Αφού λοιπόν C_n: προβολικό, $\exists \Sigma_n : C_n \to D_{n+1}, \phi'_n - \psi'_n - \Sigma_{n-1}\partial = \partial\Sigma_n$.

Ορίσαμε δηλαδή την ομοτοπία $\mathbf{\Sigma} : \psi' \to \phi'$. $\Diamond$

3.5.3 Λήμμα. *Για κάθε Λ-module A, υπάρχει μία προβολική του επίλυση.*

Απόδειξη: Διαλέγουμε μια προβολική παρουσίαση (υπάρχει πάντοτε στην κατηγορία $\mathfrak{M}_\Lambda$) του A: $R_1 \rightarrowtail P_0 \twoheadrightarrow A$. Στη συνέχεια, μια προβολική παρουσίαση του R_1: $R_2 \rightarrowtail P_1 \twoheadrightarrow R_1$ και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο. Τότε το σύμπλεγμα:

$$\mathbf{P} : \; \ldots \longrightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \longrightarrow P_0$$

είναι η προβολική επίλυση του A (όπου το διαφορικό $\partial_n : P_n \to P_{n-1}$ ορίζεται από τη σύνθεση: $P_n \twoheadrightarrow R_n \rightarrowtail P_{n-1}$). Έτσι, προκύπτει η ακριβής ακολουθία:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, two heads] & R_{n+1} \arrow[r, tail] & P_n \arrow[r, two heads] \arrow[rr, bend right, dotted, "\partial_n"'] & R_n \arrow[r, tail] & P_{n-1} \arrow[r, two heads] & \cdots \arrow[r, tail] & P_0 \arrow[r, two heads] \arrow[rr, bend right, dotted, "\partial_0"'] & A \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Από τον τρόπο που δημιουργήθηκε το προβολικό σύμπλεγμα $\mathbf{P}$, είναι και α-κυκλικό αφού
$H_n(\mathbf{P}) = ker\partial_n/im\partial_{n+1} = ker(P_n \twoheadrightarrow R_n)/im(R_{n+1} \rightarrowtail P_n) = 0$, για $n > 0$, επειδή η $R_{n+1} \rightarrowtail P_n \twoheadrightarrow R_n$ ως προβολική παρουσίαση του R_n είναι βραχεία, ακριβής ακολουθία.

Ακόμα ισχύει $H_0(\mathbf{P}) = ker\partial_0/im\partial_1 = P_0/im(R_1 \rightarrowtail P_0)$

$$= P_0/ker(P_0 \twoheadrightarrow A) \cong im(P_0 \twoheadrightarrow A) = A. \qquad \Diamond$$

Σημείωση: ▲ Η ύπαρξη προβολικών επιλύσεων, όπως φαίνεται από την προηγούμενη απόδειξη, ισοδυναμεί με την ύπαρξη προβολικών παρουσιάσεων. Γενικά θα λέμε ότι μια αβελιανή κατηγορία $\mathfrak{A}$ έχει αρκετά προβολικά αντικείμενα, αν για κάθε αντικείμενο $A \in Ob(\mathfrak{A})$, υπάρχει μία τουλάχιστον προβολική παρουσίαση του A.

▼ Στην κατηγορία $\mathfrak{Ab}$ των αβελιανών ομάδων, σύμφωνα με την παραπάνω διαδικασία σχηματισμού της προβολικής επίλυσης της αβελιανής ομάδας A, μπορούμε να πάρουμε $P_1 = R_1$ και $P_n = 0$, για $n \geq 2$ κι αυτό, διότι μια αβελιανή ομάδα είναι προβολική αν και μόνο αν είναι ελεύθερη και κάθε υπο-ομάδα μιας ελεύθερης ομάδας, είναι ελεύθερη.

Για την κατηγορία των modules $\mathfrak{M}_\Lambda$ όμως, μπορεί να συμβεί να μην υπάρχει *πεπερασμένη* προβολική επίλυση, πράγμα που σημαίνει ότι δεν υπάρχει προβολική επίλυση $\mathbf{P}$ του module A, τέτοια ώστε $\exists n_0 \in \mathbb{Z}$, αρκετά μεγάλο ίσως, με $P_n = 0, n \geq n_0$.

3.5.4 Πρόταση. *Δύο προβολικές επιλύσεις του A είναι κανονικά του ίδιου ομοτοπικού τύπου.*

Απόδειξη: Αν $\mathbf{C}$ και $\mathbf{D}$ δύο προβολικές επιλύσεις του A, τότε λόγω του θεωρήματος (3.5.2), υπάρχουν δύο μορφισμοί συμπλεγμάτων $\phi : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ και $\psi : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$, που επάγουν τον ταυτοτικό ομομορφισμό $H_0(\mathbf{C}) = A = H_0(\mathbf{D})$. Η σύνθεση λοιπόν, $\psi\phi : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ και ο ταυτοτικός μορφισμός
$\mathbf{1_C} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, επάγουν τον ταυτοτικό ομομορφισμό $1_A : A \to A$. Οπότε, από το θεώρημα (3.5.2), έχουμε $\psi\phi \simeq \mathbf{1_C}$. Με ανάλογο τρόπο, παίρνουμε και $\phi\psi \simeq \mathbf{1_D}$. Δηλαδή τα συμπλέγματα $\mathbf{C}$ και $\mathbf{D}$ είναι του ίδιου ομοτοπικού τύπου.

Επειδή επιπλέον, η κλάση ομοτοπίας της ομοτοπικής ισοδυναμίας
$\phi : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ είναι μοναδικά ορισμένη, οι προβολικές επιλύσεις $\mathbf{C}$ και $\mathbf{D}$ είναι κανονικά, του ίδιου ομοτοπικού τύπου. $\Diamond$

Αναφέρουμε, στη συνέχεια, τις δυϊκές των εννοιών, που μας απασχόλησαν ως τώρα. Ξεκινώντας από τα **μη αρνητικά συν-αλυσσωτά συμπλέγματα**, δηλαδή αυτά του τύπου:

$$\mathbf{C} : C^0 \longrightarrow C^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow C^n \longrightarrow C^{n+1} \longrightarrow \cdots ,$$

με $C^n = 0$, για $n < 0$, δίνουμε τον ορισμό.

3.5.5 Ορισμός. ► Ένα μη αρνητικό συν-αλυσσωτό σύμπλεγμα $\mathbf{C} = \{C^n\}$ λέγεται:

- **ενριπτικό** αν το C^n είναι ενριπτικό, $\forall n \geq 0$ και
- **α-κυκλικό** αν $H^n(\mathbf{C}) = 0, \forall n \neq 0$.

► **Ενριπτική επίλυση του** A ονομάζεται ένα (μη αρνητικό) ενριπτικό και α-κυκλικό συν-αλυσσωτό σύμπλεγμα

$$\mathbf{I} : I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I^n \longrightarrow I^{n+1} \longrightarrow \cdots ,$$

μαζί με ένα ισομορφισμό $H^0(\mathbf{I}) \xrightarrow{\sim} A$.

Με δυϊκό τρόπο, μπορούν ν΄ αποδειχθούν τα δυϊκά του θεωρήματος (3.5.2) και της πρότασης (3.5.4).

Σημείωση: ▲ Η ύπαρξη ενριπτικών επιλύσεων ισοδυναμεί με την ύπαρξη ενριπτικών παρουσιάσεων. Γενικά, μια αβελιανή κατηγορία $\mathfrak{A}$ θα έχει αρκετά ενριπτικά αντικείμενα, αν για κάθε αντικείμενο $A \in Ob(\mathfrak{A})$, υπάρχει μία τουλάχιστον ενριπτική παρουσίαση του A. Παράδειγμα μιας τέτοιας κατηγορίας είναι η $\mathfrak{M}_\Lambda$ των Λ-modules.

3.6 Παράγωγοι συναρτητές

Το κύριο θέμα της ομολογιακής άλγεβρας, με το οποίο θ' ασχοληθούμε σ' αυτή την παράγραφο, είναι οι παράγωγοι συναρτητές. Θα μπορούσε να ειπωθεί ότι αυτή η θεωρία είναι - και πράγματι, ιστορικά έτσι ξεκίνησε - μια μεγάλη γενίκευση της θεωρίας των Tor και Ext, που αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Θ' αναπτύξουμε τη θεωρία σε κάποια γενικότητα, παίρνοντας ως βασικό συναρτητή ένα προσθετικό και συναλλοίωτο συναρτητή $T : \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$. Το πεδίο τιμών μπορεί να είναι οποιαδήποτε αβελιανή κατηγορία, εν τούτοις, οι κύριες εφαρμογές μας είναι με πεδίο τιμών την κατηγορία $\mathfrak{Ab}$ των αβελιανών ομάδων. Αρχικά, θα βγάλουμε τον ορισμό των αριστερά παράγωγων συναρτητών του συναρτητή T, αναλυτικά, ενώ θα υπογραμμίζουμε τις σημαντικές τροποποιήσεις για τους δεξιά παράγωγους συναρτητές. Ανάλογα αναπτύσσεται η θεωρία για τους παράγωγους συναρτητές ενός ανταλλοίωτου συναρτητή.

3.6.1 Ορισμός. Έστω λοιπόν $T : \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ ένας συναλλοίωτος, προσθετικός συναρτητής. Θα ορίσουμε μια ακολουθία συναρτητών
$L_nT, n = 0, 1, 2, ...$, όπου ο $L_nT : \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ ονομάζεται $n-$**οστός αριστερά παράγωγος συναρτητής** του T. Αυτός ο ορισμός επιχειρείται με διαδοχικά βήματα:

► Δίνεται • ένα Λ-module A και
 • μια προβολική επίλυση $\mathbf{P}$ του A.

► Θεωρούμε το σύμπλεγμα των αβελιανών ομάδων
 • $T\mathbf{P} : ... \to TP_n \to TP_{n-1} \to ... \to TP_0 \to 0$

► και ορίζουμε

$$\boxed{L_n^{\mathbf{P}}T(A) = H_n(T\mathbf{P}), \quad n = 0, 1, 2, ...}$$

<u>Θα δείξουμε, στη συνέχεια, ότι:</u> (i) για τον προσθετικό συναρτητή T, ο συναρτητής $L_n^{\mathbf{P}}T(A)$ δεν εξαρτάται από την προβολική επίλυση $\mathbf{P}$, αλλά μόνο από το Λ-module A και
(ii) αν δοθεί μια απεικόνιση $\alpha : A \to A'$, μπορούμε να ορίσουμε μια επαγόμενη συνάρτηση $\alpha_* : L_n^{\mathbf{P}}T(A) \to L_n^{\mathbf{P}'}T(A')$, που κάνει τον $L_n^{\mathbf{P}}T(-)$ ένα συναρτητή.

◄ (i) Έστω ο ομομορφισμός $\alpha : A \to A'$ και $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}'$ οι προβολικές επιλύσεις των A, A' αντίστοιχα. Σύμφωνα με τα σχήματα που ακολουθούν:

$$\mathfrak{M}_\Lambda:\quad \begin{tikzcd}
\mathbf{P} \arrow[d, shift right, "\alpha'"'] \arrow[d, shift left, "\alpha"] & :\ldots \arrow[r] & P_n \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\alpha'_n"'] \arrow[d, shift left, "\alpha_n"] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\alpha'_{n-1}"'] \arrow[d, shift left, "\alpha_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\alpha'_0"'] \arrow[d, shift left, "\alpha_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & 0 \\
\mathbf{P}' & :\ldots \arrow[r] & P'_n \arrow[r] & P'_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P'_0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\downdownarrows \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad T \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downdownarrows$$

$$\mathfrak{Ab}:\quad \begin{tikzcd}
T\mathbf{P} \arrow[d, shift right, "T\alpha'"'] \arrow[d, shift left, "T\alpha"] & :\ldots \arrow[r] & TP_n \arrow[r] \arrow[d, shift right, "T\alpha'_n"'] \arrow[d, shift left, "T\alpha_n"] & TP_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, shift right, "T\alpha'_{n-1}"'] \arrow[d, shift left, "T\alpha_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & TP_0 \arrow[r] \arrow[d, shift right, "T\alpha'_0"'] \arrow[d, shift left, "T\alpha_0"] & TA \arrow[r] \arrow[d, "T\alpha"'] & 0 \\
T\mathbf{P}' & :\ldots \arrow[r] & TP'_n \arrow[r] & TP'_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & TP'_0 \arrow[r] & TA' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

και λόγω του θεωρήματος (3.5.2), υπάρχει ένας μορφισμός συμπλεγμάτων $\alpha : \mathbf{P} \to \mathbf{P}'$, που επάγει τον α και είναι καθορισμένος μέχρις ομοτοπίας. Από το πόρισμα (3.4.6) παίρνουμε την απεικόνιση

$$\alpha(\mathbf{P}, \mathbf{P}') : L_n^{\mathbf{P}}T(A) = H_n(T\mathbf{P}) \longrightarrow H_n(T\mathbf{P}') = L_n^{\mathbf{P}'}T(A'), n = 0, 1, 2, ...,$$

η οποία δεν εξαρτάται από την επιλογή του α γιατί αν υπάρχουν δύο μορφισμοί συμπλεγμάτων α και α' που επάγουν τον α τότε, όπως προκύπτει κι από τα παραπάνω σχήματα

$$\alpha \simeq \alpha' \Longrightarrow H(T\alpha) = H(T\alpha') : H(T\mathbf{P}) \longrightarrow H(T\mathbf{P}').$$

Άρα ο $\alpha(\mathbf{P}, \mathbf{P}') : L_n^{\mathbf{P}}T(A) \longrightarrow L_n^{\mathbf{P}'}T(A'), n = 0, 1, 2, ...$ είναι ανεξάρτητος του μορφισμού συμπλεγμάτων α.

Θεωρούμε κατόπιν τους ομομορφισμούς $\alpha : A \to A'$ και $\alpha' : A' \to A''$ και τις προβολικές επιλύσεις $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}'$ και $\mathbf{P}''$ των A, A' και A'' αντίστοιχα. Όπως εξάγεται από τα παραπάνω, η σύνθεση $\alpha'\alpha : A \to A''$ επάγει την απεικόνιση

$$\alpha'\alpha(\mathbf{P}, \mathbf{P}'') : L_n^{\mathbf{P}}TA \longrightarrow L_n^{\mathbf{P}''}TA'', n = 0, 1, 2, ...$$

που κατασκευάζεται μέσω του μορφισμού συμπλεγμάτων $\alpha'\alpha : \mathbf{P} \to \mathbf{P}''$, ο οποίος επάγει τον ομομορφισμό $\alpha'\alpha$, όταν $\alpha : \mathbf{P} \to \mathbf{P}'$ είναι ο μορφισμός συμπλεγμάτων που επάγει τον α και ο $\alpha' : \mathbf{P}' \to \mathbf{P}''$ επάγει τον α'. Έτσι, έχουμε

$$(\alpha'\alpha)(\mathbf{P}, \mathbf{P}'') = \alpha'(\mathbf{P}', \mathbf{P}'') \circ \alpha(\mathbf{P}, \mathbf{P}'). \qquad (6.1)$$

Με ανάλογους συλλογισμούς, παίρνουμε την ταυτοτική απεικόνιση

$$1_A(\mathbf{P},\mathbf{P}) = 1_{L_n^{\mathbf{P}}TA}, \qquad (6.2)$$

που επάγει τον ταυτοτικό ομομορφισμό $1_A : A \to A$. Δηλαδή ο $L_n^{\mathbf{P}}TA$ είναι ένας συναρτητής, αφού ικανοποιεί τους κανόνες του ταυτοτικού στοιχείου και της σύνθεσης μορφισμών.

Μπορούμε τώρα να δείξουμε την επόμενη πρόταση.

3.6.2 Πρόταση. *Αν* $\mathbf{P}$ *και* $\mathbf{Q}$ *είναι δύο προβολικές επιλύσεις του* A*, τότε υπάρχει ένας κανονικός ισομορφισμός*

$$\eta = \eta_{\,\mathbf{P},\mathbf{Q}} : \quad L_n^{\mathbf{P}}TA \xrightarrow{\sim} L_n^{\mathbf{Q}}TA\,.$$

Απόδειξη: Έστω $\eta : \mathbf{P} \to \mathbf{Q}$ ένας μορφισμός συμπλεγμάτων, που επάγει τον ταυτοτικό ομομορφισμό 1_A. Η ομοτοπική κλάση του η είναι μοναδικά ορισμένη και επιπλέον, από την πρόταση (3.5.4), έχουμε ότι ο μορφισμός η είναι μια ομοτοπική ισοδυναμία. Από εδώ προκύπτει η απεικόνιση-ισομορφισμός:

$$\eta = 1_A(\mathbf{P},\mathbf{Q}) : \quad L_n^{\mathbf{P}}TA \xrightarrow{\sim} L_n^{\mathbf{Q}}TA \quad n = 0, 1, 2, ...$$

ο οποίος μπορεί να υπολογιστεί μέσω του τυχαίου μορφισμού συμπλεγμάτων $\eta : \mathbf{P} \to \mathbf{Q}$, που επάγει τον 1_A. $\Diamond$

Λόγω των τύπων (6.1) και (6.2) η προηγούμενη πρόταση, για τρείς προβολικές επιλύσεις του A τις $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ μας δίνει:

$$\eta_{\,\mathbf{Q},\mathbf{R}} \cdot \eta_{\,\mathbf{P},\mathbf{Q}} = \eta_{\,\mathbf{P},\mathbf{R}} \quad \Longrightarrow \eta_{\,\mathbf{P},\mathbf{P}} = 1.$$

Συνεπώς μπορούμε να ταυτίσουμε, διά του ισομορφισμού η, τις αβελιανές ομάδες $L_n^{\mathbf{P}}TA$ και $L_n^{\mathbf{Q}}TA$. Δηλαδή ο συναρτητής $L_n^{\mathbf{P}}TA$ δεν εξαρτάται από το σύμπλεγμα $\mathbf{P}$, αλλά μόνο από το Λ-module A κι έτσι τον γράφουμε χωρίς τον υπερδείκτη $\mathbf{P}$, απλά ως L_nTA.

◀ (ii) Τώρα πρέπει να ορίσουμε για τον ομομορφισμό $\alpha : A \to A'$, τον επαγόμενο ομομορφισμό αβελιανών ομάδων

$$\alpha_* : L_nT(A) \longrightarrow L_nT(A'), \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, ο α_* ορίζεται ως εξής:

$$\alpha_* = \alpha(\mathbf{P},\mathbf{P}') : L_n^{\mathbf{P}}T(A) \longrightarrow L_n^{\mathbf{P}'}T(A').$$

Ο ορισμός αυτός του α_* είναι συμβατός με την ταύτιση που κάναμε, μέσω του ισομορφισμού η. Κι αυτό διότι αν $\mathbf{P}$ και $\mathbf{Q}$ είναι δύο προβολικές επιλύσεις του A, ενώ $\mathbf{P}'$ και $\mathbf{Q}'$ δύο προβολικές επιλύσεις του A', με τους ισομορφισμούς $\eta : L_n^{\mathbf{P}}TA \cong L_n^{\mathbf{Q}}TA$ και $\eta' : L_n^{\mathbf{P}'}TA' \cong L_n^{\mathbf{Q}'}TA'$, που προκύπτουν στις αντίστοιχες αβελιανές ομάδες, τότε από την πρόταση (3.6.1) και τον τύπο (6.1) παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\eta' \circ \alpha(\mathbf{P}, \mathbf{P}') &= 1_{A'}(\mathbf{P}', \mathbf{Q}') \circ \alpha(\mathbf{P}, \mathbf{P}') = \alpha(\mathbf{P}, \mathbf{Q}') \\ &= \alpha(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}') \circ 1_A(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \alpha(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}') \circ \eta.\end{aligned}$$

Ύστερα από όλη την διαδικασία που προηγήθηκε και με βάση τις σχέσεις (6.1) και (6.2), ο $L_nT(-)$ γίνεται ένας συναρτητής και ολοκληρώνεται ο ορισμός των αριστερά παράγωγων συναρτητών.

Σημείωση: Τονίζουμε το τετριμμένο, αλλά ταυτόχρονα χρήσιμο γεγονός ότι για να οριστούν οι αριστερά παράγωγοι συναρτητές L_nT, είναι απαραίτητο ο T να δίνεται επί προβολικών αντικειμένων.

Αναφέρουμε στη συνέχεια, κάποιες βασικές προτάσεις για τους αριστερά παράγωγους συναρτητές.

3.6.3 Ορισμός. Ο συναλλοίωτος συναρτητής $T : \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ ονομάζεται **δεξιά ακριβής**, αν για κάθε ακριβή ακολουθία $A' \to A \to A'' \to 0$, η ακολουθία

$$TA' \to TA \to TA'' \to 0$$

είναι ακριβής.

Σημείωση: Κάθε δεξιά ακριβής συναρτητής είναι προσθετικός. Η δικαιολόγηση είναι ότι ο δεξιά ακριβής συναρτητής T, διατηρεί τα αθροίσματα αφού, αν A, B δύο Λ-modules, $A, B \in \mathfrak{M}_\Lambda$

$$\Longrightarrow \quad A \oplus B \in \mathfrak{M}_\Lambda$$

$$\Longleftrightarrow \quad A \overset{i_A}{\rightarrowtail} A \oplus B \overset{\pi_B}{\twoheadrightarrow} B : \text{ βραχεία ακριβής ακολουθία.}$$

$$\Longleftrightarrow \quad TA \xrightarrow{Ti_A} T(A \oplus B) \overset{T\pi_B}{\twoheadrightarrow} TB : \text{ ακριβής } (T\text{: δεξιά ακριβής}).$$

Ο μηδενικός μορφισμός $0_{\mathfrak{M}_\Lambda} : 0 \to A$ της κατηγορίας $\mathfrak{M}_\Lambda$, αντιστοιχίζεται μέσω του συναρτητή $T : \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ στο μηδενικό μορφισμό $0_{\mathfrak{Ab}} : T0 \to TA$ της $\mathfrak{Ab}$ κατηγορίας.

Δηλαδή η $TA \xrightarrow{Ti_A} T(A \oplus B) \xrightarrow{T\pi_B} TB$: βραχεία ακριβής ακολουθία, που ισοδύναμα, μας δίνει τον ισομορφισμό

$$T(A \oplus B) \cong TA \oplus TB. \quad \diamondsuit$$

3.6.4 Πρόταση. *Αν ο $T : \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ είναι δεξιά ακριβής συναρτητής, τότε ο L_0T και ο T είναι φυσικά ισοδύναμοι.*

Απόδειξη: Αν $\mathbf{P}$ είναι μια προβολική επίλυση του Λ-module A

$$\Longrightarrow P_1 \to P_0 \to A \to 0: \text{ ακριβής ακολουθία}$$

$$\Longrightarrow TP_1 \to TP_0 \to TA \to 0: \text{ ακριβής}$$

$$\Longrightarrow H_0(T\mathbf{P}) = ker(TP_0 \to 0)/im(TP_1 \to TP_0)$$

$$\Longrightarrow L_0TA = H_0(T\mathbf{P}) = TP_0/im(TP_1 \to TP_0)$$

$$\Longrightarrow L_0TA = coker(TP_1 \to TP_0) \cong TA$$

Δηλαδή για τους συναρτητές T και L_0T υπάρχει ένας φυσικός μετασχηματισμός $t : T \to L_0T$, ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να αντιμετατίθεται:

$$\begin{tikzcd} TA \arrow[r, "t_A"] \arrow[d, "Tf"'] & L_0TA \arrow[d, "L_0Tf"] \\ TB \arrow[r, "t_B"] & L_0TB \end{tikzcd}$$

όπου $A, B \in Ob(\mathfrak{M}_\Lambda)$ και $f : A \to B$ και επειδή ο t_A είναι ισομορφισμός, $\forall A \in Ob(\mathfrak{M}_\Lambda)$, άρα έχουμε $t : T \simeq L_0T$ φυσική ισοδυναμία. $\diamondsuit$

3.6.5 Πρόταση. *Για το προβολικό Λ-module P ισχύει*

$$\bullet\ L_nTP = 0,\ n = 1, 2, ..., \qquad \bullet\ L_0TP = TP$$

Απόδειξη: Το $\mathbf{P} : \cdots \to 0 \to (P_0 = P) \to 0$: μια προβολική επίλυση του P

$$\Longrightarrow \cdots \to 0 \to TP \to 0: \text{ ακριβές σύμπλεγμα}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \bullet\ L_nTP = H_n(T\mathbf{P}) = 0 \\ \bullet\ L_0TP = H_0(T\mathbf{P}) = TP, \end{cases}$$

αφού $ker(TP_n \to TP_{n-1}) = im(TP_{n+1} \to TP_n)$

και $ker(TP \to 0)/im(0 \to TP) = TP/0. \quad \diamondsuit$

3.6.6 Πρόταση. *Οι συναρτητές* $L_nT : \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}, n = 0, 1, 2, ...$ *είναι προσθετικοί.*

Απόδειξη: Αν $\mathbf{P}$ και $\mathbf{Q}$ είναι προβολικές επιλύσεις των Λ-modules A και B αντίστοιχα, τότε το σύμπλεγμα:

$$\mathbf{P} \oplus \mathbf{Q} : \cdots \to P_n \oplus Q_n \to P_{n-1} \oplus Q_{n-1} \to \cdots \to P_0 \oplus Q_0 \to 0$$

είναι μια προβολική επίλυση του $A \oplus B \in \mathfrak{M}_\Lambda$. Αφού, λοιπόν, οι T και H είναι προσθετικοί συναρτητές, έχουμε:

$$L_nT(A \oplus B) = H_n(T(\mathbf{P} \oplus \mathbf{Q})) = H_n(T\mathbf{P} \oplus T\mathbf{Q})$$

$$= H_n(T\mathbf{P}) \oplus H_n(T\mathbf{Q}) = L_nTA \oplus L_nTB,$$

όπου οι $L_nT(i_A)$ και $L_nT(i_B)$ οι κανονικές ενρίψεις:

$$L_nTA \xrightarrow{L_nT(i_A)} L_nT(A \oplus B) \xleftarrow{L_nT(i_B)} L_nTB. \quad \diamondsuit$$

3.6.7 Πρόταση. *Αν*

$$K_q \rightarrowtail^{\mu} P_{q-1} \longrightarrow P_{q-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \twoheadrightarrow A$$

είναι μια ακριβής ακολουθία, με τα $P_0, P_1, ..., P_{q-1}$ *προβολικά, τότε αν ο* T *είναι δεξιά ακριβής και* $q \geqq 1$, *ισχύει ότι η ακολουθία*

$$0 \longrightarrow L_qTA \longrightarrow TK_q \xrightarrow{\mu_*} TP_{q-1}$$

είναι ακριβής.

Απόδειξη: Αν $... \to P_{q+1} \to P_q \to K_q \to 0$ είναι μια ακριβής ακολουθία, με τα $P_q, P_{q+1}, ...$: προβολικά, τότε:

- το σύμπλεγμα

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{P}: \ldots \arrow[r] & P_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] & P_q \arrow[rr, "\partial_q"] \arrow[dr] & & P_{q-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & 0 \\
& & & K_q \arrow[ur, tail, "\mu"'] & & & &
\end{tikzcd}$$

είναι μια προβολική επίλυση του A και

- η ακολουθία $TP_{q+1} \xrightarrow{T(\partial_{q+1})} TP_q \longrightarrow TK_q \longrightarrow 0$ είναι ακριβής, αφού ο T είναι δεξιά ακριβής συναρτητής.

Λόγω της προσθετικότητας του T, $T(\partial_{q+1}) \cdot T(\partial_q) = T(\partial_{q+1} \cdot \partial_q) = T(0) = 0$,
οπότε έχουμε το επόμενο αντιμεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς σειρές:

$$\begin{tikzcd}
& TP_{q+1} \arrow[r, "T(\partial_{q+1})"] \arrow[d, "\alpha"'] & TP_q \arrow[r] \arrow[d, "T(\partial_q)"'] & TK_q \arrow[r] \arrow[d, "\mu_*"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & TP_{q-1} \arrow[r, "\sim"] & TP_{q-1}, &
\end{tikzcd}$$

του οποίου το δεξί τετράγωνο προκύπτει από την εφαρμογή του συναρτητή T στο παραπάνω τρίγωνο της προβολικής επίλυσης του A.

Σύμφωνα, λοιπόν, με το λήμμα του φιδιού (1.2.7), παίρνουμε γι΄ αυτό το αντιμεταθετικό διάγραμμα, την ακριβή ακολουθία πυρήνων-συνπυρήνων:

$$ker\alpha = TP_{q+1} \xrightarrow{T(\partial_{q+1})} kerT(\partial_q) \longrightarrow ker\mu_* \xrightarrow{\omega} 0 = coker\alpha.$$

και άρα τον ισομορφισμό:

$$\begin{aligned} ker\mu_* &\cong kerT(\partial_q)/imT(\partial_{q+1}) \\ &= H_q(TP) = L_qTA. \end{aligned}$$

Έτσι, $ker\mu_* \cong L_qTA \Longleftrightarrow$

$$0 \longrightarrow ker\mu_* \cong L_qTA \longrightarrow TK_q \xrightarrow{\mu_*} TP_{q-1} : \text{ ακριβής.} \quad \Diamond$$

Θα υπογραμμίσουμε, τέλος, κάποια σημεία διαφοροποίησης, για τον ορισμό των δεξιά παράγωγων συναρτητών και προτάσεις που ισχύουν γι΄ αυτούς.

3.6.8 Ορισμός. Αν $T : \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ είναι, πάλι, ένας συναλλοίωτος, προσθετικός συναρτητής, ορίζουμε την ακολουθία των **δεξιά παράγωγων συναρτητών** του T:

$$R^nT : \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}, n = 0, 1, 2, ...$$

Και ο ορισμός αυτός επιτυγχάνεται στα εξής βήματα:

► Δίνεται • ένα Λ-module A και
• μια ενριπτική επίλυση $\mathbf{I}$ του A.

► Σχηματίζουμε το συν-σύμπλεγμα των αβελιανών ομάδων
• $T\mathbf{I} : TI_0 \longrightarrow TI_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow TI_n \longrightarrow TI_{n+1} \longrightarrow \cdots$

► και ορίζουμε

$$\boxed{R^nTA = H^n(T\mathbf{I}), \quad n = 0, 1, 2, ...}$$

Παρατήρηση: Ο $R^nT(-)$ είναι ένας συναρτητής, που δεν εξαρτάται από την ενριπτική επίλυση $\mathbf{I}$, αλλά μόνο απ' το Λ-module A.

Ισχύουν και οι αντίστοιχες των παραπάνω προτάσεων για τους δεξιά παράγωγους συναρτητές.

Στην περίπτωση ενός συναρτητή $S : \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ προσθετικού και ανταλλοίωτου S, οι δεξιά παράγωγοι συναρτητές του R^nS, σχηματίζονται ως δεξιά παράγωγοι του συναλλοίωτου συναρτητή $S : \mathfrak{M}^{\mathrm{op}}{}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$, παίρνοντας μια προβολική επίλυση $\mathbf{P}$ του A (δηλαδή ενριπτική στην $\mathfrak{M}^{\mathrm{op}}$) και σχηματίζοντας τη συνομολογία από το συν-αλυσσωτό σύμπλεγμα των αβελιανών ομάδων $S\mathbf{P}$.

Για τους αριστερά παράγωγους συναρτητές L_nT, του ανταλλοίωτου, προσθετικού $T : \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ κινούμαστε ανάλογα, παίρνοντας αριστερά παράγωγους συναρτητές του συναλλοίωτου $T : \mathfrak{M}^{\mathrm{op}}{}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$, διαμέσου ενριπτικής επίλυσης $\mathbf{I}$ του Λ-module A και σχηματίζουμε την ομολογία από το σύμπλεγμα αβελιανών ομάδων $T\mathbf{I}$.

3.6.9 Ορισμός. Ο ανταλλοίωτος συναρτητής $S : \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ ονομάζεται **αριστερά ακριβής** αν ο S, θεωρούμενος ως συναλλοίωτος $S : \mathfrak{M}^{\mathrm{op}}{}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$, είναι αριστερά ακριβής. Δηλαδή για κάθε ακριβή ακολουθία των Λ-modules A', A, A'': $A' \to A \to A'' \to 0$, η επόμενη ακολουθία είναι ακριβής:

$$0 \to SA'' \to SA \to SA'.$$

Ανάλογα ορίζεται και η ακρίβεια ανταλλοίωτου συναρτητή από δεξιά.

Παράδειγμα: αριστερά ακριβούς ανταλλοίωτου συναρτητή είναι ο $Hom(-, B)$, όπως προκύπτει από το θεώρημα (1.3.2).

Μπορούμε να διατυπώσουμε δυϊκές των προηγούμενων προτάσεων, για την περίπτωση ανταλλοίωτου συναρτητή.

3.7 Μακρές ακολουθίες παραγώγων προσθετικού συναρτητή $T : \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$

Σ' αυτή την παράγραφο, κλείνοντας το κεφάλαιο, θα παρουσιάσουμε δύο βασικές μακρές, ακριβείς ακολουθίες, που δημιουργούνται από τους παράγωγους συναρτητές.

Απαντάμε, έτσι, στο κεντρικό ερώτημα με το οποίο ασχολήθηκε η εργασία μας και όπως διαφαίνεται στην όλη της ανάπτυξη, είναι η κατασκευή μακρών, ακριβών ακολουθιών, εύχρηστων, καθώς υπάρχουν προτάσεις και ιδιότητες που βοηθούν σ' αυτό, η εύρεση εργαλείων για μια τέτοια κατασκευή, σε συγκεκριμένα (οι Hom, Ext, Tor), αλλά και σε γενικότερα (οι παράγωγοι συναρτητές) προβλήματα και η τεκμηρίωση, μέσω ομολογιακών εννοιών, του όλου εγχειρήματος.

Στο πρώτο θεώρημα, κρατούμε το συναρτητή σταθερό και μεταβάλλουμε το αντικείμενο της κατηγορίας $\mathfrak{M}_\Lambda$. Στο δεύτερο, σχηματίζουμε μακρά, ακριβή ακολουθία διαφοροποιώντας το συναρτητή, καθώς το αντικείμενο της $\mathfrak{M}_\Lambda$ παραμένει αμετάβλητο.

3.7.1 Θεώρημα. *Αν δοθεί ένας προσθετικός συναρτητής $T : \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ και μια βραχεία, ακριβής ακολουθία $A' \rightarrowtail^{\alpha'} A \twoheadrightarrow^{\alpha''} A''$, τότε υπάρχουν «συνεκτικοί ομομορφισμοί»*

$$\omega_n : L_n T A'' \longrightarrow L_{n-1} T A', n = 1, 2, ...,$$

ώστε η παρακάτω μακρά ακολουθία να είναι ακριβής:

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & L_nTA' \arrow[r, "\alpha'_*"] & L_nTA \arrow[r, "\alpha''_*"] & L_nTA'' \arrow[r, squiggly, "\omega_n"] & L_{n-1}TA' \arrow[r] & \cdots \arrow[d, dotted] \\
0 & L_0TA'' \arrow[l] & L_0TA \arrow[l, "\alpha''_*"'] & L_0TA' \arrow[l, "\alpha'_*"'] & L_1TA'' \arrow[l, squiggly, "\omega_1"'] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}
\tag{7.1}
$$

Απόδειξη: Βάσει του λήμματος (2.5.3), κατασκευάζουμε ένα αντιμεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς σειρές:

$$
\begin{tikzcd}
P'_0 \arrow[r, tail, dotted] \arrow[d, two heads, "\varepsilon'_0"'] & P_0 \arrow[r, two heads, dotted] \arrow[d, two heads, dotted, "\varepsilon_0"] & P''_0 \arrow[d, two heads, "\varepsilon''_0"] \\
A' \arrow[r, tail, "\alpha'"] & A \arrow[r, two heads, "\alpha''"] & A'',
\end{tikzcd}
$$

όπου τα P'_0, P_0, P''_0 είναι προβολικά modules. Προφανώς, $P_0 = P'_0 \oplus P''_0$. Από το λήμμα του φιδιού (1.2.7) λοιπόν, παίρνουμε τη βραχεία, ακριβή ακολουθία των πυρήνων:

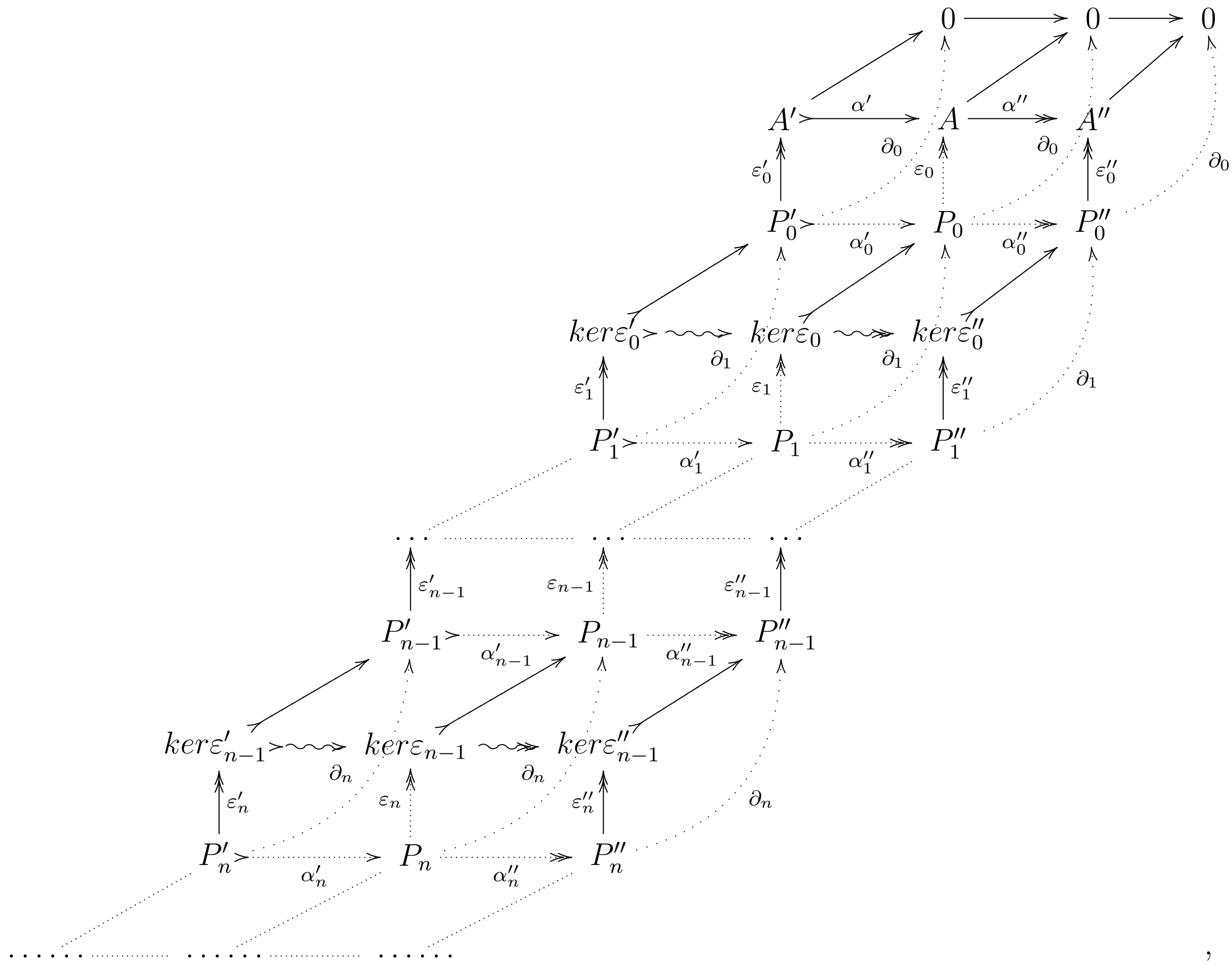
$$ker\varepsilon'_0 \rightarrowtail ker\varepsilon_0 \twoheadrightarrow ker\varepsilon''_0. \tag{7.2}$$

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία, τοποθετώντας στη θέση της αρχικής ακολουθίας $A' \rightarrowtail A \twoheadrightarrow A''$, την ακολουθία (7.2) και προκύπτει ένα νέο αντιμεταθετικό διάγραμμα, με μια αντίστοιχη βραχεία, ακριβή ακολουθία πυρήνων. Προχωρούμε κατ΄ αυτό τον τρόπο, επαγωγικά και προκύπτει το πολλαπλό αντιμεταθετικό σχήμα, παρακάτω. Θα κατασκευάσουμε, επομένως, μια βραχεία, ακριβή ακολουθία συμπλεγμάτων:

$$\mathbf{P}' \overset{\alpha'}{\rightarrowtail} \mathbf{P} \overset{\alpha''}{\twoheadrightarrow} \mathbf{P}'',$$

όπου τα αλυσσωτά συμπλέγματα $\mathbf{P}'$, $\mathbf{P}$ και $\mathbf{P}''$ είναι οι προβολικές επιλύσεις των A', A και A'' και οι μορφισμοί συμπλεγμάτων $\alpha' : \mathbf{P}' \to \mathbf{P}$ και $\alpha'' : \mathbf{P} \to \mathbf{P}''$

επάγουν τους ομομορφισμούς α' και α'', αντίστοιχα.



,

Αφού, όμως, ο συναρτητής T είναι προσθετικός και $\forall n \geq 0$, ισχύει
$P_n = P'_n \oplus P''_n \Longrightarrow TP_n = TP'_n \oplus TP''_n$, τότε και η

$$0 \longrightarrow T\mathbf{P}' \longrightarrow T\mathbf{P} \longrightarrow T\mathbf{P}'' \longrightarrow 0$$

είναι βραχεία, ακριβής ακολουθία. Έτσι, το θεώρημα (3.3.1) μας καθορίζει τον ομομορφισμό

$$\omega_n : H_n(T\mathbf{P}'') \longrightarrow H_{n-1}(T\mathbf{P}'),$$

που κάνει την ακολουθία (7.1) ακριβή. Ο ορισμός του ω_n είναι ανεξάρτητος, τόσο από την επιλογή των προβολικών επιλύσεων $\mathbf{P}'$, $\mathbf{P}$ και $\mathbf{P}''$, όσο και από τους μορφισμούς συμπλεγμάτων α' και α''. Εξαρτάται μόνο από τη βραχεία, ακριβή ακολουθία: $A' \rightarrowtail A \twoheadrightarrow A''$. $\Diamond$

Έστω, τώρα, $\tau : T \to T'$ ένας φυσικός μετασχηματισμός μεταξύ των προσθετικών, συναλλοίωτων συναρτητών $T, T' : \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$. Για μια προβολική επίλυση $\mathbf{P}$ του Λ-module A, παίρνουμε το μορφισμό συμπλεγμάτων $\tau_{\mathbf{P}} : T\mathbf{P} \to T'\mathbf{P}$, που καθορίζεται από τον τύπο $(\tau_{\mathbf{P}})_n = \tau_{P_n} : TP_n \to T'P_n, n = 0, 1, 2, ...$. Προφανώς, ο μορφισμός $\tau_{\mathbf{P}}$ επάγει ένα φυσικό μετασχηματισμό των αριστερά παράγωγων συναρτητών $\tau_A : L_nTA \to L_nT'A, n = 0, 1, 2, ...$.

Επιπλέον, η φυσικότητα της ακολουθίας (7.1) εκφράζεται σε σχέση, τόσο με το συναρτητή T, όσο και με την ακριβή ακολουθία $A' \rightarrowtail A \twoheadrightarrow A''$, στην επόμενη πρόταση:

3.7.2 Πρόταση. *Αν $\tau : T \to T'$ ένας φυσικός μετασχηματισμός μεταξύ των προσθετικών, συναλλοίωτων συναρτητών $T, T' : \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ και έστω το ακόλουθο αντιμεταθετικό διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, tail, "\alpha'"] \arrow[d, "\phi'"'] & A \arrow[r, two heads, "\alpha''"] \arrow[d, "\phi"] & A'' \arrow[d, "\phi''"] \\ B' \arrow[r, tail, "\beta'"'] & B \arrow[r, two heads, "\beta''"'] & B'', \end{tikzcd}$$

με ακριβείς σειρές. Τότε τα ακόλουθα διαγράμματα είναι αντιμεταθετικά:

(i)
$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & L_nTA' \arrow[r, "\alpha'_*"] \arrow[d, "\tau_{A'}"] & L_nTA \arrow[r, "\alpha''_*"] \arrow[d, "\tau_A"] & L_nTA'' \arrow[r, "\omega_n"] \arrow[d, "\tau_{A''}"] & L_{n-1}TA' \arrow[r] \arrow[d, "\tau_{A'}"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & L_nT'A' \arrow[r, "\alpha'_*"] & L_nT'A \arrow[r, "\alpha''_*"] & L_nT'A'' \arrow[r, "\omega'_n"] & L_{n-1}T'A' \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

και

(ii)
$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & L_nTA' \arrow[r, "\alpha'_*"] \arrow[d, "\phi'_*"] & L_nTA \arrow[r, "\alpha''_*"] \arrow[d, "\phi_*"] & L_nTA'' \arrow[r, "\omega_n"] \arrow[d, "\phi''_*"] & L_{n-1}TA' \arrow[r] \arrow[d, "\phi'_*"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & L_nTB' \arrow[r, "\beta'_*"] & L_nTB \arrow[r, "\beta''_*"] & L_nTB'' \arrow[r, "\omega_n"] & L_{n-1}TB' \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Συνεχίζουμε κατόπιν, για το σχηματισμό της δεύτερης μακράς, ακριβούς ακολουθίας.

3.7.3 Ορισμός. Η ακολουθία $T' \xrightarrow{\tau'} T \xrightarrow{\tau''} T''$ των προσθετικών συναρτητών

$$T', T, T'' : \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$$

και των φυσικών μετασχηματισμών τ' και τ'' μεταξύ τους, ονομάζεται **ακριβής σε προβολικά**, αν για κάθε προβολικό Λ-module P, η ακολουθία

$$0 \longrightarrow T'P \xrightarrow{\tau'_P} TP \xrightarrow{\tau''_P} T''P \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής.

3.7.4 Θεώρημα. *Αν δοθεί η ακολουθία* $T' \xrightarrow{\tau'} T \xrightarrow{\tau''} T''$ *των προσθετικών συναρτητών* $T', T, T'' : \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ *ακριβής σε προβολικά, τότε για κάθε* Λ*-module* A*, υπάρχουν για* $n = 1, 2, ...$*, οι «συνεκτικοί ομομορφισμοί»* $\omega_n : L_nT''A \to L_{n-1}T'A$*, ώστε η παρακάτω μακρά ακολουθία:*

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & L_nT'A \arrow[r, "\tau'"] & L_nTA \arrow[r, "\tau''"] & L_nT''A \arrow[r, squiggly, "\omega_n"] & L_{n-1}T'A \arrow[r] & \cdots \arrow[d, dotted] \\ 0 & L_0T''A \arrow[l] & L_0TA \arrow[l, "\tau''"'] & L_0T'A \arrow[l, "\tau'"'] & L_1T''A \arrow[l, squiggly, "\omega_1"'] & \cdots \arrow[l] \end{tikzcd} \tag{7.3}$$

να είναι ακριβής.

Απόδειξη: Διαλέγουμε μια προβολική επίλυση $\mathbf{P}$ του A και θεωρούμε την ακολουθία των συμπλεγμάτων

$$0 \longrightarrow T'\mathbf{P} \xrightarrow{\tau'} T\mathbf{P} \xrightarrow{\tau''} T''\mathbf{P} \longrightarrow 0$$

που είναι βραχεία ακριβής, καθώς η ακολουθία $T' \xrightarrow{\tau'} T \xrightarrow{\tau''} T''$ είναι ακριβής σε προβολικά. Με εφαρμογή του θεωρήματος (3.3.1), παίρνουμε τη μακρά, ακριβή ομολογιακή ακολουθία, που μας οδηγεί άμεσα στην ακρίβεια της ακολουθίας (7.3), με τους «συνδετικούς ομομορφισμούς»:

$$\omega_n : H_n(T''\mathbf{P}) \longrightarrow H_{n-1}(T'\mathbf{P}). \quad \diamondsuit$$

Η ακολουθία (7.3) είναι φυσική και σε σχέση με το A, αλλά και σε σχέση με την ακολουθία $T' \to T \to T''$, όπως καταγράφεται και στην ακόλουθη πρόταση.

3.7.5 Πρόταση. *Αν* $\alpha : A \to A'$ *είναι ένας ομομορφισμός μεταξύ των* Λ*-modules* A *και* A' *και έστω το ακόλουθο αντιμεταθετικό διάγραμμα των προσθετικών συναρτητών και φυσικών μετασχηματισμών μεταξύ τους:*

$$\begin{tikzcd} T' \arrow[r, "\tau'"] \arrow[d, "\phi'"'] & T \arrow[r, "\tau''"] \arrow[d, "\phi"] & T'' \arrow[d, "\phi''"] \\ S' \arrow[r, "\sigma'"'] & S \arrow[r, two heads, "\sigma''"'] & S'', \end{tikzcd}$$

τέτοιο ώστε οι σειρές του να είναι ακριβείς σε προβολικά. Τότε τα ακόλουθα διαγράμματα είναι αντιμεταθετικά:

$$
\begin{array}{llllllllll}
\text{(i)} & \cdots \longrightarrow & L_nT'A & \xrightarrow{\tau'_A} & L_nTA & \xrightarrow{\tau''_A} & L_nT''A & \xrightarrow{\omega_n} & L_{n-1}T'A & \longrightarrow \cdots \\
& & \downarrow{\scriptstyle \alpha_*} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_*} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_*} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_*} & \\
& \cdots \longrightarrow & L_nT'A' & \xrightarrow{\tau'_A} & L_nTA' & \xrightarrow{\tau''_A} & L_nT''A' & \xrightarrow{\omega_n} & L_{n-1}T'A' & \longrightarrow \cdots
\end{array}
$$

και

$$
\begin{array}{llllllllll}
\text{(ii)} & \cdots \longrightarrow & L_nT'A & \xrightarrow{\tau'_A} & L_nTA & \xrightarrow{\tau''_A} & L_nT''A & \xrightarrow{\omega_n} & L_{n-1}T'A & \longrightarrow \cdots \\
& & \downarrow{\scriptstyle \phi'_*} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_*} & & \downarrow{\scriptstyle \phi''_*} & & \downarrow{\scriptstyle \phi'_*} & \\
& \cdots \longrightarrow & L_nS'A & \xrightarrow{\sigma'_A} & L_nSA & \xrightarrow{\sigma''_A} & L_nS''A & \xrightarrow{\omega_n} & L_{n-1}S'A & \longrightarrow \cdots
\end{array}
$$

3.8 Γενικεύσεις - Καθολικότητα παράγωγων συναρτητών

Κλείνοντας το κεφάλαιο των παραγώγων συναρτητών, γενικεύουμε τις έννοιες, με αναφορά σε προσθετικούς συναρτητές μεταξύ οποιωνδήποτε κατηγοριών, δίνοντας τους απαραίτητους ορισμούς και τις συνθήκες - σχέσεις γι' αυτή τη γενίκευση.

Αρχικά, υπογραμμίζουμε ότι η έννοια των παράγωγων συναρτητών του συναρτητή $T : \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$, επεκτείνεται σε αριστερά (αντίστ. δεξιά) παράγωγους του δεξιά (αντίστ. αριστερά) ακριβούς συναρτητή $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, που συνδέει δύο αβελιανές κατηγορίες $\mathfrak{A}$ και $\mathfrak{B}$, θεωρώντας ότι η $\mathfrak{A}$ έχει αρκετά προβολικά αντικείμενα. Αν δηλαδή $A \in Ob(\mathfrak{A})$, και $\mathbf{P} \to A$ μια προβολική επίλυση του A, ορίζουμε

$$L_nF(A) = H_n(F(P)), n \geq 0.$$

Τονίζουμε ότι αφού η $F(P_1) \to F(P_0) \to F(A) \to 0$ είναι ακριβής, είναι $L_0F(A) \cong F(A)$.

3.8.1 Ορισμός. Ομολογιακός (συναλλοίωτος) δ-**συναρτητής** (αντίστοιχα **συν-ομολογιακός**), από μια κατηγορία $\mathfrak{A}$ προς την κατηγορία $\mathfrak{B}$, είναι μια συλλογή προσθετικών συναρτητών $T_n : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}, n \geq 0$ (αντίστοιχα $T^n : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}, n \geq 0$), μαζί με τους ομομορφισμούς

$$\delta_n : T_n(C) \to T_{n-1}(A)$$
$$(\text{αντίστοιχα } \delta^n : T^n(C) \to T^{n+1}(A)),$$

που ορίζονται για κάθε βραχεία, ακριβή ακολουθία $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ της κατηγορίας $\mathfrak{A}$ και ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες:

► **1.** Για κάθε βραχεία, ακριβή ακολουθία της παραπάνω μορφής, υπάρχει μια μακρά ακριβής ακολουθία

$$\cdots \longrightarrow T_{n+1}(C) \overset{\delta}{\rightsquigarrow} T_n(A) \longrightarrow T_n(B) \longrightarrow T_n(C) \overset{\delta}{\rightsquigarrow} T_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

(αντίστοιχα

$$\cdots \longrightarrow T^{n-1}(C) \overset{\delta}{\rightsquigarrow} T^n(A) \longrightarrow T^n(B) \longrightarrow T^n(C) \overset{\delta}{\rightsquigarrow} T^{n+1}(A) \longrightarrow \cdots).$$

Ειδικά ο T_0 είναι δεξιά ακριβής και ο T^0 αριστερά ακριβής.

► **2.** Για κάθε μορφισμό μεταξύ δύο βραχειών ακριβών ακολουθιών, από την $A' \rightarrowtail B' \twoheadrightarrow C'$ στην $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$, οι δ-μορφισμοί δίνουν ένα αντιμεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} T_n(C') \arrow[r, rightsquigarrow, "\delta"] \arrow[d] & T_{n-1}(A') \arrow[d] \\ T_n(C) \arrow[r, rightsquigarrow, "\delta"] & T_{n-1}(A) \end{tikzcd} \qquad \text{(αντίστοιχα} \qquad \begin{tikzcd} T^n(C') \arrow[r, rightsquigarrow, "\delta"] \arrow[d] & T^{n+1}(A') \arrow[d] \\ T^n(C) \arrow[r, rightsquigarrow, "\delta"] & T^{n+1}(A)). \end{tikzcd}$$

<u>**Σημείωση:**</u> Συμφωνούμε ότι $T_n = T^n = 0, n < 0$

<u>**Παράδειγμα:**</u> ♦ ομολογιακού δ-συναρτητή είναι η οικογένεια $L_*T = \{L_nT\}_{n\geq 0}$ των αριστερά παράγωγων συναρτητών του προσθετικού $T : \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ και

♦ συν-ομολογιακού δ-συναρτητή η $R^*T = \{R^nT\}_{n\geq 0}$ των δεξιά παράγωγων συναρτητών του προσθετικού $T : \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$.

3.8.2 Ορισμός. ► Ένας **μορφισμός** $S \to T$ των **δ-συναρτητών** $S, T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ είναι ένα σύστημα φυσικών μετασχηματισμών $S_n \to T_n$ (αντίστοιχα $S^n \to T^n$), που αντιμετατίθεται με το διαφορικό δ. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα αντιμεταθετικό διάγραμμα, που συνδέει τις μακρές ακριβείς ακολουθίες των δ-συναρτητών S και T, που προκύπτουν για οποιαδήποτε βραχεία, ακριβή ακολουθία $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ της κατηγορίας $\mathfrak{A}$, όπως φαίνεται και στα επόμενα σχήματα

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & S_{n+1}(C) \arrow[r, rightsquigarrow, "\delta"] \arrow[d] & S_n(A) \arrow[r] \arrow[d] & S_n(B) \arrow[r] \arrow[d] & S_n(C) \arrow[r, rightsquigarrow, "\delta"] \arrow[d] & S_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & T_{n+1}(C) \arrow[r, rightsquigarrow, "\delta"] & T_n(A) \arrow[r] & T_n(B) \arrow[r] & T_n(C) \arrow[r, rightsquigarrow, "\delta"] & T_{n-1}(A) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

(αντίστοιχα

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & S^{n-1}(C) \arrow[r, squiggly, "\delta"] \arrow[d] & S^n(A) \arrow[r] \arrow[d] & S^n(B) \arrow[r] \arrow[d] & S^n(C) \arrow[r, squiggly, "\delta"] \arrow[d] & S^{n+1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & T^{n-1}(C) \arrow[r, squiggly, "\delta"] & T^n(A) \arrow[r] & T^n(B) \arrow[r] & T^n(C) \arrow[r, squiggly, "\delta"] & T^{n+1}(A) \arrow[r] & \cdots)
\end{tikzcd}$$

► Ο **ομολογιακός** δ **-συναρτητής** T, είναι **καθολικός** αν, δοθέντος ενός άλλου δ-συναρτητή S κι ενός φυσικού μετασχηματισμού $f_0 : S_0 \to T_0$, υπάρχει ένας *μοναδικός* μορφισμός $S \to T = \{f_n : S_n \to T_n\}$ των δ-συναρτητών S και T, που επεκτείνει τον f_0 ενώ
ο **συν-ομολογιακός** δ**-συναρτητής** T, είναι **καθολικός** αν, δοθέντος ενός δ-συναρτητή S και του φυσικού μετασχηματισμού $f^0 : T^0 \to S^0$, υπάρχει ένας *μοναδικός* μορφισμός $T \to S = \{f^n : T^n \to S^n\}$ των δ-συναρτητών S και T, που επεκτείνει τον f^0.

Μετά τις γενικεύσεις και τους ορισμούς που προηγήθηκαν, παρουσιάζουμε το θεώρημα που αναφέρεται στην καθολικότητα των παράγωγων συναρτητών.

3.8.3 Θεώρημα. *Θεωρούμε ότι η κατηγορία $\mathfrak{A}$ έχει αρκετά προβολικά αντικείμενα. Τότε, για κάθε δεξιά ακριβή συναρτητή $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, οι αριστερά παράγωγοι συναρτητές του L_nF σχηματίζουν έναν καθολικό δ-συναρτητή.*

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει για τους αριστερά παράγωγους L_nF του δεξιά ακριβούς συναρτητή $F : \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ και μπορεί να γενικευθεί για κάθε περίπτωση δεξιά ακριβούς συναρτητή μεταξύ αβελιανών κατηγοριών
$F' : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, με την $\mathfrak{A}$ να διαθέτει αρκετά προβολικά.

Έστω, λοιπόν, ότι ο $T_* = \{T_n, \delta_n\} : \mathfrak{M}_\Lambda \to \mathfrak{Ab}$ είναι ένας ομολογιακός δ-συναρτητής και ότι δίνεται ο φυσικός μετασχηματισμός $\phi_0 : T_0 \to F$. Θα δείξουμε ότι ο ϕ_0 δέχεται μια μοναδική επέκταση σ' ένα μορφισμό $\phi : T_* \to L_*F$ μεταξύ δ-συναρτητών. Υποθέτουμε, επαγωγικά, ότι έχουν οριστεί οι φυσικοί μετασχηματισμοί $\phi_i : T_i \to L_iF$, για $0 \leq i < n$ και ότι αντιμετατίθενται με όλα τα αντίστοιχα διαφορικά δ_i. Παίρνοντας ένα $A \in Ob(\mathfrak{M}_\Lambda)$, και μια βραχεία ακριβή ακολουθία $K \rightarrowtail P \twoheadrightarrow A$, με το P προβολικό, άρα με $L_nF(P) = 0$, προκύπτει το επόμενο αντιμεταθετικό διάγραμμα, με τις ακριβείς σειρές του ορισμού των δ-συναρτητών:

$$\begin{tikzcd}
 & T_n(A) \arrow[r, rightsquigarrow, "\delta_n"] & T_{n-1}(K) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{n-1}"] & T_{n-1}(P) \arrow[d, "\phi_{n-1}"] \\
0 \arrow[r] & L_nF(A) \arrow[r, rightsquigarrow, "\delta_n"] & L_{n-1}F(K) \arrow[r] & L_{n-1}F(P).
\end{tikzcd} \tag{7.4}$$

Επειδή ο $\delta_n : L_nF(A) \to L_{n-1}F(K)$ είναι μονομορφισμός, άρα υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός $\phi_n : T_n(A) \to L_nF(A)$, που αντιμετατίθεται με τα διαφορικά δ_n. Πρέπει να δείξουμε ότι ο ϕ_n είναι φυσικός μετασχηματισμός, που δίνει αντιμεταθετικά σχήματα με τα δ_n, για όλες τις βραχείες, ακριβείς ακολουθίες.

(i) Για να δούμε αν ο ϕ_n είναι φυσικός μετασχηματισμός, έστω $f : A' \to A$ και μια βραχεία, ακριβής ακολουθία $K' \rightarrowtail P' \twoheadrightarrow A'$, με το P' προβολικό. Η προβολικότητα, λοιπόν, του P', μας δίνει το μορφισμό $g : P' \to P$, που επάγει (λόγω καθολικότητας του πυρήνα του μορφισμού: $[P \to A]$) την απεικόνιση $h : K' \to K$, όπως φαίνονται στο ακόλουθο αντιμεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & P' \arrow[r] \arrow[d, dotted, "g"] & A' \arrow[r] \arrow[d, rightsquigarrow, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & P \arrow[r] & A \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Πρέπει δηλαδή ο ϕ_n ν' αντιμετατίθεται με τον ομομορφισμό f της $\mathfrak{M}_\Lambda$, πράγμα που σημαίνει ότι το μεγάλο παραλληλόγραμμο του διαγράμματος που ακολουθεί, πρέπει να είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
T_n(A') \arrow[rrrrr, rightsquigarrow, "T_n(f)"] \arrow[dr, rightsquigarrow, "\delta"] \arrow[ddddd, rightsquigarrow, "\phi_n(A')"] & & & & & T_n(A) \arrow[dl, rightsquigarrow, "\delta"'] \arrow[ddddd, rightsquigarrow, "\phi_n(A)"'] \\
 & T_{n-1}(K') \arrow[rrr, "T_{n-1}(h)"] \arrow[dr] \arrow[dddd, "\phi_{n-1}"'] & & & T_{n-1}(K) \arrow[dl] \arrow[dddd, "\phi_{n-1}"] & \\
 & & T_{n-1}(P') \arrow[r, dotted, "T_{n-1}(g)"] \arrow[d, dotted, "\phi_{n-1}"'] & T_{n-1}(P) \arrow[d, dotted, "\phi_{n-1}"] & & \\
 & & L_{n-1}F(P') \arrow[r, dotted, "L_{n-1}F(g)"'] & L_{n-1}F(P) & & \\
 & L_{n-1}F(K') \arrow[rrr, "L_{n-1}F(h)"'] \arrow[ur] & & & L_{n-1}F(K) \arrow[ul] & \\
L_nF(A') \arrow[rrrrr, rightsquigarrow, "L_nF(f)"'] \arrow[ur, rightsquigarrow, "\delta"] & & & & & L_nF(A) \arrow[ul, rightsquigarrow, "\delta"']
\end{tikzcd}$$

Από την αντιμεταθετικότητα του μεσαίου από τα ορθογώνια και των τραπεζίων, που σχηματίζονται μεταξύ του μεγάλου και του μεσαίου ορθογωνίου, παίρνουμε τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \delta \circ L_nF(f) \circ \phi_n(A') &= L_{n-1}F(h) \circ \delta \circ \phi_n(A') = L_{n-1}F(h) \circ \phi_{n-1} \circ \delta \\ &= \phi_{n-1} \circ T_{n-1}(h) \circ \delta \\ &= \phi_{n-1} \circ \delta \circ T_n(f). \qquad \text{Άρα} \end{aligned}$$

$$\delta \circ L_nF(f) \circ \phi_n(A') = \delta \circ \phi_n(A) \circ T_n(f).$$

Από το σχήμα (7.4) όμως, ο $\delta : L_nF(A) \to L_{n-1}F(K)$ είναι μονομορφισμός και άρα μπορεί να διαγραφεί από τα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας, οπότε παίρνουμε την ισότητα $L_nF(f) \circ \phi_n(A') = \phi_n(A) \circ T_n(f)$, δηλαδή την αντιμεταθετικότητα του μεγάλου παραλληλογράμμου. Ακόμη, αν $A = A'$ και $f = 1_A$ καταλήγουμε στο ότι ο $\phi_n(A)$ δεν εξαρτάται από την επιλογή του προβολικού P.

(ii) Τέλος, για να δείξουμε ότι ο ϕ_n αντιμετατίθεται με τους δ_n, παίρνουμε τη βραχεία, ακριβή ακολουθία $A' \rightarrowtail A \twoheadrightarrow A''$ και την προβολική παρουσίαση $K'' \rightarrowtail P'' \twoheadrightarrow A''$ του A'', με το P'' προβολικό. Μπορούμε, επομένως, να κατασκευάσουμε ομομορφισμούς $f : P'' \to A$ (αφού το P'' προβολικό) και $g : K'' \to A'$ (αφού ο $A' \rightarrowtail A$ μονομορφικός), που κάνουν το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K'' \arrow[r] \arrow[d, dotted, "g"] & P'' \arrow[r] \arrow[d, dotted, "f"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & A \arrow[r] & A'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

αντιμεταθετικό. Από το (i) όμως, δείξαμε ότι ο ϕ_n είναι φυσικός μετασχηματισμός και άρα προκύπτει το επόμενο αντιμεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} T_n(A'') \arrow[r, squiggly, "\delta"] \arrow[d, "\phi_n"] & T_{n-1}(K'') \arrow[r, "T(g)"] \arrow[d, "\phi_{n-1}"] & T_{n-1}(A') \arrow[d, "\phi_{n-1}"] \\ L_nF(A'') \arrow[r, squiggly, "\delta"] & L_{n-1}F(K'') \arrow[r, "LF(g)"] & L_{n-1}F(A'). \end{tikzcd}$$

Από εδώ βλέπουμε ότι $T(g) \circ \delta = \delta_n : T_n(A'') \to T_{n-1}(A')$ και ομοίως $LF(g) \circ \delta = \delta_n : L_nF(A'') \to L_{n-1}F(A')$ κι έτσι εξασφαλίζεται η αντιμεταθετικότητα του ακόλουθου διαγράμματος:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & T_{n+1}(A'') \arrow[r, squiggly, "\delta_{n+1}"] \arrow[d, "\phi_{n+1}"] & T_n(A') \arrow[r] \arrow[d, "\phi_n"] & T_n(A) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_n"] & T_n(A'') \arrow[r, squiggly, "\delta_n"] \arrow[d, "\phi_n"] & T_{n-1}(A') \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{n-1}"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & L_{n+1}F(A'') \arrow[r, squiggly, "\delta_{n+1}"] & L_nF(A') \arrow[r] & L_nF(A) \arrow[r] & L_nF(A'') \arrow[r, squiggly, "\delta_n"] & L_{n-1}F(A') \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

που ήταν το ζητούμενο. $\diamondsuit$

Παρουσιάσαμε, όπως φάνηκε σ' αυτό το τελευταίο μέρος του κεφαλαίου, τις επεκτάσεις και γενικεύσεις που απαιτούνταν, για να δώσουμε τελικά την *καθολική ιδιότητα* που χαρακτηρίζει την οικογένεια $L_*T = \{L_nT\}_{n\geq 0}$ των αριστερά παράγωγων συναρτητών του προσθετικού συναρτητή T. Αντίστοιχα συμπεράσματα βγαίνουν και για τους δεξιά παράγωγους $R^*T = \{R^nT\}_{n\geq 0}$.

Αυτή η καθολική ιδιότητα χαρακτηρίζει τους παράγωγους συναρτητές ως «*Kan επεκτάσεις*» ([MacLane, [ML]], [HS, IX § 5]), γεγονός που μας επιτρέπει να ορίσουμε παράγωγους συναρτητές σε πλαίσια, στα οποία δεν υπάρχουν προβολικές ή ενριπτικές επιλύσεις, αλλά γνωρίζουμε την ύπαρξη Kan-επεκτάσεων από τη γενική Θεωρία Κατηγοριών.

Βιβλιογραφία

[1] [HStm] P. J. Hilton and U. Stammbach, A Course in Homological Algebra, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1971.

[2] [ML] S.MacLane Categories for the working mathematician, Grad.Texts in Math., vol. 5, Springer-Verlag, New York, 1971.

[3] [L] Serge Lang, Algebra, Third Edition, Yale University, New Haven, Connecticut, Addison-Wesley Publishing Company.

[4] [Wa] C. T. C. Wall, A Geometric Introduction to Topology, Addison-Wesley Series in Mathematics, Lynn H. Loomis 1972.

[5] [We94] C. A. Weibel, An introduction to homological algebra, Cambridge studies in advanced mathematics 38, Cambrige University Press, 1994.

[6] [WeHis] C. A. Weibel, History of Homological Algebra, Department of Mathematics, Rutgers University, U.S.A. 2000