Περιεχόμενα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην εργασία αυτή μελετάμε τις κατηγορίες συνήθων αλγεβρικών δομών όπως είναι οι ομάδες, οι δακτύλιοι, τα modules επί ενός δακτυλίου κ.α., μέσω μιας ενοποιητικής προσέγγισης που βασίζεται στην Θεωρία των Κατηγοριών. Ενοποιητικές προσεγγίσεις στην Αλγεβρα είχαν προϋπάρξει της Θεωρίας των Κατηγοριών. Μια σημαντική τέτοια προσέγγιση αποτέλεσε η Καθολική Αλγεβρα, όπως αναπτύχθηκε τη δεκαετία του 1930 από τον G. Birkoff. Η Καθολική Αλγεβρα αποτέλεσε την υλοποίηση ακόμα παλαιώτερων αιτημάτων για τέτοιες ενοποιητικές προσεγγίσεις, όπως καταγράφονται στο έργο του H. Grassmann ($\sim$1870) όπου αναφέρεται πως η αναπτυσσόμενη τότε θεωρία των ομάδων, η δική του «άλγερα των εκτασιακών ποσοτήτων» και η νεοεμφανιζόμενη τότε «άλγεβρα της λογικής» του G. Boole θα έπρεπε να τεθούν υπό την ίδια στέγη. Η παρούσα προσέγγιση οφείλεται στον F. W. Lawvere, ο οποίος στη διδακτορική του διατριβή ανέπτυξε τις βασικές ιδέες της θεωρίας που παρουσιάζουμε εδώ ως ένα πρώτο βήμα μιας γενικώτερης κατηγορικής προσέγγισης στη Μαθηματική Λογική. Το απλούστερο κομμάτι της Λογικής είναι αυτό που πραγματεύεται καθολικά ποσοδεικνούμενες ισότητες μεταξύ όρων. Με αυτόν ακριβώς τον τρόπο εκφράζονται οι κλασικές αλγεβρικές δομές (δε σημαίνει ότι όλη ακριβώς η κλασική άλγεβρα εμπίπτει σ΄ αυτήν την προσέγγιση: η δομή του σώματος εκφράζεται από αξιώματα μεγαλύτερης λογικής πολυπλοκότητας στη γλώσσα της θεωρίας των δακτυλίων).

Στα Κεφάλαια 2 και 3 ξεκινάμε τη μελέτη μας από την κλασσική σκοπιά και εργαζόμαστε με τις αλγεβρικές θεωρίες και τα μοντέλα τους κάνοντας σταδιακά τη μετάβαση στην κατηγορική θεώρηση των προηγουμένων (Κεφάλαιο 4). Στα Κεφάλαια 5 και 7 αποδεικνύουμε κοινές ιδιότητες των αλγεβρικών κατηγοριών όπως για παράδειγμα οτι κάθε αλγεβρική κατηγορία είναι πλήρης και συν-πλήρης, ότι οι τυχούσες αλγεβρικές δομές είναι πηλίκα ελεύθερων αλγεβρικών δομών, ότι οι τυχούσες αλγεβρικές δομές είναι κατευθυνόμενες ενώσεις πεπερασμένως γενόμενων αλγεβρικών δομών κλπ. Πολλές από αυτές τις γενικές ιδιότητες είναι δυνατόν να διαπιστωθούν στα πλαίσια της κλασικώτερης Καθολικής Αλγεβρας. Κάποιες άλλες όμως, που λαμβάνουν την έννοια του ομομορφισμού δομών σοβαρότερα υπ΄ όψιν, χρειάζονται την κατηγορική προσέγγιση: για παράδειγμα, το γεγονός ότι πηλίκα ως προς ισοτιμίες έχουν την καθολική ιδιότητα του συνεξισωτή.

Ακόμα πιο απαραίτητη καθίσταται η κατηγορική προσέγγιση όταν λαμβάνονται υπ΄ όψη κατασκευές συναρτητικού χαρακτήρα. Μία σειρά από γνωστές κατασκευές της άλγεβρας αποτελούν παραδείγματα αλγεβρικών συναρτητών ή των προσαρτημένων τους, που για γενικούς λόγους γνωρίζουμε ότι πάντα υπάρχουν. Η γνώση του γεγονότος ότι αποτελούν στιγμιότυπα τέτοιων γενικών κατασκευών μας δίνει χωρίς κόπο μια σειρά από ιδιότητες (π.χ ότι συναρτητές που είναι στιγμιότυπα αλγεβρικών διατηρούν φιλτραρισμένα συνόρια, ότι συναρτητές που ξέρουμε ότι είναι αριστερά προσαρτημένοι αλγεβρικών διατηρούν όλα τα συνόρια). Αυτές θα ήταν εξαιρετικά δύσκολο σε κάποιες περιπτώσεις να δειχθούν από τις κατ΄ ευθείαν περιγραφές αυτών των κατασκευών.

Με τον χαρακτηρισμό των αλγεβρικών κατηγοριών στο Κεφάλαιο 8 έχουμε στα χέρια μας ένα πολύτιμο κριτήριο (Θεώρημα 8.1) για το πότε μια κατηγορία είναι αλγεβρική. Στην περίπτωση που μια τυχαία κατηγορία πληρεί τις συνθήκες του Θεωρήματος 8.1, είναι αλγεβρική και γνωρίζουμε a priori ένα πλήθος από ιδιότητες αυτής που καθιστούν τη μελέτη της ευκολότερη. Κυρίως όμως το Θεώρημα αυτό μας παρέχει ένα χρήσιμο θεωρητικό εργαλείο για το κατά πόσο κατηγορίες που προκύπτουν αφηρημένα (π.χ ανακλαστικές υποκατηγορίες αλγεβρικών κατηγοριών) είναι ή (συνήθως) δεν είναι παραδείγματα αλγεβρικών κατηγοριών.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά το Λέκτορα του Τμήματος Μαθηματικών κ. Παναγή Καραζέρη υπό την επίβλεψη του οποίου πραγματοποιήθηκε η παρούσα εργασία. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών (ΙΚΥ) για την υποτροφία που μου παρείχε στη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

Κεφάλαιο 1

ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΤΗΓΟΡΙΩΝ

1.1 Ορισμός. Σε μια κατηγορία $\mathcal{A}$, **ζεύγος πυρήνα** ενός μορφισμού $f : A \to B$ καλείται (εαν υπάρχει) η εφέλκυση (P, α, β) του f με τον εαυτό του.

1.2 Πρόταση. *Θεωρούμε ένα μορφισμό $f : A \to B$ σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$. Οι παρακάτω συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

- *Ο f είναι μονομορφισμός.*
- *Το ζεύγος πυρήνα του f υπάρχει και είναι το $(A, 1_A, 1_A)$.*
- *Το ζεύγος πυρήνα (P, α, β) του f υπάρχει και είναι τέτοιο ώστε $\alpha = \beta$.*

1.3 Πρόταση. *Σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$, εαν ένας συνεξισωτής έχει ζεύγος πυρήνα, τότε είναι ο συνεξισωτής του ζεύγος πυρήνα του.*

1.4 Πρόταση. *Σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$, εαν ένα ζεύγος πυρήνα έχει συνεξισωτή, τότε είναι το ζεύγος πυρήνα του συνεξισωτή τους.*

1.5 Πρόταση. *Έστω $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ένας συναρτητής που διατηρεί όρια. Εαν η $\mathcal{A}$ είναι συν-πλήρης και ο F ανακλά ισομορφισμούς, τότε ο F επίσης **ανακλά συνόρια**.*

1.6 Ορισμός. Ένας συναρτητής $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ονομάζεται **ισοδυναμία** των κατηγοριών $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ (και οι κατηγορίες και καλούνται ισοδύναμες) όταν υπάρχει ένας συναρτητής $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ και φυσικοί μετασχηματισμοί

$$\tau : FG \cong id_C,\ id_C : C \to C \text{ και } \sigma : GF \cong id_A,\ id_A : A \to A$$

Ο $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ τότε είναι επίσης **ισοδυναμία** μεταξύ των κατηγοριών $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$.

1.7 Ορισμός. Μια κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι **φιλτραρισμένη** όταν

- $\exists\, C \in \mathcal{C}$ (Η $\mathcal{C}$ δεν είναι κενή)

- $(\forall\, C_1, C_2 \in \mathcal{C})(\exists\, C_3 \in \mathcal{C})(\exists\, f : C_1 \to C_3)(\exists\, g : C_2 \to C_3)$

- $(\forall C_1, C_2 \in \mathcal{C})(\forall f, g : C_1 \rightrightarrows C_2)(\exists C_3 \in \mathcal{C})(\exists h : C_2 \to C_3$ ώστε $h \circ f = h \circ g)$

Φιλτραρισμένο συνόριο καλείται το συνόριο ενός συναρτητή που ορίζεται σε μια φιλτραρισμένη κατηγορία. Λέμε οτι μια κατηγορία $\mathcal{A}$ **«έχει φιλτραρισμένα συνόρια»** όταν για κάθε μικρή φιλτραρισμένη κατηγορία $\mathcal{C}$ και κάθε συναρτητή $F : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$, υπάρχει το συνόριο του F.

1.8 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{C}$ μια μικρή φιλτραρισμένη κατηγορία και ένας συναρτητής $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$. Το συνόριο $(L, (s_C)_{C \in \mathcal{C}})$ του F δίνεται από τα*

$$L = \coprod_{C \in \mathcal{C}} FC/\approx \qquad s_C : FC \to L \quad s_C(x) = [x]$$

όπου $[x]$ είναι η κλάση ισοδυναμίας του x και $\approx$ η σχέση ισοδυναμίας που ορίζεται ως εξής:

$$(x \in\ FC) \approx (x' \in\ FC')$$

όταν

$$(\exists\, C'' \in\ \mathcal{C})\,(\exists\, f : C \to C'')(\exists\, g : C' \to C'')\,(Ff(x) = Fg(x'))$$

1.9 Θεώρημα. *Θεωρούμε μια μικρή κατηγορία $\mathcal{C}$ και ένα συναρτητή F από τη $\mathcal{C}$ στην κατηγορία Set των συνόλων. Εντός της κατηγορίας $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathrm{Set})$, ο F μπορεί να παρασταθεί ως συνόριο ενός διαγράμματος από αναπαραστάσιμους συναρτητές και αναπαραστάσιμους φυσικούς μετασχηματισμούς.*

1.10 Ορισμός. Έστω $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ένας συναρτητής και B ένα αντικείμενο της $\mathcal{B}$. **Ανάκλαση του B κατά μήκος του** F είναι ένα ζεύγος (R_B, η_B) όπου:

- R_B είναι ένα αντικείμενο της $\mathcal{A}$ και $\eta_B : B \to F(R_B)$ είναι ένας μορφισμός της $\mathcal{B}$.

- Εαν A ένα άλλο αντικείμενο της $\mathcal{A}$ και $\beta : B \to F(A)$ ένας μορφισμός της $\mathcal{B}$, τότε υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός $\alpha : R_B \to A$ της $\mathcal{A}$ ώστε $F(\alpha) \circ \eta_B = \beta$

1.11 Πρόταση. *Έστω $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ένας συναρτητής και B ένα αντικείμενο της $\mathcal{B}$. Όταν η ανάκλαση του B κατά μήκος του F υπάρχει, είναι* ***μοναδική μέχρις ισομορφισμού****.*

1.12 Πρόταση. *Θεωρούμε ένα συναρτητή $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ και υποθέτουμε οτι για κάθε αντικείμενο $B \in \mathcal{B}$, υπάρχει η ανάκλαση (R_B, η_B) του B κατά μήκος του F . Τότε υπάρχει ένας μοναδικός συναρτητής $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ που ικανοποιεί τις συνθήκες:*

- $(\forall\, B \in \mathcal{B})\, (R(B) = R_B)$

- *Ο $(\eta_B : B \to FRB)_{B \in \mathcal{B}}$ είναι φυσικός μετασχηματισμός*

1.13 Πρόταση. *Ο συναρτητής $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ είναι* ***αριστερά προσαρτημένος*** *του συναρτητή $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ όταν υπάρχει ένας φυσικός μετασχηματισμός $\eta : 1_B \Rightarrow F \circ R$ ώστε για κάθε αντικείμενο $B \in \mathcal{B}$, (R_B, η_B) να είναι η* ***ανάκλαση του*** *B* ***κατά μήκος του*** *F.*

1.14 Πρόταση. *Εαν ένας συναρτητής $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$* ***έχει αριστερά προσαρτημένο*** *(αντιστ. δεξιά προσαρτημένο), τότε ο F* ***διατηρεί όλα τα όρια****(αντιστ. συνόρια) που υπάρχουν στην $\mathcal{A}$.*

1.15 Ορισμός. (**Συνθήκη του συνόλου επίλυσης**)
Ένας συναρτητής $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ λέμε οτι **ικανοποιεί τη συνθήκη του συνόλου επίλυσης** ως προς ένα αντικείμενο $B \in \mathcal{B}$, όταν υπάρχει ένα σύνολο $S_B \subseteq \mathcal{A}_0$ από αντικείμενα ώστε:

$$(\forall\, A \in \mathcal{A})\, (\forall\, b : B \to FA)\, (\exists\, A' \in S_B)\, (\exists\, a : A' \to A)\, (\exists\, b' : B \to FA')$$

$$(F(a) \circ b' = b)$$

Εαν το $B \in \mathcal{B}$ δέχεται ανάκλαση (R_B, η_B) κατά μήκος του F τότε μπορούμε να επιλέξουμε ως σύνολο επίλυσης το $S_B = \{R_B\}$ και $b' = \eta_B$, όπου ο a επιπλέον θα είναι μοναδικός. Βλέπουμε λοιπόν οτι **η ύπαρξη ανάκλασης είναι ισχυρότερη έννοια από αυτή του συνόλου επίλυσης**.

1.16 Θεώρημα. ***(Θεώρημα προσαρτημένου συναρτητή)***
Θεωρούμε μια πλήρη κατηγορία $\mathcal{A}$ και ένα συναρτητή $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Οι παρακάτω συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(1) Ο F ***έχει αριστερά προσαρτημένο συναρτητή****.*

(2) Ισχύουν τα εξής:

• *Ο F **διατηρεί μικρά όρια**.*

• *Ο F **ικανοποιεί τη συνθήκη του συνόλου επίλυσης για κάθε αντικείμενο** $B \in \mathcal{B}$.*

1.17 Ορισμός. Έστω $\mathcal{B}$ μια κατηγορία και $\mathcal{A}$ μια υποκατηγορία της .Η $\mathcal{A}$ λέγεται **ανακλαστική υποκατηγορία** της $\mathcal{B}$ εαν ο συναρτητής εγκλεισμού $K : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ έχει αριστερά προσαρτημένο.

1.18 Πρόταση. *Θεωρούμε μια (πεπερασμένα) πλήρη κατηγορία $\mathcal{B}$ και μια **ανακλαστική υποκατηγορία** $\mathcal{A}$ της $\mathcal{B}$. Υπό αυτές τις συνθήκες, η $\mathcal{A}$ θα είναι επίσης (πεπερασμένα) **πλήρης**.*

1.19 Θεώρημα. *Θεωρούμε δυο συναρτητές $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ και $G : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$, όπου η $\mathcal{A}$ είναι μικρή και η $\mathcal{C}$ είναι συν-πλήρης. Υπό αυτές τις συνθήκες, **υπάρχει η αριστερή** Kan **επέκταση του** G **κατά μήκος του** F.*

1.20 Ορισμός. Σε μια κατηγορία, ένας επιμορφισμός καλείται **ομαλός επιμορφισμός** όταν είναι συνεξισωτής ενός ζεύγους μορφισμών.

1.21 Ορισμός. Σε μια κατηγορία $\mathcal{A}$, ένας επιμορφισμός $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ καλείται **ισχυρός επιμορφισμός** όταν, για κάθε αντιμεταθετικό τετράγωνο $z \circ u = v \circ f$ όπως αυτό του διαγράμματος 1.1, όπου ο $z : X \to Y$ είναι μονομορφισμός, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\omega : B \to X$ ώστε $\omega \circ f = u$, $z \circ \omega = v$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & B \arrow[d, "v"] \arrow[dl, "\omega"] \\ X \arrow[r, "z"'] & Y \end{tikzcd}$$

Διάγραμμα 1.1

1.22 Πρόταση. *Σε μια κατηγορία, ένας μορφισμός που είναι ταυτόχρονα **ισχυρός επιμορφισμός** και **μονομορφισμός**, είναι **ισομορφισμός**.*

1.23 Ορισμός. Μια κατηγορία $\mathcal{C}$ λέμε οτι έχει **ισχυρές επι-μονο-παραγοντοποιήσεις** εαν κάθε μορφισμός f της $\mathcal{C}$ δέχεται μια παραγοντοποίηση $f = i \circ p$, όπου p είναι ένας **ισχυρός επιμορφισμός** και i ένας **μονομορφισμός**.

1.24 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία με ισχυρές επι-μονο-παραγοντοποιήσεις. Τότε:*

• *Η ισχυρή επι-μονο παραγοντοποίηση ενός μορφισμού είναι μοναδική μέχρις ισομορφισμού.*

• *Οι ισχυρές επι-μονο παραγοντοποιήσεις είναι «φυσικές». Αυτό σημαίνει οτι δοθέντος ενός αντιμεταθετικού εξωτερικού ορθογωνίου όπως αυτό το διαγράμματος 1.2, όπου οι (i,p) και (j,q) είναι επι-μονο παραγοντοποιήσεις, υπάρχει μοναδικός μορφισμός h που κάνει όλο το διάγραμμα αντιμεταθετικό.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"'] & I \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "q"'] & J \arrow[r, "j"'] & D \end{tikzcd}$$

Διάγραμμα 1.2

• *Εαν $h = i \circ p$ είναι μια ισχυρή επι-μονο παραγοντοποίηση του h και $h = k \circ r$, όπου k είναι μονομορφισμός, τότε υπάρχει μοναδικός μορφισμός t ώστε $r = t \circ p$, $i = k \circ t$(Διάγραμμα 1.3)*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "r"'] & I \arrow[d, "i"] \arrow[dl, "t"] \\ J \arrow[r, "k"'] & D \end{tikzcd}$$

Διάγραμμα 1.3

1.25 Ορισμός. Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία με συν-γινόμενα και $(G_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια αντικειμένων της $\mathcal{C}$. Η οικογένεια $(G_i)_{i\in I}$ καλείται **ισχυρή οικογένεια γεννητό- ρων** της $\mathcal{C}$, όταν για κάθε αντικείμενο $C \in \mathcal{C}$ ο μορφισμός

$$\gamma_C : \coprod_{f\in \hom(G_i,C)} (\text{Πεδίο ορισμού της } f) \to C$$

είναι ισχυρός επιμορφισμός. Όταν η οικογένεια αποτελείται από ένα μόνο αντικείμενο G, τότε λέμε οτι το G είναι **ισχυρός γεννήτορας** της $\mathcal{C}$.

1.26 Πόρισμα. *Έστω $\mathcal{C}$ μια πεπερασμένα πλήρης κατηγορία με συν-γινόμενα και ένα αντικείμενο $G \in \mathcal{C}$. Οι παρακάτω συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

• ***Το** G **είναι ισχυρός γεννήτορας** της $\mathcal{C}$.*

• ***Ο συναρτητής** $\hom_{\mathcal{C}}(G,-) : \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$ **ανακλά ισομορφισμούς**.*

1.27 Ορισμός. Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία (με πεπερασμένα όρια). Μια οικογένεια αντικειμένων $(G_i)_{i\in I}$ της $\mathcal{C}$ είναι **ισχυρή οικογένεια γεννητόρων** της $\mathcal{C}$ όταν η οικογένεια των συναρτητών $\hom_{\mathcal{C}}(G_i, -) : \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$ ανακλά ισομορφισμούς.

1.28 Ορισμός. **Σχέση επι ενός αντικειμένου** A μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$ καλείται ένα αντικείμενο R της $\mathcal{C}$ με ένα ζεύγος μονομορφισμών $r_1, r_2 : R \rightrightarrows A$. Για κάθε αντικείμενο X της $\mathcal{C}$ ορίζουμε το σύνολο

$$R_X := \{(r_1 \circ x, r_2 \circ x)/x \in \hom_{\mathcal{C}}(X, R)\}$$

που αντιστοιχεί στη σχέση (με τη συνήθη έννοια) που γεννάται από το R επι του συνόλου $\hom_{\mathcal{C}}(X, A)$ δηλαδή

$$R_X \subseteq \hom_{\mathcal{C}}(X, A) \times \hom_{\mathcal{C}}(X, A)$$

Δοθείσης μιας σχέσης (R, r_1, r_2) επί ενός αντικειμένου A μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$, είναι λογικό να θεωρήσουμε τις γνωστές ιδιότητες των σχέσεων για τις διάφορες σχέσεις R_X επι του συνόλου $\hom_{\mathcal{C}}(X, A)$.

1.29 Ορισμός. **Σχέση ισοδυναμίας επί ενός αντικειμένου** A μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$, καλείται μια σχέση (R, r_1, r_2) επι του A τέτοια ώστε, για κάθε αντι- κείμενο $X \in \mathcal{C}$, η αντίστοιχη σχέση R_X επι του συνόλου $\hom_{\mathcal{C}}(X, A)$ να είναι σχέση ισοδυναμίας. Γενικότερα η σχέση R είναι **ανακλαστική** (αντιστ. μεταβατική, συμμετρική, αντισυμμετρική,...) όταν κάθε σχέση R_X είναι **ανακλαστική** (αντιστ. μεταβατική, συμμετρική, αντισυμμετρική,...).

1.30 Πρόταση. *Σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$ οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

- *Το $R \rightrightarrows A$ είναι σχέση ισοδυναμίας στην $\mathcal{C}$.*

- *Το $\hom_{\mathcal{C}}(-, R) \rightrightarrows \hom_{\mathcal{C}}(-, A)$ είναι σχέση ισοδυναμίας στην $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$.*

- *Για κάθε αντικείμενο $Z \in \mathcal{C}$ το $\hom_{\mathcal{C}}(Z, R) \rightrightarrows \hom_{\mathcal{C}}(Z, A)$ είναι σχέση ισοδυναμίας στην κατηγορία των συνόλων* Set.

1.31 Ορισμός. Μια κατηγορία $\mathcal{A}$ ονομάζεται **τοπικώς πεπερασμένα παραστάσιμη** όταν ισχύουν τα παρακάτω:

- Η $\mathcal{A}$ είναι συν-πλήρης.

- Υπάρχει ένα σύνολο $\mathcal{G}$ από πεπερασμένα παραστάσιμα αντικείμενα της $\mathcal{A}$, με την ιδιότητα κάθε αντικείμενο της $\mathcal{A}$ να γράφεται ως φιλτραρισμένο συνόριο αντικειμένων του $\mathcal{G}$.

Κεφάλαιο 2

Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΟΜΑΔΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφέρουμε αρχικά **τον ορισμό της ομάδας** στη συνήθη μορφή που γνωρίζουμε χρησιμοποιώντας **έννοιες της Μαθηματικής Λογικής** και θα παραστήσουμε τα αξιώματα που πληρούνται σε μια ομάδα **μέσω αντιμεταθετικών διαγραμμάτων**. Από την παρουσίαση αυτή θα φανεί η ανάγκη χρήσης μιας γενικότερης θεωρίας, αυτής των ομάδων(και όχι μιας ομάδας), ώστε να μπορέσουμε να μελετήσουμε τις θεωρίες τέτοιων αλγεβρικών δομών, όπως οι ομάδες, οι δακτύλιοι κ.α. και να τις χαρακτηρίσουμε κάνοντας, όπως θα δούμε και στις παρακάτω ενότητες, μια ενοποιητική προσέγγιση.

Ορίζουμε ως **ομάδα** ένα σύνολο G εφοδιασμένο με μια διμελή πράξη $+ : G \times G \to G$ που ικανοποιεί τα αξιώματα:

- $(\forall\, x, y, z \in G)[(x + y) + z = x + (y + z)]$
- $(\exists\, 0 \in G)(\forall\, x \in G)[x + 0 = 0 + x = x]$
- $(\forall\, x \in G)(\exists\, y \in G)[x + y = y + x = 0]$

Στην πραγματικότητα **η ύπαρξη του ουδετέρου στοιχείου και του συμμετρικού στοιχείου** μπορεί να παρουσιαστεί και στις δυο περιπτώσεις ως **αξίωμα**. Επάγεται έτσι ένας ισοδύναμος ορισμός σύμφωνα με τον οποίον **ομάδα είναι ένα σύνολο G εφοδιασμένο με**

- **μια διμελή πράξη** $+ : G \times G \to G$,
- **μια μονομελή πράξη** $- : G \to G$,
- **μια σταθερά** $0 \in G$,

ώστε να ικανοποιούνται τα αξιώματα:

- $(\forall\, x, y, z \in G)[(x + y) + z = x + (y + z)]$

- $(\forall\, x \in G)[x + 0 = 0 + x = x]$

- $(\forall\, x \in G)[x + (-x) = (-x) + x = 0]$

Παρατηρούμε οτι στον ισοδύναμο ορισμό τα αξιώματα είναι γραμμένα σε απλούστερη μορφή. Περιέχουν ισότητες μεταξύ αλγεβρικών παραστάσεων χωρίς παρουσία υπαρξιακού ποσοδείκτη, σύζευξης, διάζευξης ή άρνησης του κατηγορηματικού λογισμού. Χρησιμοποιούνται μόνο **καθολικοί ποσοδείκτες** γεγονός που θα μπορούσε να δικαιολογεί άλλωστε και τον όρο καθολική άλγεβρα, στην οποία ανήκει και **η θεωρία των ομάδων**. Φυσικά, ο όρος «καθολική άλγεβρα» υποδηλώνει όπως γνωρίζουμε τον γενικό χαρακτήρα της προσέγγισης στη μελέτη των αλγεβρικών δομών.

Συμβολίζουμε με G^n τη n-οστή δύναμη του G,$n \in \mathbb{N}$. Προφανώς G^0 θα είναι το μονοσύνολο. Μια σταθερά $0 \in G$ ισοδυναμεί με μια 0-μελή πράξη $0 : G^0 \to G$. Με βάση τους παραπάνω συμβολισμούς μια ομάδα G θα είναι εφοδιασμένη με τρείς πράξεις,

- **μια διμελή πράξη** $+ : G^2 \to G$,

- **μια μονομελή πράξη** $- : G^1 \to G$,

- **μια μηδενομελή πράξη** $0 : G^0 \to G$,

και **τα αξιώματα της θεωρίας** εκφράζονται μέσω της αντιμεταθετικότητας των παρακάτω διαγραμμάτων.

$$\begin{tikzcd}
G^3 \arrow[r, "{(+,1_G)}"] \arrow[d, "{(1_G,+)}"'] & G^2 \arrow[d, "+"] \\
G^2 \arrow[r, "+"'] & G^1
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
G^1 \times G^0 \arrow[d, "1_G \times 0"'] & G^1 \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "id"] & G^0 \times G^1 \arrow[d, "0 \times 1_G"] \\
G^2 \arrow[r, "+"'] & G^1 & G^2 \arrow[l, "+"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} G^1 \arrow[r, "(1_G,-)"] \arrow[d] & G^2 \arrow[d, "+"] & G^1 \arrow[l, "(-,1_G)"'] \arrow[d] \\ G^0 \arrow[r, "0"'] & G^1 & G^0 \arrow[l, "0"] \end{tikzcd}$$

Η προηγούμενη παρουσίαση μιας ομάδας παρότι καθόλα σωστή μπορεί να παραπλανήσει τον αναγνώστη αφού **δεν περιγράφει τη θεωρία των ομάδων αλλά τη θεωρία μιας συγκεκριμένης ομάδας** G. Πράγματι, εαν κοιτάξουμε ξανά τους δυο ορισμούς που δώσαμε προηγουμένως θα παρατηρήσουμε οτι βασιζόμαστε στη χρήση ενός συγκεκριμένου συνόλου G εντός του οποίου ισχύουν τα αξιώματα και οι ιδιότητες. Η δυσκολία αυτή μπορεί να ξεπεραστεί εύκολα. Η **θεωρία των ομάδων** μπορεί να περιγραφεί με ένα **αριθμήσιμο σύνολο μεταβλητών** $x, y, z, \ldots$, **τα σύμβολα** $+, -, 0$ **και την ισότητα.** Οι όροι της θεωρίας των ομάδων ορίζονται επαγωγικά με βάση τους παρακάτω κανόνες:

- Κάθε μεταβλητή είναι όρος.
- Το 0 είναι όρος.
- Εαν τα s, t είναι όροι, το $s + t$ είναι όρος.
- Εαν το t είναι όρος, το $-t$ είναι όρος.

Τα αξιώματα της θεωρίας των ομάδων εκφράζονται με ισότητες μεταξύ
όρων. Εαν τα x, y, z είναι μεταβλητές,

- $(x + y) + z = x + (y + z)$,
- $x + 0 = 0 + x = x$,
- $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

Ένα **μοντέλο** αυτής της αφηρημένης έννοιας **της θεωρίας των ομάδων** είναι **μια συνολοθεωρητική ερμηνεία** της τελευταίας. Πιο συγκεκριμένα επιλέγουμε ένα σύνολο G και **ερμηνεύουμε** τα σύμβολα $+, -, 0$ θεωρώντας

- μια απεικόνιση $\dot{+} : G \times G \to G$,
- μια απεικόνιση $\dot{-} : G \to G$,

• ένα στοιχείο $\dot{0} \in G$

και γράφοντας $a \dot{+} b$ αντί του στοιχείου $\dot{+}(a, b)$.
Η ερμηνεία των όρων γίνεται επαγωγικά:

• Κάθε μεταβλητή ερμηνεύεται ως στοιχείο του G.

• Ο όρος 0 ερμηνεύεται ως το στοιχείο $\dot{0} \in G$.

• Εαν οι όροι s, t ερμηνεύονται ως στοιχεία $|s|, |t| \in G$, ο όρος $s + t$ ερμηνεύεται ως το στοιχείο $|s| \dot{+} |t| \in G$.

• Εαν ο όρος t ερμηνεύεται ως το στοιχείο $|t| \in G$, ο όρος $-t$ ερμηνεύεται ως το στοιχείο $\dot{-}|t| \in G$.

Η τετράδα $(G, \dot{+}, \dot{-}, \dot{0})$ αποτελεί ένα **μοντέλο της θεωρίας των ομάδων**, εντός του οποίου ισχύουν οι ισότητες

• $(|x| \dot{+} |y|) \dot{+} |z| = |x| \dot{+} (|y| \dot{+} |z|)$,

• $|x| \dot{+} \dot{0} = \dot{0} \dot{+} |x| = |x|$,

• $|x| \dot{+} (\dot{-}|x|) = (\dot{-}|x|) \dot{+} |x| = \dot{0}$,

για κάθε ερμηνεία $|x|, |y|, |z|$ των μεταβλητών x, y, z αντιστοίχως.

Κεφάλαιο 3

ΚΑΘΟΛΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Αυτό το κεφάλαιο έχει ως στόχο να διασαφηνίσει την ακριβή σχέση μεταξύ της **κλασσικής καθολικής άλγεβρας** και της **κατηγορικής καθολικής άλγεβρας**. Αφού μελετήσουμε την καθολική άλγεβρα από την κλασσική της σκοπιά, εργαζόμενοι με τις αλγεβρικές κατηγορίες και τα μοντέλα τους, θα γίνει εύκολα αντιληπτός ο τρόπος με τον οποίο ορίζονται τα ίδια από την κατηγορική τους σκοπιά. Θα δούμε επίσης οτι ανεξαρτήτως του τρόπου με τον οποίο ορίζονται τα παραπάνω, κλασσικά ή κατηγορικά, προκύπτουν κοινά συμπεράσματα γύρω από τις αλγεβρικές θεωρίες και τα μοντέλα τους. Τέτοιο παράδειγμα είναι οι Προτάσεις 3.10 αυτού του κεφαλαίου και 8.1 του κεφαλαίου 8.

Όσα αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο γύρω από τη θεωρία των ομάδων μπορούμε να τα επαναλάβουμε αυτή τη φορά εργαζόμενοι με τη **θεωρία των μοναδιαίων δακτυλίων**. Σε αυτήν την περίπτωση, θα πρέπει να προσθέσουμε μια δεύτερη σταθερά 1 και μια δεύτερη διμελή πράξη $\times$. Με το ίδιο σκεπτικό λοιπόν, μπορούμε να εργαστούμε με οποιαδήποτε αλγεβρική θεωρία που έχει n-μελείς πράξεις, όπου $n \in \mathbb{N}$. Οδηγούμαστε συνεπώς στον επόμενο ορισμό.

3.1 Ορισμός. Παράσταση μιας αλγεβρικής θεωρίας $\mathcal{T}$ ονομάζεται μια θεωρία, που ορίζεται επιλέγοντας ένα αριθμήσιμο σύνολο μεταβλητών, ένα σύνολο O_n από n-μελείς πράξεις για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Οι όροι της θεωρίας ορίζονται επαγωγικά:

(i) Κάθε μεταβλητή είναι όρος

(ii) Εαν $\alpha \in O_n$ και τα $t_1, ..., t_n$ είναι όροι, το $\alpha(t_1, ..., t_n)$ είναι όρος.

(iii) Εαν $\alpha \in O_0$, τότε το α είναι όρος.

Η (iii) είναι άμεση συνέπεια της (ii) για $n = 0$. Κάθε μηδενομελής πράξη καλείται **σταθερά**, συνεπώς η (iii) διατυπωμένη διαφορετικά είναι: Κάθε σταθερά είναι όρος. Τέλος, **αξίωμα** είναι μια ισότητα μεταξύ δυο όρων.

3.2 Ορισμός. Έστω $\mathcal{T}$ η παράσταση μιας αλγεβρικής θεωρίας. **Ερμηνεία** της $\mathcal{T}$ καλείται

- Ένα σύνολο M και
- Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $\alpha \in O_n$ μια απεικόνιση $|\alpha| : M^n \to M$.

Δοθείσης μιας ερμηνείας της $\mathcal{T}$ έχουμε οτι:

- Κάθε μεταβλητή ερμηνεύεται ως στοιχείο του M.
- Εαν $\alpha \in O_n$ και οι όροι $t_1, ..., t_n$ ερμηνεύονται ως στοιχεία $|t_1|, ..., |t_n|$ τότε το $\alpha(t_1, ..., t_n)$ ερμηνεύεται ως το στοιχείο $|\alpha|(|t_1|, ..., |t_n|) \in M$.

3.3 Ορισμός. Μοντέλο της $\mathcal{T}$ ή $\mathcal{T}$-μοντέλο καλείται μια ερμηνεία της $\mathcal{T}$ τέτοια ώστε τα αξιώματα της $\mathcal{T}$ να ικανοποιούνται εντός του M. Πιο συγκεκριμένα, θα πρέπει να ισχύει οτι: Ένα αξίωμα ισχύει στο M όταν, για κάθε ερμηνεία των μεταβλητών, τα δυο μέλη της ισότητας έχουν την ίδια ερμηνεία εντός του M.

Παρατήρηση Η απεικόνιση $|\alpha| : M^n \to M$, όπου $n \in \mathbb{N}$ και $\alpha \in O_n$ καλείται **ερμηνεία της α εντός του** M. Ο όρος αυτός εξηγείται εύκολα εαν σκεφτούμε οτι η $\alpha \in O_n$ αποτελεί μια αφηρημένη n-μελή πράξη της θεωρίας. Η $|\alpha|$ μετουσιώνει αυτήν την αφηρημένη πράξη σε μια πραγματική πράξη που ορίζεται εντός ενός συνόλου M και είναι σύμφωνη με τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε μια απεικόνιση n ορισμάτων. Ας υποθέσουμε για παράδειγμα οτι έχουμε τη διμελή πράξη $+$ στη θεωρία των ομάδων. Η απεικόνι- ση $\dot{+} : G^2 \to G$ είναι η ερμηνεία της $+$ εντός του συνόλου G. Εαν λοιπόν τα x, y ερμηνεύονται ως στοιχεία $|x|, |y| \in G$ τότε το $+(x, y)$ ερμηνεύεται ως το στοιχείο $\dot{+}(|x|, |y|) = |x|\dot{+}|y| \in G$. Το σύνολο G εφοδιασμένο με την απεικόνιση $\dot{+}$ και τις $\dot{-}, \dot{0}$ που αποτελούν τις ερμηνείες των πράξεων -, 0 αντίστοιχα, αποτελεί **ένα μοντέλο της θεωρίας των ομάδων**, αυτό που στην πράξη αντιλαμβανόμαστε ως **μια ομάδα** G.

3.4 Ορισμός. Έστω $\mathcal{T}$ η παράσταση μιας αλγεβρικής θεωρίας. Εαν L, M είναι μοντέλα της $\mathcal{T}$, **$\mathcal{T}$-ομομορφισμός** $f : L \to M$ καλείται μια απεικόνιση $f : L \to M$ τέτοια ώστε για κάθε $\alpha \in O_n$ και για κάθε n-άδα $x_1, ..., x_n$ να ισχύει

$$f(|\alpha|(x_1, ..., x_n)) = |\alpha|(f(x_1), ..., f(x_n))$$

3.5 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{T}$ η παράσταση μιας αλγεβρικής θεωρίας.* ***Τα μοντέλα της $\mathcal{T}$ και οι ομομορφισμοί μεταξύ τους****, με τη συνήθη σύνθεση των απεικονίσεων, αποτελούν μια κατηγορία, που ονομάζεται* ***κατηγορία των μοντέλων*** *της $\mathcal{T}$ και συμβολίζεται με $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$.*

Εως τώρα περιγράψαμε το ακριβές **αντικείμενο της καθολικής άλγεβρας**. Στη συνέχεια θέλουμε να δώσουμε μια ισοδύναμη **κατηγορική παρουσίαση** των εννοιών αυτών. Για το σκοπό αυτό θα χρειαστεί να κάνουμε κάποιες βάσικές παρατηρήσεις.

3.6 Λήμμα. *Έστω $\mathcal{T}$ η παράσταση μιας αλγεβρικής θεωρίας. Υπάρχει μια ελάχιστη σχέση ισοδυναμίας R επί του συνόλου των όρων ώστε:*

• *Εαν το αξίωμα $s = t$ ισχύει, τότε το $(s,t) \in R$.*

• *Εαν οι όροι s, t γράφονται συναρτήσει των μεταβλητών $x_1, ..., x_n$, το $(s,t) \in R$ και τα $t_1, ..., t_n$ είναι όροι, τότε το $(s', t') \in R$ με τα s', t' να προκύπτουν από τα s, t αντικαθιστώντας τα x_i με t_i για $i = 1, ..., n$..*

• *Εαν $\alpha \in O_n$ και τα ζεύγη $(s_i, t_i) \in R$ για $i = 1, ..., n$, τότε*

$$(\alpha(s_1, ..., s_n), \alpha(t_1, ..., t_n)) \in R$$

3.7 Λήμμα. *Έστω $\mathcal{T}$ η παράσταση μιας αλγεβρικής θεωρίας με σύνολο μεταβλητών $\{x_1, ..., x_n, ...\}$. Έστω T_n το σύνολο των όρων που γράφονται συναρτήσει μόνο των μεταβλητών $x_1, ..., x_n$. Έστω F_n το σύνολο πηλίκο T_n/R όπου R η σχέση ισοδυναμίας που αναφέραμε παραπάνω.* ***Το σύνολο F_n είναι εφοδιασμένο με τη δομή ενός $\mathcal{T}$-μοντέλου****.*

3.8 Λήμμα. *Έστω $\mathcal{T}$ η παράσταση μιας αλγεβρικής θεωρίας. Στην κατηγορία $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$,* ***το F_n είναι η n-οστή «συν-δύναμη» του*** *F_1 δηλαδή*

$$F_n = \coprod_{i=1}^{n} F_1$$

Απόδειξη Για κάθε μεταβλητή x_i, $i = 1, ..., n$ θεωρούμε όλες τις κλάσεις ισοδυναμίας όλων των όρων που γράφονται συναρτήσει μόνο του x_i. Έχουμε έτσι το $\mathcal{T}$-μοντέλο $F_1^{(i)}$ ισόμορφο του F_1 και τον εγκλεισμό $s_i : F_1^{(i)} \hookrightarrow F_n$. Προφανώς ο s_i είναι $\mathcal{T}$-ομομορφισμός. Έστω τώρα ένα $\mathcal{T}$-μοντέλο M και μια οικογένεια $\mathcal{T}$-ομομορφισμών $f_i : F_1^{(i)} \to M, i = 1, ..., n$. Ερμηνεύουμε το x_i εντός του M ως το στοιχείο $f_i([x_i])$ όπου $[x_i]$ είναι η κλάση ισοδυναμίας του όρου x_i στο F_n. Ορίζουμε μια απεικόνιση $T_n \to M$ ώστε ο όρος t να απεικονίζεται στην ερμηνεία του εντός του M, που καθορίζεται από τις ερμηνείες των μεταβλητών συναρτήσει των οποίων γράφεται το t. Λόγω του οτι το M είναι $\mathcal{T}$-μοντέλο, η κατασκευή αυτή είναι συμβατή με τα αξιώματα της $\mathcal{T}$ και λόγω του οτι οι f_i είναι $\mathcal{T}$-ομομορφισμοί, η συμβατότητα επεκτείνεται στη σχέση ισοδυναμίας R. Επάγεται έτσι ένας $\mathcal{T}$-ομομορφισμός $f : F_n \to M$.

$$\begin{tikzcd} F_n \arrow[r, "f"] & M \\ & F_1^{(i)} \arrow[ul, "s_i"] \arrow[u, "f_i"'] \end{tikzcd}$$

Εκ κατασκευής θα είναι $f \circ s_i = f_i$. Από την τελευταία σχέση έχουμε

$$f \circ s([x_i]) = f_i([x_i]) \Rightarrow f([x_i]) = f_i([x_i])$$

από όπου προκύπτει η μοναδικότητα του f. Αποδείξαμε λοιπόν οτι το F_n αποτελεί ακριβώς το συν-γινόμενο $\coprod_{i=1}^{n} F_1^{(i)}$ και λόγω του οτι $F_1^{(i)} \cong F_1$ έχουμε τελικά οτι $F_n = \coprod_{i=1}^{n} F_1$. ■

3.9 Λήμμα. *Έστω $\mathcal{T}$ η παράσταση μιας αλγεβρικής θεωρίας. Το $\mathcal{T}$-μοντέλο F_n είναι το* ***ελεύθερο μοντέλο με*** *n* ***γεννήτορες****.*

Απόδειξη Θεωρούμε τον επιλήσμονα συναρτητή $U : \mathrm{Mod}_{\mathcal{T}} \to \mathrm{Set}$ που απεικονίζει ένα $\mathcal{T}$-μοντέλο M στο σύνολο φορέα M. Για το ζητούμενο, αρκεί να δείξουμε οτι το ζεύγος (F_n, f), όπου $f : \{1, ..., n\} \to F_n, \quad i \mapsto [x_i]$, είναι η ανάκλαση του $\{1, ..., n\}$ κατά μήκος του U.

$$\begin{tikzcd} \{1,...,n\} \arrow[r, "f \circ U"] \arrow[dr, "b"'] & U(F_n) \arrow[d, "U(a)"] & F_n \arrow[d, "a"] \\ & U(M) & M \end{tikzcd}$$

Δοθείσης μιας απεικόνισης $\{1, ..., n\} \xrightarrow{b} U(M)$ στην κατηγορία των συνόλων, ισοδύναμα έχουμε n στοιχεία $\alpha_1, ..., \alpha_n \in M$. Θεωρούμε τα $\alpha_1, ..., \alpha_n$ ως ερμηνείες των μεταβλητών $x_1, ..., x_n$ εντός του M. Επάγεται έτσι μια απεικόνιση $T_n \to M$ που απεικονίζει έναν όρο t στην ερμηνεία του εντός του M, η οποία προκύπτει από τις ερμηνείες των $x_1, ..., x_n$ συναρτήσει των οποίων γράφεται το t. Όμως το M είναι $\mathcal{T}$-μοντέλο, συνεπώς η κατασκευή αυτή είναι συμβατή με τη σχέση ισουναμίας R και έτσι επάγεται η ζητούμενη απεικόνιση $a : F_n \to M$ ώστε

$$U(a) \circ (f \circ U) = b$$

Η a είναι εκ κατασκευής μοναδική και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.■

Η παρακάτω πρόταση εισάγει τον τρόπο με τον οποίο θα εργαστούμε στις αλγεβρικές θεωρίες από την κατηγορική σκοπιά. Πιο συγκεκριμένα εισάγει ένα νέο **τρόπο θέασης ενός μοντέλου ως συναρτητή που έχει την ιδιότητα να διατηρεί πεπερασμένα γινόμενα**.

3.10 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{T}$ η παράσταση μιας αλγεβρικής θεωρίας. Έστω $\mathcal{F}$ η πλήρης υποκατηγορία της $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$ που γεννάται από τα ελεύθερα μοντέλα $F_n, n \in \mathbb{N}$. Η δυική κατηγορία $\mathcal{F}^*$ έχει πεπερασμένα γινόμενα και η $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$ είναι ισοδύναμη με την κατηγορία αντικείμενα της οποίας είναι συναρτητές από την $\mathcal{F}^*$ στην κατηγορία των συνόλων, που διατηρούν πεπερασμένα γινόμενα, και μορφισμοί φυσικοί μετασχηματισμοί μεταξύ αυτών.*

Απόδειξη Για μεγαλύτερη σαφήνεια, θα εργαστούμε με την κατηγορία $\mathcal{F}$ που έχει πεπερασμένα συν-γινόμενα και θα θεωρήσουμε τους ανταλλοίωτους συναρτητές από την $\mathcal{F}$ στην Set που μετασχηματίζουν πεπερασμένα συν-γινόμενα σε πεπερασμένα γινόμενα. Από το προηγούμενο λήμμα, ένας μορφισμός $F_n \to F_m$ στην $\mathcal{F}$ είναι η επιλογή n στοιχείων του συνόλου F_m.

• Δοθέντος ενός ανταλλοίωτου συναρτητή $G : \mathcal{F} \to \mathrm{Set}$ που μετασχηματίζει πεπερασμένα συν-γινόμενα σε πεπερασμένα γινόμενα, κατασκευάζουμε ένα $\mathcal{T}$-μοντέλο θέτοντας $M = G(F_1)$. Κάθε n-μελής πράξη α επάγει ένα στοιχείο $[\alpha(x_1, ..., x_n)]$ στο F_n, συνεπώς και έναν $\mathcal{T}$-ομομορφιμσμό $\bar{\alpha} : F_1 \to F_n$. Ο τελευταίος δίνει μια απεικόνιση στην Set:

$$G(\bar{\alpha}) : G(F_n) \to G(F_1)$$

Εξ υποθέσεως όμως

$$G(F_n) \cong G(F_1)^n$$

άρα η $G(\bar{\alpha})$ είναι μια απεικόνιση $|\alpha| : M^n \to M$ και αποτελεί μια ερμηνεία της α στο M. Ας υποθέσουμε τώρα οτι οι μεταβητές $x_1, ..., x_n$ ερμηνεύονται εντός του M ως στοιχεία $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Η ερμηνεία του όρου $\alpha(x_1, ..., x_n)$ εντός του M είναι το $|\alpha|(\alpha_1, ..., \alpha_n)$. Επαγωγικά εαν t είναι ένας όρος με μεταβλητές $x_1, ..., x_n$, ο $[t] \in F_n$ είναι ένας μορφισμός $\bar{t} : F_1 \to F_n$ και η ερμηνεία του $[t]$ είναι η $G(\bar{t})(\alpha_1, ..., \alpha_n)$. Ειδικότερα, εαν s, t είναι όροι με μεταβλητές μεταξύ των $x_1, ..., x_n$ και το αξίωμα $s = t$ ισχύει, τότε η σχέση $[s] = [t]$ ισχύει στην F_n εξορισμού της R. Συνεπώς $\bar{s} = \bar{t}$ και τελικά έχουμε οτι

$$G(\bar{s})(\alpha_1, ..., \alpha_n) = G(\bar{t})(\alpha_1, ..., \alpha_n)$$

Η τελευταία σχέση αποδεικνύει οτι τα s, t έχουν την ίδια ερμηνεία εντός του M. Το M λοιπόν είναι πράγματι $\mathcal{T}$-μοντέλο.

Αντιστρόφως, δοθέντος ενός $\mathcal{T}$-μοντέλου θα ορίσουμε ένα συναρτητή $\mathcal{F} \to \mathrm{Set}$.

• Έστω λοιπόν ένα $\mathcal{T}$-μοντέλο M. Ορίζουμε το συναρτητή $G : \mathcal{F} \to \mathrm{Set}$ ως εξής:

$$G(F_n) := M^n$$

Ένας μορφισμός $f : F_n \to F_m$ αντιστοιχεί στην επιλογή ενός συνόλου n στοιχείων $[t_1], ..., [t_n] \in F_m$ όπου οι όροι $t_1, ..., t_n$ έχουν μεταβλητές $x_1, ..., x_m$. Θα πρέπει να ορίσουμε το μορφισμό

$$G(f) : G(F_m) \to G(F_n)$$

δηλαδή το μορφισμό $$G(f) : M^m \to M^n.$$

Δοθείσης μιας m-άδας $(\alpha_1, ..., \alpha_m) \in M^m$ ερμηνεύοντας κάθε μεταβλητή x_i, $i = 1, ..., m$ ως α_i και απεικονίζουμε το $(\alpha_1, ..., \alpha_m)$ στο $(|t_1|, ..., |t_n|)$ στο M^n που αντιστοιχεί σε αυτήν ακριβώς την ερμηνεία των μεταβλητών. Προφανώς ο G όπως ορίστηκε είναι συναρτητής. Επιπλέον, γνωρίζουμε οτι κάθε μεταβλητή x_i επάγει την απεικόνιση $s_i : F_1 \to F_m$ η οποία αντιστοιχεί στο στοιχείο $[x_i] \in F_m$.

Η $G(s_i) : M^m \to M$ συνεπώς απεικονίζει το $(\alpha_1, ..., \alpha_m)$ στην ερμηνεία του όρου x_i δηλαδή το α_i. Η απεικόνιση $G(s_i)$ λοιπόν δεν είναι άλλη από την προβολή κατά την i-συντεταγμένη και ο G μετασχηματίζει πεπερασμένα συν-γινόμενα σε πεπερασμένα γινόμενα.

• Δοθέντων τώρα δυο μορφισμών $G, H : \mathcal{F} \to \mathrm{Set}$ που μετασχηματίζουν πεπερασμένα συν-γινόμενα σε πεπερασμένα γινόμενα, ένας φυσικός μετασχηματισμός $\mu : G \Rightarrow H$ είναι μια οικογένεια απεικονίσεων $\mu_n : G(F_n) \to H(F_n)$ που ικανοποιούν την ισότητα

$$H(s_i) \circ \mu_n = \mu_1 \circ G(s_i), \quad i = 1, ..., n$$

$$\begin{tikzcd}
G(F_n) \arrow[r, "G(s_i)"] \arrow[d, "\mu_n"'] & G(F_1) \arrow[d, "\mu_1"] \\
H(F_n) \arrow[r, "H(s_i)"'] & H(F_1)
\end{tikzcd}$$

Οι $H(s_i), G(s_i)$ είναι οι προβολές κατά την i-συντεταγμένη, συνεπώς ο μ_n είναι η n-οστή δύναμη του μ_1. Για κάθε n-μελή πράξη α, μπορούμε να θεωρήσουμε τον αντίστοιχο μορφισμό $\bar{\alpha} : F_1 \to F_n$ και η ισότητα

$$H(\bar{\alpha}) \circ \mu_1^n = H(\bar{\alpha}) \circ \mu_n = \mu_1 \circ G(\bar{\alpha})$$

αποδεικνύει οτι ο $\mu_1 : G(F_1) \to H(F_1)$ είναι $\mathcal{T}$-ομομορφισμός.

Αντίστροφα, δοθέντος ενός $\mathcal{T}$-ομομορφισμού $\mu_1 : G(F_1) \to H(F_1)$ ορίζουμε τον $\mu_n : G(F_n) \to H(F_n)$ ως τη n-οστή δύναμη του μ_1. Επάγονται με αυτόν τον ορισμό οι σχέσεις:

$$H(s_i) \circ \mu_n = H(s_i) \circ (\mu_1)^n = \mu_1 \circ G(s_1)$$

για κάθε μεταβλητή x_i και επιπλέον

$$H(\bar{\alpha}) \circ \mu_n = H(\bar{\alpha}) \circ (\mu_1)^n = \mu_1 \circ G(\bar{\alpha})$$

για κάθε n-μελή πράξη α λόγω του οτι ο μ_1 είναι $\mathcal{T}$-ομομορφισμός. Επαγωγικά αποδεικνύεται οτι

$$H(\bar{t}) \circ \mu_n = \mu_1 \circ G(\bar{t})$$

για κάθε όρο $t \in T_n$. Η φυσικότητα του μ προκύπτει τώρα πολύ εύκολα αφού κάθε μορφισμός $f; F_n \to F_m$ προσδιορίζεται επακριβώς από τις συνθέσεις με τους κανονικούς μορφισμούς $s_i : F_1 \to F_n$ εντός του συν-γινομένου F_n.■

Κεφάλαιο 4

ΚΑΤΗΓΟΡΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΚΑΘΟΛΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

4.1 Ορισμός. **Αλγεβρική θεωρία** $\mathcal{T}$ καλούμε μια κατηγορία $\mathcal{T}$ με ένα αριθμίσιμο σύνολο διακεκριμένων αντικειμένων $\{T^0, T^1, T^2, ..., T^n, ...\}$ όπου κάθε αντικείμενο T^n είναι η νιοστή δύναμη του αντικειμένου T^1. **Μοντέλο** της $\mathcal{T}$ ή **$\mathcal{T}$-μοντέλο** καλείται ένας συναρτητής $F : \mathcal{T} \longrightarrow \mathrm{Set}$ που διατηρεί πεπερασμένα γινόμενα. Ένας ομομορφισμός μεταξύ $\mathcal{T}$-μοντέλων είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός. Η κατηγορία των $\mathcal{T}$-μοντέλων της θεωρίας ονομάζεται **αλγεβρική κατηγορία** και συμβολίζεται με $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$.

4.2 Λήμμα. *Έστω $\mathcal{T}$ μια αλγεβρική θεωρία. Εαν $a : F \Rightarrow G$ είναι ένας μορφισμός στη $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$, το τετράγωνο του σχήματος αντιμετατίθεται, όπου οι ισομορφισμοί που σημειώνονται είναι οι κανονικοί ισομορφισμοί.*

$$\begin{tikzcd}
F(T^1) \arrow[r, "a_{T^1}"] & G(T^1) \\
F(T^n) \arrow[u, "F(p_i)"] \arrow[r, "a_{T^n}"] \arrow[d, "\cong"'] & G(T^n) \arrow[u, "G(p_i)"'] \arrow[d, "\cong"] \\
F(T^1)^n \arrow[r, "(a_{T^1})^n"'] & G(T^1)^n
\end{tikzcd}$$

Απόδειξη Για κάθε προβολή $\rho_i : T^n \longrightarrow T^1$ έχουμε

$$G(\rho_i) \circ a_{T^n} = a_{T^1} \circ F(\rho_i) = G(\rho_i) \circ (a_{T^1})^n$$

εφόσον οι $G(\rho_i)$ και $F(\rho_i)$ είναι οι i-προβολές των γινομένων $G(T^1)^n$ και $F(T^1)^n$ αντιστοίχως. Ως συνέπεια της τελευταίας σχέσης έχουμε τη ζητούμενη $a_{T^n} = (a_{T^1})^n$.■

4.3 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{T}$ μια αλγεβρική θεωρία. Θεωρούμε το* ***συναρτητή αποτίμησης στο βασικό αντικείμενο*** *T^1 της θεωρίας τον οποίο συμβολίζουμε με $U : \mathrm{Mod}_{\mathcal{T}} \longrightarrow \mathrm{Set}$. Ισχύουν τα εξής:*

(1) Ο U είναι ***αναπαραστάσιμος*** *μέσω του συναρτητή $\hom_{\mathcal{T}}(T^1, -)$,*

(2) ο U είναι ***πιστός****,*

(3) ο U ***ανακλά ισομορφισμούς****,*

(4) κάθε πεπερασμένο σύνολο με n στοιχεία ($n \in \mathbb{N}$) δέχεται τον $\hom_{\mathcal{T}}(T^n, -)$ ως ***ανάκλαση κατά μήκος του*** *U,*

(5) ο $\hom_{\mathcal{T}}(T^1, -)$ είναι ***ισχυρός γεννήτορας*** *της $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$.*

Απόδειξη Κάθε αναπαραστάσιμος συναρτητής διατηρεί πεπερασμένα γινόμενα συνεπώς ο $\hom_{\mathcal{T}}(T^n, -)$ είναι $\mathcal{T}$-μοντέλο. Από το Λήμμα του Yoneda, δοθέντος ενός $\mathcal{T}$-μοντέλου F έχουμε την ισοδυναμία

$$\mathrm{Nat}(\hom_{\mathcal{T}}(T^1, -), F) \cong F(T^1) \cong U(F)$$

που αποδεικνύει οτι ο U είναι αναπαραστάσιμος από τον $\hom_{\mathcal{T}}(T^1, -)$.
Ομοίως έχουμε

$$\mathrm{Nat}(\hom_{\mathcal{T}}(T^n, -), F) \cong F(T^n) \cong F(T^1)^n \cong \mathrm{Set}(\{1, ..., n\}, F(T^1)) \cong$$

$$\mathrm{Set}(\{1, ..., n\}, U(F))$$

που αποδεικνύει οτι ο $\hom_{\mathcal{T}}(T^n, -)$ είναι η ανάκλαση του συνόλου $\{1, ..., n\}$ κατά μήκος του U.

• Έστω ένας μορφισμός $\mathcal{T}$-μοντέλων $a : F \Rightarrow G$ ώστε ο a_{T^1} να είναι ένα προς ένα και επί, δηλαδή ισομορφισμός στην κατηγορία των συνόλων. Λόγω της ισοδυναμίας $a_{T^n} = (a_{T^1})^n$ και ο a_{T^n} είναι ισομορφισμός $\forall\, n \in \mathbb{N}$, δηλαδή για κάθε αντικείμενο της θεωρίας $\mathcal{T}$. Συνεπώς όταν ο $U(a) = a_{T^1}$ είναι ισομορφισμός το ίδιο ισχύει για τον a και ο U ανακλά ισομορφισμούς.

• Λόγω της σχέσης

$$\mathrm{Nat}(\hom_{\mathcal{T}}(T^1,-),F)\cong U(F),\quad \forall F\in \mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$$

ο $\mathrm{Nat}(\hom_{\mathcal{T}}(T^1,-),-)$ ανακλά ισομορφισμούς που σημαίνει οτι ο $\hom_{\mathcal{T}}(T^1,-)$ είναι ισχυρός γεννήτορας της $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$.

• Δοθέντων τέλος δυο μορφισμών $\mathcal{T}$-μοντέλων α,β ώστε

$$U(\alpha)=U(\beta)\Rightarrow \alpha_{T^1}=\beta_{T^1}$$

έχουμε

$$\alpha_{T^n}=(\alpha_{T^1})^n=(\beta_{T^1})^n=\beta_{T^n}\Rightarrow \alpha=\beta$$

που αποδεικνύει οτι ο U είναι πιστός.■

Δοθείσης μιας αλγεβρικής θεωρίας $\mathcal{T}$, μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε μια **παράσταση** $\mathcal{T}_1$ της αλγεβρικής θεωρίας επιλέγοντας τα στοιχεία του συνόλου $\hom_{\mathcal{T}}(T^n,T^1)$ ως n-μελείς πράξεις της $\mathcal{T}_1$. Στη συνέχεια, δοθέντος ενός $\mathcal{T}_1$-όρου t που γράφεται συναρτήσει των μεταβλητών $x_1,...,x_n$, έστω $t=f(x_1,...,x_n)$ μπορούμε να ορίσουμε επαγωγικά τη n-μελή πράξη $t\in \hom_{\mathcal{T}}(T^n,T^1)$ που σχετίζεται με το t:

• Η i-προβολή $T^n\to T^1$ σχετίζεται με το x_i.

• Εαν οι πράξεις $\beta_1,...,\beta_m$ σχετίζονται με τους όρους $s_1,...,s_m$ και α ειναι μια m-μελής πράξη, η σύνθεση $\alpha\circ(\beta_1,...,\beta_m)$ σχετίζεται με τον όρο $\alpha(s_1,...,s_m)$.

• Επιλέγουμε το $t=f(x_1,...,x_n)$ ως αξίωμα της $\mathcal{T}_1$.

Παρατήρηση Προφανώς εαν το $(T^n,p_1,...,p_n)$ είναι η n-οστή δύναμη του T^1 και $\alpha:T^n\to T^1$ ένας ισομορφισμός, τότε το $(T^n,p_1\circ\alpha,...,p_n\circ\alpha)$ είναι επίσης η n-οστή δύναμη του T^1. Πιο ειδικά όταν $n=1$, για κάθε ισομορφισμό $\alpha:T^n\to T^1$ το (T^1,α) είναι η «πρώτη» δύναμη του T^1. Ανάμεσα σε όλες τις δυνατές επιλογές του α, υπάρχει μια κανονική επιλογή ώστε ο α να είναι ο ταυτοτικός μορφισμός του T^1 στην κατηγορία $\mathcal{T}$, δηλ. $\alpha=1_{T^1}$. Είναι βολικό τώρα στην περιγραφή της παράστασης $\mathcal{T}_1$ μιας αλγεβρικής θεωρίας $\mathcal{T}$, να θεωρήσουμε την κανονική επιλογή του α. Με άλλα λόγια, να απαιτήσουμε στην παράσταση $\mathcal{T}_1$ να ισχύει το αξίωμα:

$$1_{T^1}(x)=x$$

4.4 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{T}$ μια αλγεβρική θεωρία και η παράσταση $\mathcal{T}_1$ αυτής της αλγεβρικής θεωρίας. Οι κατηγορίες των μοντέλων της $\mathcal{T}$ και της $\mathcal{T}_1$ είναι* ***ισοδύναμες****, δηλαδή $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}} \cong \mathrm{Mod}_{\mathcal{T}_1}$ και μέσω αυτής της ισοδυναμίας, ο συναρτητής $U : \mathrm{Mod}_{\mathcal{T}} \longrightarrow \mathrm{Set}$ απεικονίζει ένα $\mathcal{T}_1$-μοντέλο στο σύνολο φορέα του.*

Απόδειξη Έστω $F : \mathcal{T} \to \mathrm{Set}$ ένα $\mathcal{T}$-μοντέλο. Το σύνολο $F(T^1)$ εφοδιασμένο με τις πράξεις

$$F(a) : F(T^1)^n \cong F(T^n) \to F(T^1), \quad \forall\, a \in \hom_{\mathcal{T}}(T^n, T^1)$$

είναι προφανώς ένα $\mathcal{T}_1$-μοντέλο. Τα αξιώματα που απαιτούνται αποδεικνύονται εύκολα οτι ισχύουν με τη χρήση των ιδιοτήτων του συναρτητή F. Επιπλέον δοθέντος ενός μορφισμού $\phi : F \Rightarrow G$ μεταξύ $\mathcal{T}$-μοντέλων, ισοδυνάμως έχουμε ένα μορφισμό $\phi_{T^1} : F(T^1) \to G(T^1)$ μεταξύ των αντίστοιχων $\mathcal{T}_1$-μοντέλων.

Αντίστροφα τώρα πρέπει να αποδείξουμε οτι κάθε $\mathcal{T}_1$-μοντέλο M είναι ισόμορφο με ένα μοντέλο $F(T^1)$ για κάποιο $\mathcal{T}$-μοντέλο F. Για το σκοπό αυτό ορίζουμε κατάλληλα τον F ως εξής:

$$F(T^n) := M^n$$

Εαν τώρα $a : T^n \to T^1$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{T}$, ο a είναι επίσης μια n-μελής πράξη της $\mathcal{T}_1$. Ορίζουμε την

$$F(a) : F(T^n) = M^n \to M = F(T^1)$$

που αποτελεί ερμηνεία της της πράξης a εντός του M.
Γενικότερα, δοθέντος $a : T^n \to T^m$ ορίζουμε

$$F(a) : F(T^n) \cong M^n \to M^m \cong F(T^m)$$

ως τη m-αδα $(F(\rho_1 \circ a), ..., F(\rho_m \circ a))$
Λόγω τηςισχύος του T_1 αξιώματος εντός του M ο F διατηρεί εκ των προτέρων κάθε σύνθεση της μορφής $T^n \to T^m \to T^1$. Αυτό έχει ως συνέπεια οτι ο F διατηρεί σύνθεση οποιασδήποτε μορφής εξ ορισμού του $F(a)$. Από το αξίωμα $1_{T^1}(x) = x$ της παράστασης $\mathcal{T}_1$ προκύπτει οτι ο F διατηρεί τον ταυτοτικό μορφισμό του T^1 δηλ. $F(1_{T^1}) = 1_{F(T^1)}$. Γνωρίζουμε επίσης οτι για κάθε μορφισμό $\beta : G \Rightarrow H$ μεταξύ δυο $\mathcal{T}$-μοντέλων έχουμε $\beta_{T^n} \cong (\beta_{T^1})^n$.
Με τη βοήθεια της τελευταίας σχέσης έχουμε:

$$F(1_{T^n}) \cong F[(1_{T^1})^n] \cong [F(1_{T^1})]^n \cong [1_{F(T^1)}]^n \cong 1_{F(T^1)^n} \cong 1_{F(T^n)}$$

Άρα λοιπόν ο F διατηρεί τον ταυτοτικό μορφισμό κάθε αντικειμένου T^n.
Ο συναρτητής F που ορίσαμε είναι ο κατάλληλος ώστε το $\mathcal{T}_1$-μοντέλο M να είναι ισόμορφο με το $\mathcal{T}$-μοντέλο $F(T^1)$ και η απόδειξη είναι πλήρης.■

Παραδείγματα Αλγεβρικών Θεωριών 1)Στην κεφάλαιο 2 μελετήσαμε τη θεωρία των ομάδων, από την οποία εξάγεται η αντίστοιχη θεωρία. Ακολουθώντας τα ίδια βήματα και κάνοντας ανάλογες παρατηρήσεις μπορούμε να ορίσουμε τις **αλγεβρικές θεωρίες των μονοειδών, των αβελιανών ομάδων, των δακτυλίων, των αντιμεταθετικών δακτυλίων** και ούτω καθεξής.

2)Μια τετριμμένη παράσταση αλγεβρικής θεωρίας είναι αυτή που δεν περιέχει **καμμία πράξη** και **κανένα αξίωμα**. Ένα μοντέλο λοιπόν αυτής της θεωρίας θα είναι απλά ένα σύνολο. Λαμβάνουμε έτσι την **αλγεβρική θεωρία των συνόλων** η οποία αποτελεί αλγεβρική θεωρία με τετριμμένο τρόπο όπως συνηθίζουμε να λέμε. Με χρήση των προηγουμένων προκύπτει οτι η αλγεβρική θεωρία των συνόλων είναι η δυική της κατηγορίας των πεπερασμένων συνόλων.

3)Η δομή ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου X περιγράφεται όχι από πράξεις ορισμένες επί του X, αλλά από μια σχέση επί του X. Πράγματι η θεωρία των μερικώς διατεταγμένων συνόλων δεν είναι αλγεβρική. Άν όμως αντί ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου έχουμε ένα **κάτω ημιδικτυωτό**$(X, \leq, \wedge)$ τότε αποδεικνύεται οτι **η θεωρία των κάτω ημιδικτυωτών είναι αλγεβρική**.

Η δομή ενός κάτω ημιδικτυωτού μπορεί να περιγραφεί ισοδύναμα από τη διμελή πράξη $\wedge : X \times X \to X$ η οποία ικανοποιεί τα αξιώματα

(1) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

(2) $x \wedge y = y \wedge x$

(3) $x \wedge x = x$

Η μερική διάταξη του κάτω ημιδικτυωτού περιγράφεται σε αυτήν την περίπτωση από τη σχέση

$$x \leqslant y \text{ εαν και μόνον εαν } x \wedge y = x$$

Αντίστροφα, δοθέντος ενός συνόλου X και μιας πράξης που ικανοποιεί τα τρία παραπάνω αξιώματα η σχέση

$$x \leqslant y \text{ εαν και μόνον εαν } x \wedge y = x$$

ορίζει μια μερική διάταξη επι του X και το $x \wedge y$ είναι το infimum του ζεύγους (x, y). Η $\leqslant$ είναι πράγματι σχέση διάταξης αφού ισχύουν:

• $x \leqslant x \Leftrightarrow x \wedge x = x$ δηλ. είναι αυτοπαθής,

• $x \leqslant y, x \geqslant y \Rightarrow x \wedge y = x, y \wedge x = y \Rightarrow x = x \wedge y = y \wedge x = y$ δηλ. είναι αντισυμμετρική,

• $x \leqslant y, y \leqslant z \Rightarrow x \wedge y = x, y \wedge z = y \Rightarrow x = x \wedge y = x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge z \Rightarrow x \leqslant z$ δηλ. είναι μεταβατική.

Το $x \wedge y$ αποδεικνύεται επίσης οτι είναι το infimum του ζευγους (x, y). Πράγματι έχουμε

$$x \wedge (x \wedge y) = (x \wedge x) \wedge y = x \wedge y \Rightarrow x \wedge y \leqslant x$$

Ομοίως έχουμε οτι $x \wedge y \leqslant y$. Εαν τώρα $z \leqslant x$ και $z \leqslant y$ για ένα $z \in X$ έχουμε

$$z = z \wedge z = (z \wedge x) \wedge (z \wedge y) = (z \wedge x) \wedge (y \wedge z) = z \wedge (x \wedge y) \wedge z = (x \wedge y) \wedge z$$

που δείχνει οτι $z \leqslant x \wedge y$.

Να παρατηρήσουμε τέλος οτι εαν έχουμε την ύπαρξη ενός μέγιστου στοιχείου στο κάτω ημιδικτυωτό, αυτή μπορεί να παρασταθεί μέσω μιας σταθεράς 1 και του αξιώματος

$$x \wedge 1 = x$$

Ομοίως για την ύπαρξη ενός ελάχιστου στοιχείου απαιτείται μια σταθερά 0 και το αξίωμα

$$0 \wedge x = 0$$

Ομοίως αποδεικνύεται οτι **η θεωρία των άνω ημιδικτυωτών** είναι αλγεβρική.

4)Κάθε δικτυωτό είναι εφοδιασμένο με τη δομή ενός άνω ημιδικτυωτού και ενός κάτω ημιδικτυωτού, οι οποίες προκύπτουν απο την ίδια διάταξη που ορίζεται στο σύνολο φορέα του δικτυωτού. Η **θεωρία των δικτυωτών** συνεπώς είναι αλγεβρική και δέχεται δυο διμελείς πράξεις $\wedge, \vee$ που είναι προσεταιριστικές, αντιμεταθετικές και ταυτοδύναμες. Επιπλέον η σχέση μεταξύ των δυο αυτών πράξεων περιγράφεται απο τα αξιώματα:

• $x \wedge (x \vee y) = x$

• $(x \wedge y) \vee y = y$

Αυτό που μένει να επαληθεύσουμε στην περίπτωση αυτή είναι οτι οι δυο διατάξεις $\leqslant, \preceq$ που ορίζονται από τι πράξεις $\wedge, \vee$ αντίστοιχα στο σύνολο φορέα του δικτυωτού ταυτίζονται. Πράγματι έχουμε:

$$x \leqslant y \Leftrightarrow x \wedge y = x, \quad x \preceq y \Leftrightarrow x \vee y = y$$

Εαν $x \leqslant y$ τότε $y = (x \wedge y) \vee y = x \vee y \Rightarrow x \preceq y$

Εαν $x \preceq y$ τότε $x = x \wedge (x \vee y) = x \wedge y \Rightarrow x \leqslant y$

Συνεπώς $x \leqslant y \Leftrightarrow x \preceq y$

5)Εαν τώρα στη θεωρία των δικτυωτών θεωρήσουμε επιπλέον τα αξιώματα

• $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

• $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

τότε προκύπτει **η θεωρία των επιμεριστικών δικτυωτών** που είναι επίσης αλγεβρική. Ομοίως θεωρώντας μια μονομελή πράξη $(-)^*$που ικανοποιεί τα αξιώματα

$$x \vee x^* = 1, \quad x \wedge x^* = 0$$

προκύπτει **η αλγεβρική θεωρία των αλγεβρών** Boole.

6)Εαν R είναι ενας δακτύλιος, αριστερό R-module καλείται μια αβελιανή ομάδα M εφοδιασμένη με ένα βαθμωτό πολλαπλασιασμό $R \times M \to M$. Ένας τέτοιος βαθμωτός πολλαπλασιασμός δεν έχει την απαιτούμενη μορφή μιας απεικό- νισης $M^n \to M$. Παρολαυτά αποδεικνύεται οτι **η θεωρία των αριστερών** R-modules είναι αλγεβρική. Η απόδειξη είναι εύκολη εαν προσθέσουμε στη θεωρία των αβελιανών ομάδων μια μονομελή πράξη $\overline{r}$ για κάθε στοιχείο r του R. Η ερμηνεία της $\overline{r}$ στο M θα είναι ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός ενός στοι- χείου με το r. Προστίθενται επίσης τα παρακάτω αξιώματα.

• $\overline{r}(x + y) = \overline{r}(x) + \overline{r}(y)$

• $\overline{r}(\overline{s}(x)) = (\overline{rs})(x)$

• $(\overline{r+s})(x) = \overline{r}(x) + \overline{s}(x)$

και
• $\overline{1}(x) = x$ όταν ο R είναι μοναδιαίος.

Ομοίως ορίζεται και **η αλγεβρική θεωρία των δεξιών** $R-$modules .

7)Εαν G είναι μια ομάδα (πολλαπλασιαστική), G**-σύνολο** καλείται ένα σύνολο X εφοδιασμένο με μια δράση της G επι αυτού:

$$G \times X \to X, \quad (g, x) \mapsto g \cdot x$$

ώστε να ικανοποιούνται τα αξιώματα

• $(g\acute{g}) \cdot x = g(\acute{g}(x))$

• $1 \cdot x = x$

Δοθείσης μιας ομάδας G, **η θεωρία των** G **-συνόλων** είναι αλγεβρική. Μια παράσταση αυτής της θεωρίας δίνεται από μια μονομελή πράξη $\overline{g}$ για κάθε $g \in G$ και τα παρακάτω αξιώματα.

• $\overline{g\acute{g}}(x) = \overline{g}(\overline{\acute{g}}(x))$

• $\overline{1}(x) = x$

Αξίζει να παρατηρήσουμε εδώ οτι το κενό σύνολο είναι πάντοτε μοντέλο αυτής της θεωρίας.

8)Ενα παράδειγμα αλγεβρικής θεωρίας είναι αυτό στο οποίο η παράσταση της θεωρίας αποτελείται μόνο από μια σταθερά και δεν έχει αξιώματα. Τα μοντέλα εδώ είναι τα ζεύγη της μορφής (X, x) όπου X είναι ένα σύνολο και x ένα στοιχείο του X. Ένας μορφισμός $f : (X, x) \to (Y, y)$ είναι απλώς μια απεικόνιση $f : X \to Y$ ώστε $f(x) = y$.

9)Θεωρουμε την κατηγορία $\mathcal{T}$ που αποτελείται απο τους χώρους $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ και τις συναρτήσεις κλάσεως C^∞ μεταξύ αυτών. Αυτή αποτελεί προφανώς μια αλγεβρική θεωρία. Τα μοντέλα αυτής της θεωρίας καλούνται C^∞ **άλγεβρες**. Δοθείσης μιας διαφορίσιμης πολλαπλότητας V κλάσης C^∞, το σύνολο $C^\infty(V, \mathbb{R})$ των πραγματικών συναρτήσεων που ορίζονται στο V μπορεί να εφοδιαστεί με τη δομή μιας C^∞ άλγεβρας. Δοθεισών απεικονίσεων $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, δηλαδή πράξεων της θεωρίας, ορίζουμε την ερμηνεία τους

$$|a|\colon C^{\infty}(V,\mathbb{R}) \times ... \times C^{\infty}(V,\mathbb{R}) \cong C^{\infty}(V,\mathbb{R}^n) \longrightarrow C^{\infty}(V,\mathbb{R})$$

ως την απεικόνιση που στέλνει την n-αδα $(f_1, ..., f_n)$, $f_i : V \to \mathbb{R}$, στοιχείων του $C^{\infty}(V,\mathbb{R})$ στην C^{∞}-συνάρτηση $a \circ (f_1, ..., f_n)$ οπως φαίνεται στο σχήμα:

$$V \overset{(f_1,...,f_n)}{\longrightarrow} \mathbb{R}^n \overset{a}{\longrightarrow} \mathbb{R}$$

Κεφάλαιο 5

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΚΑΤΗΓΟΡΙΩΝ

ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΣΥΝΟΡΙΑ ΣΤΙΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ

Στην ενότητα αυτή θα δείξουμε οτι κάθε αλγεβρική κατηγορία είναι **πλήρης** και **συν-πλήρης**, περιέχει δηλαδή όλα τα μικρά όρια και μικρά συνόρια αντίστοιχα.

5.1 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{T}$ μια αλγεβρική θεωρία. Η κατηγορία* $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$ *είναι* ***πλήρης*** *και τα όρια υπολογίζονται «κατά σημείο». Ειδικότερα, ο επιλήσμων συναρτητής $U : \mathrm{Mod}_{\mathcal{T}} \to \mathrm{Set}$* ***διατηρεί και ανακλά όρια****.*

Απόδειξη Γνωρίζουμε οτι τα όρια στην κατηγορία $\mathrm{Fun}(\mathcal{T}, \mathrm{Set})$ υπολογίζονται κατά σημείο. Επίσης ξέρουμε οτι το όριο ενός διαγράμματος που αποτελείται απο συναρτητές που διατηρούν πεπερασμένα γινόμενα είναι συναρτητής που διατηρεί πεπερασμένα γινόμενα. Λαμβάνοντας υπόψη οτι η $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$ είναι υποκατηγορία της $\mathrm{Fun}(\mathcal{T}, \mathrm{Set})$ φθάνουμε στο συμπέρασμα οτι η $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$ είναι πλήρης και οτι τα όρια σε αυτήν υπολογίζονται κατά σημείο. Επιπλέον η αποτίμηση στο T^1 διατηρεί όρια επομένως ο επιλήσμων συναρτητής U διατηρεί όρια. Λόγω του οτι ο U διατηρεί όρια, ανακλά ισομορφισμούς και η $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$ είναι πλήρης, με βάση την Πρόταση 1.5 προκύπτει οτι ο U επίσης ανακλά όρια.■

5.2 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{T}$ μια αλγεβρική θεωρία. Η κατηγορία* $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$ *έχει* ***φιλτραρισμένα συνόρια*** *τα οποία υπολογίζονται κατά σημείο. Επιπλέον ο επιλήσμων συναρτητής $U : \mathrm{Mod}_{\mathcal{T}} \to \mathrm{Set}$* ***διατηρεί και ανακλά φιλτραρισμένα συνόρια****.*

Απόδειξη Γνωρίζουμε οτι στην κατηγορία $\mathrm{Fun}(\mathcal{T},\mathrm{Set})$ τα συνόρια υπολογίζονται κατά σημείο. Επίσης γνωρίζουμε οτι το συνόριο ενός φιλτραρισμένου διαγράμματος που αποτελείται από συναρτητές που διατηρούν πεπερασμένα γινόμενα είναι συναρτητής που διατηρεί πεπερασμένα γινόμενα. Συνεπώς η $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$ έχει φιλτραρισμένα συνόρια και εφόσον πρόκειται για υποκατηγορία της $\mathrm{Fun}(\mathcal{T},\mathrm{Set})$ αυτά θα υπολογίζονται κατά σημείο.

Επιπλέον η αποτίμηση στο T^1 διατηρεί φιλτραρισμένα συνόρια οπότε το ίδιο ισχύει και για τον επιλήσμονα συναρτητή U καθότι η δράση του επάνω σε ένα μοντέλο $F:\mathcal{T}\to\mathrm{Set}$ είναι η αποτίμηση $F(T^1)$ επι του βασικού αντικειμένου T^1 της αλγεβρικής θεωρίας.

Τέλος, εφόσον ο U διατηρεί φιλτραρισμένα συνόρια, ανακλά ισομορφισμούς και αποδείξαμε οτι η $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$ έχει φιλτραρισμένα συνόρια , με βάση την Πρόταση 1.5 προκύπτει οτι ο U επίσης ανακλά φιλτραρισμένα συνόρια.■

5.3 Πόρισμα. *Έστω $\mathcal{T}$ μια αλγεβρική θεωρία. Στη $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$* ***τα πεπερασμένα όρια αντιμετατίθενται με τα φιλτραρισμένα συνόρια.***

Απόδειξη Η ζητούμενη ιδιότητα ισχύει στην κατηγορία των συνόλων. Επιπλέον τα πεπερασμένα όρια και τα φιλτραρισμένα συνόρια υπολογίζονται κατά σημείο στην κατηγορία $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$. Από τις δυο αυτές παρατηρήσεις προκύπτει άμεσα το ζητούμενο.■

5.4 Πόρισμα. *Έστω $\mathcal{T}$ μια αλγεβρική θεωρία. Ο επιλήσμων συναρτητής $U:\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}\to\mathrm{Set}$* ***διατηρεί και ανακλά μονομορφισμούς****.*

Απόδειξη Γνωρίζουμε οτι ο U διατηρεί και ανακλά ισομορφισμούς και ζεύγη πυρήνα οπότε από την Πρόταση 1.2 προκύπτει άμεσα οτι ο U επίσης διατηρεί και ανακλά μονομορφισμούς.■

5.5 Θεώρημα. *Έστω $\mathcal{T}$ μια αλγεβρική θεωρία. Η κατηγορία $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$ είναι* ***ανακλαστική*** *στην κατηγορία $\mathrm{Fun}(\mathcal{T},\mathrm{Set})$ και εξαιτίας αυτού είναι* ***πλήρης*** *και* ***συν-πλήρης****.*

Απόδειξη Γνωρίζουμε οτι η κατηγορία $\mathrm{Fun}(\mathcal{T},\mathrm{Set})$ είναι πλήρης και συν-πλήρης. Με βάση την Πρόταση 1.18 κάθε ανακλαστική κατηγορία της τελευταίας θα είναι πλήρης και συν-πλήρης. Απομένει να δείξουμε οτι η $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$ είναι ανακλαστική στη $\mathrm{Fun}(\mathcal{T},\mathrm{Set})$. Αρκεί να δείξουμε οτι ο συναρτητής εγκλεισμού

$$K:\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}\hookrightarrow\mathrm{Fun}(\mathcal{T},\mathrm{Set})$$

έχει αριστερά προσαρτημένο.

Γνωρίζουμε ήδη οτι η $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$ είναι πλήρης και οτι ο εγκλεισμός στην κατηγορία $\mathrm{Fun}(\mathcal{T}, \mathrm{Set})$ διατηρεί όρια. Με βάση το Θεώρημα Προσαρτημένου Συναρτητή (Θεώρημα 1.16) απομένει να εξακριβώσουμε εαν ικανοποιείται η συνθήκη του συνόλου επίλυσης.

Θεωρούμε ένα συναρτητή $F\colon \mathcal{T} \to \mathrm{Set}$. Θέλουμε να βρούμε ένα σύνολο S_F συναρτητών $H\colon \mathcal{T} \to \mathrm{Set}$ που διατηρούν πεπερασμένα γινόμενα, έτσι ώστε κάθε φυσικός μετασχηματισμός $\varphi : F \Rightarrow G$, όπου ο G διατηρεί πεπερασμένα γινόμενα, να παραγοντοποιείται μέσω ενός συναρτητή από το σύνολο S_F.

Θεωρούμε ως σύνολο επίλυσης S_F το σύνολο όλων των συναρτητών $H : \mathcal{T} \to \mathrm{Set}$ που διατηρούν πεπερασμένα γινόμενα έτσι ώστε το $H(T^1)$ να έχει πληθάριθμο μικρότερο από αυτόν του συνόλου

$$\coprod_{n\in \mathbb{N}} \hom_{\mathcal{T}}(T^n, T^1) \times F(T^1)^n$$

Διαλέγουμε ένα μόνο σύνολο, για κάθε πληθάριθμο μικρότερο του παραπάνω, ως δυνατή τιμή του $H(T^1)$. Με δεδομένο το σύνολο $H(T^1)$ υπάρχει (μέχρι μιας κανονικής επιλογής των γινομένων) ακριβώς ένα σύνολο από τρόπους κατασκευής ενός συναρτητή H που να διατηρεί πεπερασμένα γινόμενα, αφού για κάθε μορφισμό $\beta : T^n \to T^m$, υπάρχει ένα σύνολο από πιθανούς υποψηφίους $H(\beta)$, τουτέστιν το σύνολο των απεικονίσεων $H(T^1)^n \to H(T^1)^m$.

Καλούμε X το σύνολο των στοιχείων του $G(T^1)$ που έχουν τη μορφή $\varphi_{T^1}(x)$ για κάποιο $x \in F(T^1)$. Ο πληθάριθμος του X φράσσεται από αυτόν του $F(T^1)$.
Θεωρούμε το σύνολο Y όλων των στοιχείων του $G(T^1)$ που είναι της μορφής $a(x_1, ..., x_n)$ οπου n ακέραιος, a n-μελής πράξη και τα στοιχεία $x_i \in X$. Ο πληθάριθμος του Y φράσσεται από αυτόν του συνόλου

$$\coprod_{n\in \mathbb{N}} \hom_{\mathcal{T}}(T^n, T^1) \times X^n$$

και προφανώς και από του συνόλου

$$\coprod_{n\in \mathbb{N}} \hom_{\mathcal{T}}(T^n, T^1) \times F(T^1)^n$$

Εκ κατασκευής, το Y είναι ευσταθές ως προς τη δράση όλων των n-μελών πράξεων της αλγεβρικής θεωρίας οπότε θέτοντας $H(T^n) := Y^n$ έχουμε:

$$H(T^n) = Y^n \subseteq G(T^1)^n \cong G(T^n)$$

Ορίζεται έτσι ένας υποσυναρτητής $H \subseteq G$ ο οποίος εκ κατασκευής διατηρεί πεπερασμένα γινόμενα. Παρατηρούμε οτι ο φ παραγοντοποιείται μέσω του H

αφού δοθέντος $x \in F(T^n)$ έχουμε:

$$\begin{tikzcd} G(T^n) \arrow[d, "G(p_i)"'] & F(T^n) \arrow[l, "\varphi_{T^n}"'] \arrow[d, "F(p_i)"] \\ G(T^1) & F(T^1) \arrow[l, "\varphi_{T^1}"'] \end{tikzcd}$$

$$G(p_i)(\varphi_{T^n(x)}) = \varphi_{T^1}(F(p_i)(x)) \in Y$$

και συνεπώς $\varphi_{T^n(x)} \in Y^n$

$$\begin{tikzcd} F(T^n) \arrow[r, "\varphi_{T^n}"] \arrow[dr, "\varphi_{T^n}"'] & G(T^n) \\ & H(T^n) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Πράγματι λοιπόν ο εγκλεισμός $K : \mathrm{Mod}_{\mathcal{T}} \hookrightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{T}, \mathrm{Set})$ ικανοποιεί τη συνθήκη του συνόλου επίλυσης για κάθε αντικείμενο της $\mathrm{Fun}(\mathcal{T}, \mathrm{Set})$ και η απόδειξη του Θεωρήματος είναι πλήρης. ■

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΚΡΙΒΕΙΑΣ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΚΑΤΗΓΟΡΙΩΝ

Ο κύριος στόχος μας σε αυτήν την ενότητα είναι να δείξουμε οτι οι αλγεβρικές κατηγορίες είναι **ομαλές** και **ακριβείς**. Δεδομένου του γεγονότος οτι οι κατηγορίες $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$ και $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}_1}$ είναι ισοδύναμες, για λόγους ευκολίας θα χρησιμοποιήσουμε την παρουσίαση $\mathcal{T}_1$ της αλγεβρικής θεωρίας $\mathcal{T}$.

5.6 Λήμμα. *Έστω $\mathcal{T}$ μια αλγεβρική θεωρία και $\mathcal{T}_1$ η αντίστοιχη παρουσίαση της αλγεβρικής θεωρίας. Στη $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$, μια **σχέση ισοδυναμίας** επί ενός αντικειμένου M είναι ένα $\mathcal{T}_1$-υπομοντέλο $R \subsetneqq M \times M$ που είναι σχέση ισοδυναμίας στην κατηγορία των συνόλων. Μια τέτοια σχέση ισοδυναμίας R καλείται **ισοτιμία** επί του M.*

Απόδειξη Προφανώς ένα $\mathcal{T}_1$-υπομοντέλο $R \subsetneqq M \times M$ που είναι σχέση ισοδυναμίας στη Set είναι σχέση ισοδυναμίας στη $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}_1}$ που είναι ισοδύναμη με τη $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$. Θα δείξουμε οτι ισχύει και το αντίστροφο.

Έστω λοιπόν μια σχέση ισοδυναμίας $R \rightrightarrows F$ στη $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$. Ισοδύναμα η

$$\hom_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}}(\hom_{\mathcal{T}}(T_1, -), R) \rightrightarrows \hom_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}}(\hom_{\mathcal{T}}(T_1, -), F)$$

είναι σχέση ισοδυναμίας στη Set.
Όμως

$$\hom_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}}(\hom_{\mathcal{T}}(T_1,-),R) \cong U(R)$$

συνεπώς η $U(R) \rightrightarrows U(F)$ είναι σχέση ισοδυναμίας στη Set και το ζητούμενο $\mathcal{T}_1$-υπομοντέλο είναι το $U(R)$.■

5.7 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{T}$ μια αλγεβρική θεωρία. Στη $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$, οι σχέσεις ισοδυναμίας είναι ζεύγη πυρήνα και ο συναρτητής $U : \mathrm{Mod}_{\mathcal{T}} \longrightarrow \mathrm{Set}$* ***διατηρεί και ανακλά τους συνεξισωτές σχέσεων ισοδυναμίας****.*

Απόδειξη Θα χρησιμοποιήσουμε την παράσταση T_1 της αλγεβρικής θεωρίας $\mathcal{T}$. Δοθείσης μιας σχέσης ισοδυναμίας $R \subsetneqq M \times M$ στη $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}_1}$ θεωρούμε την κανονική απεικόνιση $q : M \to M/R$ στην κατηγορία των συνόλων. Θα δείξουμε οτι ο q αποτελεί έναν $\mathcal{T}_1$-ομομορφισμό.
Δοθείσης μιας πράξης $a \in \hom_{\mathcal{T}_1}(T^n, T^1)$ και στοιχείων $x_1, ..., x_n$ ορίζουμε την a στο M/R ως εξής:

$$a([x_1], ..., [x_n]) := [a(x_1, ..., x_n)]$$

Η πράξη αυτή ορίζεται καλώς με τον παραπάνω τρόπο διότι για $[x_i] = [y_i]$, $i = 1, 2, ..., n$ έχουμε οτι $(x_i, y_i) \in R$ για $i = 1, 2, ..., n$ οπότε

$$(a(x_1, ..., x_n), a(y_1, ..., y_n)) \in R \Leftrightarrow [a(x_1, ..., x_n)] = [a(y_1, ..., y_n))]$$

Είναι προφανές οτι το M/R εφοδιασμένο με τις n-μελείς αυτές πράξεις είναι ένα $\mathcal{T}_1$-μοντέλο, εφόσον το M είναι ένα $\mathcal{T}_1$-μοντέλο. Έτσι ο q αποτελεί έναν $\mathcal{T}_1$-ομομορφισμό.

Θα δείξουμε οτι ο $\mathcal{T}_1$-ομομορφισμός q είναι ο συνεξισωτής των δυο προβολών $p_1, p_2 : R \rightrightarrows M$ στη $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}_1}$. Ο q είναι προφανώς ο συνεξισωτής των τελευταίων στην Set . Πράγματι τις συνεξισώνει εφόσον για $(x, y) \in R$ έχουμε

$$q \circ p_1(x, y) = q(x) = [x], \qquad q \circ p_2(x, y) = q(y) = [y]$$

Όμως $[x] = [y]$ αφού $(x, y) \in R$
Η $q \circ p_1 = q \circ p_2$ ισχύει προφανώς και στη $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$.

Εαν $g : M \to L$ είναι ένας $\mathcal{T}_1$-ομομορφισμός που συνεξισώνει τις p_1, p_2, υπάρχει μια μοναδική απεικόνιση $h : M/R \to L$ ώστε $g = h \circ q$ στην κατηγορία Set. Δοθείσης $a \in \hom_{\mathcal{T}_1}(T^n, T^1)$ και $x_1, ..., x_n \in M$

$$h(a([x_1], ..., [x_n])) = h[a(x_1, ..., x_n)] = h \circ q(a(x_1, ..., x_n)) =$$

$g(a(x_1, ..., x_n)) = a(g(x_1), ..., g(x_n)) = a(h \circ q(x_1), ..., h \circ q(x_n)) =$

$a(h[x_1], ..., h[x_n])$

Συνεπώς επάγεται μοναδικός $\mathcal{T}_1$-ομομορφισμός h ώστε $g = h \circ q$ που σημαίνει οτι ο q είναι ο συνεξισωτής των p_1, p_2 και στην $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}_1}$.

Αποδείξαμε οτι ο συνεξισωτής των $p_1, p_2 : R \rightrightarrows M$ υπολογίζεται με τον ίδιο τρόπο στις $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}_1}$ και Set. Το ίδιο ισχύει και για τα ζεύγη πυρήνα στις $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}_1}$ και Set. Επειδή λοιπόν κάθε σχέση ισοδυναμίας είναι ζεύγος πυρήνα στην Set, δηλαδή αποτελεί το ζεύγος πυρήνα του συνεξισωτή της, με βάση τα παραπάνω θα είναι ζεύγος πυρήνα και στη $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}_1}$.

Γνωρίζουμε ήδη οτι ο $U : \mathrm{Mod}_{\mathcal{T}} \to \mathrm{Set}$ διατηρεί συνεξισωτές σχέσεων ισοδυναμίας. Θα δείξουμε οτι ανακλά επίσης συνεξισωτές σχέσεων ισοδυναμίας. Έστω $R \subsetneqq M \times M$ σχέση ισοδυναμίας στη $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$ και $p_1, p_2 : R \rightrightarrows M$ οι αντίστοιχες προβολές της. Έστω $q : M \to M/R$ έτσι ώστε ο $U(q) = q_T$ να είναι ο συνεξισωτής των p_{1_T}, p_{2_T}.

$$\begin{tikzcd} p_1, p_2 : R \rightrightarrows & M \arrow[r, "q"] \arrow[d, "q'"'] & M/R \arrow[dl, "f"] \\ & L & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} p_{1_T}, p_{2_T} : R(T) \rightrightarrows & M(T) \arrow[r, "q_T"] \arrow[d, "q'_T"'] & M(T)/R(T) \arrow[dl, "h"] \\ & L & \end{tikzcd}$$

Έστω q' ο συνεξισωτής των p_1, p_2 . Ο U διατηρεί συνεξισωτές σχέσεων ισοδυναμίας συνεπώς ο q'_T είναι συνεξισωτής των p_{1_T}, p_{2_T}. Επάγεται λοιπόν ένας μοναδικός ισομορφισμός h ώστε $q'_T = h \circ q_T$ και $q'_T \cong q_T$. Επειδή ο U ανακλά ισομορφισμούς υπάρχει ισομορφισμός $f : M/R \to L$ ώστε $q' = f \circ q$ και $q \cong q'$. Ο q λοιπόν είναι ο συνεξισωτής των p_1, p_2 και το ζητούμενο απεδείχθη.■

5.8 Πόρισμα. *Έστω $\mathcal{T}$ μια αλγεβρική θεωρία. Ο επιλήσμων συναρτητής* ***διατηρεί και ανακλά ομαλούς επιμορφισμούς****.*

Απόδειξη Γνωρίζουμε οτι η κατηγορία $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$ είναι πλήρης συνεπώς έχει ζεύγη πυρήνων. Κάθε ομαλός επιμορφισμός λοιπόν είναι συνεξισωτής του ζεύγους πυρήνατου ή διαφορετικά συνεξισωτής μιας σχέσεως ισοδυναμίας. Με χρήση της προηγούμενης πρότασης προκύπτει άμεσα το ζητούμενο.■

Θα αποδείξουμε τώρα οτι κάθε αλγεβρική κατηγορία είναι ομαλή και ακριβής. Πριν από αυτό όμως, θα δώσουμε τους σχετικούς ορισμούς.

5.9 Ορισμός. Μια κατηγορία $\mathcal{C}$ ονομάζεται **ομαλή** όταν ικανοποιούνται οι εξής συνθήκες:

• Κάθε μορφισμός έχει ζεύγος πυρήνα.

• Για κάθε ζεύγος πυρήνα υπάρχει ο συνεξισωτής τους.

• Η εφέλκυση ενός ομαλού επιμορφισμού κατά μήκος τυχαίου μορφισμού υπάρχει και αποτελεί επίσης ομαλό επιμορφισμό.

5.10 Ορισμός. Μια ομαλή κατηγορία στην οποία οι σχέσεις ισοδυναμίας είναι ζεύγη πυρήνα καλείται **ακριβής** κατηγορία.

5.11 Θεώρημα. *Έστω $\mathcal{T}$ μια αλγεβρική θεωρία. Η κατηγορία* $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$ *είναι* ***ομαλή*** *και* ***ακριβής****.*

Απόδειξη Γνωρίζουμε οτι η κατηγορία $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$ είναι πλήρης και συν-πλήρης. Συνεπώς για κάθε μορφισμό υπάρχει το ζεύγος πυρήνα του και για κάθε ζεύγος πυρήνα υπάρχει ο συνεξισωτής τους. Ο $U : \mathrm{Mod}_{\mathcal{T}} \to \mathrm{Set}$ διατηρεί και ανακλά εφελκύσεις και ομαλούς επιμορφισμούς. Εξαιτίας αυτού, οι ομαλοί επιμορφισμοί είναι **ευσταθείς ως προς εφελκύσεις** στη $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$ αφού αυτό ισχύει στη Set. Συνεπώς η $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$ είναι **ομαλή** κατηγορία. Καθώς οι σχέσεις ισοδυναμίας είναι ζεύγη πυρήνα στη $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$, όπως αποδείξαμε προηγουμένως, η $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$ επιπλέον θα είναι **ακριβής**.■

Κεφάλαιο 6

ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΤΕΣ

6.1 Ορισμός. Έστω $\mathcal{R}$ και $\mathcal{T}$ αλγεβρικές θεωρίες με αντικείμενα αντίστοιχα $R^0, R^1, R^2, ...$ και $T^0, T^1, T^2, ...$. **Μορφισμός** των αλγεβρικών θεωριών $\mathcal{R}$ και $\mathcal{T}$ καλείται ένας συναρτητής $F : \mathcal{R} \to \mathcal{T}$ που διατηρεί πεπερασμένα γινόμενα και απεικονίζει το R^n στο T^n.

6.2 Πρόταση. *Η θεωρία των συνόλων είναι **αρχικό αντικείμενο** στην κατηγορία των αλγεβρικών θεωριών και των μορφισμών μεταξύ τους.*

Απόδειξη Γνωρίζουμε οτι η θεωρία S των συνόλων είναι ισοδύναμη με τη δυική της κατηγορίας των πεπερασμένων συνόλων. Δηλ. $S \cong \{1, 2, ..., n, ..\}^{op}$
Στην κατηγορία των πεπερασμένων συνόλων οι μόνοι μορφισμοί

$$\{*\} \to \{1, 2, ..., n\} = \coprod_{1}^{n} \{*\}$$

είναι οι ένα προς ένα απεικονίσεις εντός του συν-γινομένου $\coprod_{1}^{n} \{*\}$.

Δυικά λοιπόν στην S οι μόνες n-μελείς πράξεις $S^n \to S^1$ είναι οι προβολές. Συνεπώς για κάθε αλγεβρική θεωρία $\mathcal{T}$, επάγεται ένας μοναδικός μορφισμός $S \to \mathcal{T}$ και το ζητούμενο απεδείχθη.■

6.3 Πόρισμα. *Έστω $\mathcal{T}$ μια αλγεβρική θεωρία και S η θεωρία των συνόλων. Ο επιλήσμων συναρτητής $U : \mathrm{Mod}_{\mathcal{T}} \to \mathrm{Set}$ είναι ο συναρτητής σύνθεσης με το μοναδικό μορφισμό των αλγεβρικών θεωριών $\sigma : S \to \mathcal{T}$.*

Απόδειξη Έστω ένα $\mathcal{T}$-μοντέλο $G : \mathcal{T} \to \mathrm{Set}$. Συμβολίζουμε με $\sigma^* : \mathrm{Mod}_{\mathcal{T}} \to \mathrm{Set}$ το συναρτητή σύνθεσης με τον σ. Θα δείξουμε οτι ο σ^* ταυτίζεται με τον επιλήσμονα συναρτητή U.
Έχουμε

$$\sigma(S^1) = T^1 \text{ και } \sigma^*(G)(S^1) = G \circ \sigma(S^1) = G(T^1)$$

Ο $G \circ \sigma$ επίσης διατηρεί πεπερασμένα γινόμενα αφού αυτό ισχύει για τους G και σ. Εξ ορισμού του U έχουμε οτι $U(G) = G(T^1)$ και το ζητούμενο απεδείχθη.■

6.4 Ορισμός. Έστω $F : \mathcal{R} \to \mathcal{T}$ ένας μορφισμός αλγεβρικών θεωριών. Ο συναρτητής σύνθεσης με τον F :

$$F^* : \mathrm{Mod}_{\mathcal{T}} \to \mathrm{Mod}_{\mathcal{R}}, \qquad G \mapsto G \circ F \,, \forall\, G \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$$

ονομάζεται **αλγεβρικός συναρτητής**.
Αξίζει να παρατηρήσουμε οτι ο τρόπος με τον οποίο ορίστηκε ο F^* έχει νόημα, καθώς ο $G \circ F$ διατηρεί πεπερασμένα γινόμενα λόγω του οτι αμφότεροι οι G και F έχουν αυτήν την ιδιότητα.

6.5 Πρόταση. *Κάθε* ***αλγεβρικός συναρτητής*** *είναι* ***πιστός*** *και* ***ανακλά ισομορφισμούς****. Επιπλέον* ***διατηρεί και ανακλά ομαλούς επιμορφισμούς, συνεξισωτές σχέσεων ισοδυναμίας, μικρά όρια και φιλτραρισμένα συνόρια****.*

Απόδειξη Θεωρούμε ένα μορφισμό μεταξύ αλγεβρικών θεωριών, έστω $F : \mathcal{R} \to \mathcal{T}$. Ο F επάγει την αντιμεταθετικότητα των παρακάτω τριγώνων, όπου S είναι η θεωρία των συνόλων, $U_{\mathcal{R}}$ και $U_{\mathcal{T}}$ είναι επιλήσμονες συναρτητές και F^* είναι ο αλγεβρικός συναρτητής της σύνθεσης με τον F.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[dr] & R \arrow[d, "F"] \\ & \mathcal{T} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Set} & \mathrm{Mod}_R \arrow[l, "U_R"'] \\ & \mathrm{Mod}_T \arrow[ul, "U_T"] \arrow[u, "F*"'] \end{tikzcd}$$

Ο F^* είναι πιστός αφού ο $U_{\mathcal{T}}$ έιναι πιστός και $U_{\mathcal{T}} = U_{\mathcal{R}} \circ F^*$. Ο F^* ανακλά ισομορφισμούς, ομαλούς επιμορφισμούς, συνεξισωτές σχέσεων ισοδυναμίας, μικρά όρια και φιλτραρισμένα συνόρια, εφόσον αυτά διατηρούνται από τον $U_{\mathcal{R}}$ και ανακλώνται από τον $U_{\mathcal{T}}$. Με το ίδιο σκεπτικό τώρα, ο F^* διατηρεί ομαλούς επιμορφισμούς, συνεξισωτές σχέσεων ισοδυναμίας, μικρά όρια και φιλτραρισμένα συνόρια αφού τα παραπάνω διατηρούνται από τον $U_{\mathcal{T}}$ και ανακλώνται από τον $U_{\mathcal{R}}$. Η απόδειξη της Πρότασης είναι πλήρης.■

6.6 Θεώρημα. ***Κάθε αλγεβρικός συναρτητής έχει αριστερά προσαρτημένο.***

Απόδειξη Η απόδειξη του θεωρήματος παρατίθεται στο τέλος του επόμενου κεφαλαίου.

6.7 Πόρισμα. *Έστω $\mathcal{T}$ μια αλγεβρική θεωρία.* ***Ο επιλήσμων συναρτητής*** $U : \mathrm{Mod}_{\mathcal{T}} \to \mathrm{Set}$ ***έχει αριστερά προσαρτημένο.***

Απόδειξη Από προηγούμενο πόρισμα γνωρίζουμε οτι ο επιλήσμων συναρτητής $U : \mathrm{Mod}_{\mathcal{T}} \to \mathrm{Set}$ είναι ο συναρτητής σύνθεσης με το μοναδικό μορφισμό σ μεταξύ των αλγεβρικών θεωριών S και $\mathcal{T}$. Συνεπώς ο U είναι αλγεβρικός συναρτητής και σύμφωνα με το προηγούμενο Θεώρημα έχει αριστερά προσαρτημένο.■

Παραδείγματα Αλγεβρικών Συναρτητών (1)Θεωρούμε την **αλγεβρική κατηγορία** Mon **των μονοειδών** και των ομομορφισμών μονοειδών. Ο επιλήσμων συναρτητής $U : \mathrm{Mon} \to \mathrm{Set}$ είναι όπως είδαμε αλγεβρικός και έχει αριστερά προσαρτημένο.

Έστω $F : \mathrm{Set} \to \mathrm{Mon}$ ο αριστερά προσαρτημένος του U . Ο F ορίζεται ως εξής:

• Δοθέντος ενός συνόλου X, $F(X)$ είναι το ελέυθερο μονοειδές επί του X. Τα στοιχεία του $F(X)$ είναι δηλαδή πεπερασμένες ακολουθίες στοιχείων του X και η πράξη του μονοειδούς είναι απλά η παράθεση δυο τέτοιων στοιχείων. Προφανώς η πράξη είναι προσεταιριστική και το ουδέτερο στοιχείο της πράξης είναι η κενή ακολουθία.

• Δοθείσης μιας απεικόνισης $f : X \to Y$, ορίζεται η $F(f) : F(X) \to F(Y)$ από τη δράση της f σε κάθε στοιχείο μιας πεπερασμένης ακολουθίας στοιχείων του X. Υπάρχει μια απεικόνιση $\eta_X : X \to UF(X)$ ώστε το x να έχει ως εικόνα την ακολουθία (x) με ένα στοιχείο. Το ελεύθερο μονοειδές $F(X)$ έχει την καθολική ιδιότητα για το X . Πράγματι, δοθέντος ενός μονοειδούς $(M, *)$ και $g : X \to M$, υπάρχει μοναδική παραγοντοποίηση $\tilde{g} : F(X) \to M$ ώστε

$$\tilde{g}(x_1, ..., x_n) = g(x_1) * ... * g(x_n)$$

(η κενή ακολουθία απεικονίζεται στο ουδέτερο στοιχείο του M).

(2)Θεωρούμε την **αλγεβρική κατηγορία** Grp **των ομάδων** και των ομομορφισμών ομάδων. Ομοίως και εδώ, ο αλγεβρικός συναρτητής $U : \mathrm{Grp} \to \mathrm{Set}$ που απεικονίζει μια ομάδα G στο σύνολο φορέα αυτής, έχει αριστερά προσαρτημένο τον συναρτητή F που ορίζεται ως εξής:
Δοθέντος ενός συνόλου X ,κατασκευάζουμε το ελεύθερο μονοειδές M επί του συνόλου $X \coprod X$. Προς αποφυγή συγχύσεως, για κάθε $x \in X$, συμβολίζουμε με x^+ και x^- τις δυο «παρουσίες» του εντός του $X \coprod X$. Η ελεύθερη ομάδα $F(X)$ για το X είναι το πηλίκο του M πρός τη σχέση ισοδυναμίας που ορίζεται ως εξής:

$$(x^+, x^-) \sim (\,)$$

όπου ( ) είναι η κενή ακολουθία .
Η πράξη της ομάδας είναι ίδια με αυτή που ορίζεται στο M. Ορίζεται μια απεικόνιση $i : X \to F(X)$ που απεικονίζει το $x \in X$ στο $[(x^+)] \in F(X)$, δηλαδή στην κλάση ισοδυναμίας της ακολουθίας που αποτελείται από το x. Αποδεικνύεται οτι το $F(X)$ έχει την καθολική ιδιότητα για το X.

(3)Έστω Ab η κατηγορία με αντικείμενα τις **αβελιανές ομάδες** και μορφισμούς τους ομομορφισμούς ομάδων. Ο αλγεβρικός συναρτητής $U : Ab \to \mathrm{Set}$, όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα, έχει αριστερά προσαρτημένο ένα συναρτητή $F : \mathrm{Set} \to Ab$ που ορίζεται ως εξής:
Δοθέντος ενός X, $F(X) = \{(z_x)_{x\in X} / \{x/z_x \neq 0\}$είναι πεπερασμένο $\}$
Με άλλα λόγια

$$F(X) = \coprod_{x \in X} (\mathbb{Z}, +) = \bigoplus_{x\in X} (\mathbb{Z}, +)$$

Η $F(X)$ είναι προφανώς αβελιανή ομάδα.
Υπάρχει μια απεικόνιση $i : X \to F(X)$ που απεικονίζει το x_0 στην ακολουθία $(z_x)_{x\in X}$ όπου $z_{x_0} = 1$ και οι υπόλοιποι όροι είναι ίσοι με το 0. Δοθείσης μιας αβελιανής ομάδας $(A, +)$ και μιας απεικόνισης $f : X \to A$, υπάρχει μια μοναδική παραγοντοποίηση

$$g : F(X) \to A \text{ ώστε } g((z_x)_{x\in X}) = \sum_{x\in X} z_x f(x)$$

και ο ορισμός αυτός έχει νόημα αφού μόνο πεπερασμένου πλήθους z_x είναι μη μηδενικά. Προφανώς η $F(X)$ έχει την καθολική ιδιότητα για το X.

(4)Θεωρούμε την κατηγορία Rng με αντικείμενα τους **μοναδιαίους και αντιμεταθετικούς δακτύλιους** και μορφισμούς τους ομομορφισμούς δακτυλίων. Ομοίως για τον $U : \mathrm{Rng} \to \mathrm{Set}$ υπάρχει ο αριστερά προσαρτημένος του που ορίζεται ως εξής:
Δοθέντος ενός συνόλου X, $F(X)$ είναι ο δακτύλιος πολυωνύμων $Z[x_1, ..., x_n]$

όπου $x_i, i = 1, ..., n, ...$ είναι τα διάφορα στοιχεία του X. Η απεικόνιση $i : X \to F(X)$ απεικονίζει το στοιχείο x στο πολυώνυμο x. Δοθέντος ενός δακτυλίου $(A, +, *)$ και μιας απεικόνισης $f : X \to A$, υπάρχει μια μοναδική παραγοντοποίηση $g : F(X) \to A$ ώστε

$$g(p) = p(f(x_1), ..., f(x_n), ...)$$

για κάθε πολυώνυμο $p(x_1, ..., x_n, ...) \in F(X)$. Με τη βοήθεια αυτής αποδεικνύεται οτι το $F(X)$ έχει την καθολική ιδιότητα για το X .

(5)Θεωρούμε την κατηγορία R-Mod των αριστερών R-modules όπου R δακτύλιος. Ο $U : R\text{-Mod} \to \text{Set}$ έχει αριστερά προσαρτημένο το συναρτητή $F : \text{Set} \to R\text{-Mod}$ που ορίζεται ως εξής:
Δοθέντος ενός συνόλου X,

$$F(X) = \bigoplus_{x \in X} R = \bigoplus_{x} R$$

είναι το ελεύθερο αριστερό R-module. Με άλλα λόγια, το $F(X)$ είναι το σύνολο των απεικονίσεων $f : X \to R$ τέτοιων ώστε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in X$ εκτός πεπερασμένου πλήθους. Η πρόσθεση στο $F(X)$ και η δράση του R ορίζονται ως εξής:

•$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

•$(rf)(x) = r \cdot f(x)$

Ορίζεται μια απεικόνιση $i : X \to F(X)$ που απεικονίζει το $x \in X$ στην απεικόνιση $\tilde{x}$ με:

$$\tilde{x}(x) = 1, \quad \tilde{x}(y) = 0 \quad \forall y \neq x$$

Εαν $f \in \bigoplus_x R$ και $\{x_1, ..., x_n\} \subset X$ ώστε $f(y) = 0$, όταν το y δεν ανήκει στο $\{x_1, ..., x_n\}$, τότε $f = \sum\limits_{x \in X} r_i \cdot \tilde{x}_i$. Προφανώς εαν

$$\sum_{x \in X} r_i \cdot \tilde{x}_i = 0, \text{ τότε } r_i = 0, i = 1, ..., n.$$

Συνεπώς το σύνολο $\tilde{X} = \{\tilde{x}/x \in X\}$ αποτελεί βάση του $\bigoplus_x R$ καθώς κάθε στοιχείο αυτού του R-module είναι ένα άθροισμα $\sum\limits_{x \in X} r_x \tilde{x}$, πεπερασμένο αφού μόνο πεπερασμένου πλήθους r_x είναι μη μηδενικά και η ισότητα $\sum_{x\in X} r_x\tilde{x} = 0$ συνεπάγεται οτι κάθε $r_x = 0$.

Δοθέντος τώρα ενός αριστερού R-module M και μιας απεικόνισης $h : X \to M$ υπάρχει μοναδική παραγοντοποίηση $g : \bigoplus_x R \to M$ με

$$g(\sum_{x\in X} r_x\tilde{x}) = \sum_{x\in X} r_x h(x)$$

Η g είναι καλώς ορισμένη και προφανώς είναι ομομορφισμός module. Τα παραπάνω αποδεικνύουν οτι το $\bigoplus_x R$ έχει την καθολική ιδιότητα για το X.

Ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία, μπορούμε να ορίσουμε τον αλγεβρικό συναρτητή F : Set $\to$ Mod-R όπου Mod-R είναι η κατηγορία των δεξιών R-modules.

Παρατήρηση Αξίζει να παρατηρήσουμε οτι ο συναρτητής F : Set $\to$ Ab δεν είναι άλλος από το συναρτητή που απεικονίζει δοθέν σύνολο X στο ελεύθερο $\mathbb{Z}$-module για το X. Αυτό δεν είναι τυχαίο αφού κάθε αβελιανή ομάδα G είναι γνωστό οτι μπορεί να θεωρηθεί ως ένα $\mathbb{Z}$-module G.

(6)Θεωρούμε τις κατηγορίες Ring και Ab των **δακτυλίων** και των **αβελιανών ομάδων** αντίστοιχα. Ο συναρτητής U : Ring $\to$ Ab καλείται επιλήσμων αφού «ξεχνά» τον πολλαπλασιασμό του δακτυλίου και απεικονίζει ένα δακτύλιο $(K, +, \cdot, 0)$ στην αβελιανή προσθετική ομάδα $(K, +, 0)$. Ο U αποδεικνύεται εύκολα οτι είναι αλγεβρικός συναρτητής παρόλο που δεν είναι της μορφής $U : \mathrm{Mod}_{\mathcal{T}} \to$ Set (όπου $\mathcal{T}$ μια αλγεβρική θεωρία), που έχουμε μελετήσει ως τώρα.

Πράγματι, θεωρούμε ένα συναρτητή $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{R}$, όπου $\mathcal{A}, \mathcal{R}$ οι αλγεβρικές θεωρίες των αβελιανών ομάδων και των δακτυλίων αντίστοιχα, που ορίζεται ως εξής: Για κάθε αντικείμενο A^n της $\mathcal{A}$, $\sigma(A^n) = R^n$ και ο σ διατηρεί πεπερασμένα γινόμενα που σημαίνει οτι αποτελεί ένα μορφισμό μεταξύ των αλγεβρικών θεωριών $\mathcal{A}$ και $\mathcal{R}$. Εαν $\alpha : A^2 \to A$ είναι η μη τετριμμένη διμελής απεικόνιση που αντιστοιχεί στην πράξη της πρόσθεσης που διαθέτει κάθε αβελιανή ομάδα, η $\sigma(\alpha) : \sigma(A^2) \to \sigma(A)$ δηλ. $\sigma(\alpha) : R^2 \to R$ αντιστοιχεί στην πράξη της πρόσθεσης που διαθέτει κάθε δακτύλιος. Εαν $\beta : A^0 \to A$ και $\gamma : A^1 \to A$ είναι οι απεικονίσεις που ισοδυναμούν αντίστοιχα με το ουδέτερο και το αντίθετο στοιχείο κάθε αβελιανής ομάδας, ομοίως τότε οι $\sigma(\beta) : R^0 \to R$ και $\sigma(\gamma) : R^1 \to R$ ισοδυναμούν αντίστοιχα με το ουδέτερο και το αντίθετο στοιχείο σε κάθε δακτύλιο. Είναι γνωστό επίσης οτι τα αξίώματα που ισχύουν στη θεωρία των αβελιανών ομάδων(και εκφράζονται με τη βοήθεια αντιμεταθετικών διαγραμμάτων), ισχύουν και στη θεωρία των δακτυλίων.

Θεωρούμε το συναρτητή $\sigma^* = - \circ \sigma : \mathrm{Mod}_{\mathcal{R}} \to \mathrm{Mod}_{\mathcal{A}}$ που απεικονίζει ενα μοντέλο $G \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{R}}$ στο μοντέλο $G \circ \sigma \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{A}}$ που είναι τέτοιο ώστε

$$G \circ \sigma(A) = G(\sigma(A)) = G(R)$$

Για το συναρτητή $U : \mathrm{Ring} \to Ab$ ή ισοδύναμα $U : \mathrm{Mod}_{\mathcal{R}} \to \mathrm{Mod}_{\mathcal{A}}$ γνωρίζουμε οτι:
Για κάθε μοντέλο $G \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{R}}$ το $U(G) \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{A}}$ είναι τέτοιο ώστε

$$U(G)(A) = G(R)$$

Άρα έχουμε οτι $U(G) = G \circ \sigma$ συνεπώς οι συναρτητές U και $- \circ \sigma$ ταυτίζονται από όπου προκύπει άμεσα οτι ο U είναι αλγεβρικός συναρτητής.

Κατά συνέπεια ο $U : \mathrm{Ring} \to Ab$ ως αλγεβρικός συναρτητής έχει αριστερά προσαρτημένο συναρτητή έστω T τον οποίο ορίζουμε στη συνέχεια.

Έστω $(G, +)$ μια αβελιανή ομάδα. Η G ως γνωστόν είναι ένα $\mathbb{Z}$-module. Ορίζουμε:

- $G^{(0)} = \mathbb{Z}$

- $G^{(l)} = G \otimes G \otimes \cdots \otimes G (l$ φορές$)$

και τις απεικονίσεις

- $\pi_{0,n} : \mathbb{Z} \otimes G^{(n)} \to G^{(n)}, \quad k \otimes x \mapsto k \cdot x$

- $\pi_{n,m} : G^{(n)} \otimes G^{(m)} \to G^{(n+m)},$

$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \otimes (y_1 \otimes \cdots \otimes y_m) \mapsto x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_m$

- $T(G) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} G^{(i)} = \mathbb{Z} \oplus G \oplus G^2 \oplus \cdots$

Όμως το $\oplus(G^i \otimes G^j)$είναι το συν-γινόμενο των $G^{(i)} \otimes G^{(j)}$ συνεπώς λαμβάνουμε έναν ομομορφισμό

$$\pi' : \oplus(G^i \otimes G^j) \to T(G)$$

Γνωρίζουμε επίσης οτι

$$T(G) \otimes T(G) = (\oplus G^{(i)}) \otimes (\oplus G^{(j)}) \cong (G^{(i)} \otimes G^{(i)})$$

Με τη βοήθεια της τελευταίας λαμβάνουμε έναν ομομορφισμό

$$\pi : T(G) \otimes T(G) \to T(G)$$

Με τη βοήθεια του π τώρα ορίζουμε μια πράξη $*$ εντός του $T(G)$ ως εξής:

$$x * y = \pi(x \otimes y)$$

Προφανως $1 * x = x * 1 = x$
Η πράξη αυτή είναι προφανώς εσωτερικός νόμος του $T(G)$. Ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα αφού

$$x*(y+Z) = \pi[x\otimes(y+z)] = \pi(x\otimes y+x\otimes z) = \pi(x\otimes y)+\pi(x\otimes z) = x*y+x*z$$

Ομοίως και

$$(y + z) * x = y * x + z * x$$

Η $*$ είναι επίσης προσεταιριστική. Για να το δείξουμε αυτό αρκεί να θυμηθούμε οτι κάθε στοιχείο του $T(G)$ είναι ένα άθροισμα όρων της μορφής $k, k \in \mathbb{Z}$ και στοιχείων της μορφής $x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_m$. Είναι αρκετό λοιπόν να δείξουμε την προσεταιριστικότητα σε σχέση με αυτές τις μορφές αφού η προσεταιριστικότητα στο άθροισμα προκύπτει άμεσα με τη χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας.
Για την πρώτη μορφή:

$$(x * y) * z = (k * y) * z = \pi(k \otimes y) * z =$$

$$k \cdot y*z = (y+y+.....+y)*z = \pi[(y+y+...+y)\otimes z] = \pi(y\otimes z+...+y\otimes z) =$$

$$\pi(y\otimes z)+...+\pi(y\otimes z) = y*z+...+y\star z = k(y*z) = \pi[k\otimes(y*z)] = x*(y*z)$$

Για τη δεύτερη μορφή:

$$(x * y) * z = [(x_1 \otimes ... \otimes x_m) * (y_1 \otimes ... \otimes y_n)] * (z_1 \otimes ... \otimes z_p) =$$

$$\pi[(x_1 \otimes ... \otimes x_m) \otimes (y_1 \otimes ... \otimes y_n)] * (z_1 \otimes ... \otimes z_p) =$$

$$(x_1 \otimes ... \otimes x_m \otimes y_1 \otimes ... \otimes y_n) * (z_1 \otimes ... \otimes z_p)$$

$\pi[(x_1 \otimes ... \otimes x_m \otimes y_1 \otimes ... \otimes y_n) \otimes (z_1 \otimes ... \otimes z_p)] =$

$x_1 \otimes ... \otimes x_m \otimes y_1 \otimes ... \otimes y_n \otimes z_1 \otimes ... \otimes z_p = x * y * z$

Δείξαμε λοιπόν οτι ο $(T(G), +, *)$ είναι δακτύλιος. Υπάρχει προφανώς ο εγλεισμός $i : G \hookrightarrow T(G)$. Δοθέντος ενός δακτυλίου $(A, +, \cdot)$ και ενός ομομορφισμού ομάδων $f : (G, +) \to (A, +)$ υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός δακτυλίων $\tilde{f} : T(G) \to (A, +, \cdot)$ που παραγοντοποιεί τον f. Πράγματι ορίζουμε έναν ομομορφισμό $f^{(n)} : G^{(n)} \to A$ ώστε

- $f^{(1)} = f$

- Ο $f^{(i)}$ είναι η παρακάτω σύνθεση

$$G^{(i-1)} \otimes G \overset{f^{(i-1)}\otimes f}{\longrightarrow} A \otimes A \overset{x\otimes y \mapsto xy}{\longrightarrow} A$$

- Ο $f^{(0)} : \mathbb{Z} \to A$ είναι ο $k \mapsto k \cdot 1$

Τότε έχουμε
$$f^{(n)}(x_1 \otimes ... \otimes x_n) = f(x_1) \cdot ... \cdot f(x_n)$$
Επάγεται με αυτόν τον τρόπο ένας ομομορφισμός δακτυλίων $f^* : T(G) \to A$ ο οποίος συμπίπτει με τον $f^{(n)}$ σε κάθε $G^{(n)}$ για $n = 0, 1, ...,$. Ο f^* είναι λοιπόν η ζητούμενη παραγοντοποίηση του f και συνεπώς ο $T(G)$ έχει την καθολική ιδιότητα για τη G.

Παρατήρηση Το γεγονός οτι ο T είναι αριστερά προσαρτημένος του U μπορεί να αξιοποιηθεί για να αποδείξουμε αλγεβρικές ιδιότητες που η απόδειξη τους απαιτεί επίπονη εργασία με το συνήθη τρόπο. Για παράδειγμα, εφόσον ο T έχει δεξιά προσαρτημένο γνωρίζουμε οτι διατηρεί όλα τα συνόρια (βλ.Πρόταση 1.14) άρα και όλα τα συν-γινόμενα οπότε ισχύει:

$$T(G_1 \coprod G_2) = T(G_1) \coprod T(G_2) \quad (1)$$

Όμως το συν-γινόμενο στις κατηγορίες *Ab* και Ring είναι το ευθύ γινόμενο αβελιανών ομάδων και το τανυστικό γινόμενο δακτυλίων αντίστοιχα. Αν λάβουμε επίσης υπόψην οτι $T(G) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} G^{(i)}$ η σχέση (1) παίρνει τη μορφή:

$$\bigoplus_{i=0}^{\infty}(G_1 \oplus G_2)^{(i)} = (\bigoplus_{i=0}^{\infty} G_1^{(i)}) \otimes (\bigoplus_{i=0}^{\infty} G_2^{(i)}) \quad (2)$$

που είναι φανερό οτι απαιτεί διεξοδική εργασία για να αποδειχθεί αλγεβρικά.

(7)Θεωρούμε τις κατηγορίες Grp και Ab των **ομάδων και αβελιανών ομάδων** αντίστοιχα. Ο επιλήσμων συναρτητής $U : Ab \to \mathrm{Grp}$ είναι αλγεβρικός συνεπώς έχει αριστερά προσαρτημένο συναρτητή. Πρόκειται για τον συναρτητή $F : \mathrm{Grp} \to Ab$ που ορίζεται ως εξής:
• Δοθείσης μιας ομάδας G , $F(G)$ είναι η ομάδα G/G', όπου G' η παράγωγος ομάδα της G. Η G/G' είναι προφανώς αβελιανή αφού για $x, y \in G$ έχουμε :

$$xG' \cdot yG' = yG' \cdot xG' \Leftrightarrow xyG' = yxG' \Leftrightarrow x^{-1}y^{-1}xyG' = G' \Leftrightarrow$$

$$x^{-1}y^{-1}xy \in G' \Leftrightarrow [x^{-1}, y^{-1}] \in G'$$

που ισχύει.
• Ορίζεται η απεικόνιση $i : G \to F(G)$ με $i(x) = xG'$,$\forall\, x \in G$. Δοθείσης μιας αβελιανής ομάδας A και ενός ομομορφισμού $f : G \to A$ υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός

$$\bar{f} : G/G' \to A, \quad \tilde{f}(xG') = f(x) \quad \forall x \in G$$

ώστε $f = \tilde{f} \circ F$. Η $\tilde{f}$ έχει ορισθεί καλώς και είναι μοναδική εκ κατασκευής. Η G/G' έχει συνεπώς την καθολική ιδιότητα για τη G .

(8)Θεωρούμε τις κατηγορίες των **δακτυλίων και των δακτυλίων του** Lie, Ring και $L-\mathrm{Ring}$ αντίστοιχα. Δοθέντος ενός δακτυλίου R ορίζεται ένας δακτύλιος του Lie με $\mathbb{Z}$-module την αβελιανή ομάδα $(R, +, 0)$ και μια διγραμμική απεικόνιση $(x, y) \to [x, y] \in R$ ώστε $[x, y] = xy - yx$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $[x, x] = 0$

- $[[xy]z] + [[yz]x] + [[zx]y] = 0$

Λαμβάνουμε έτσι ένα συναρτητή $G : \mathrm{Ring} \to L - \mathrm{Ring}$ από την κατηγορία των δακτυλίων στην κατηγορία των δακτυλίων του Lie . Αποδεικνύεται οτι ο G είναι αλγεβρικός και εξαιτίας αυτού έχει έναν αριστερά προσαρτημένο συναρτητή.

Έστω F ο αριστερά προσαρτημένος του, τον οποίο και θα ορίσουμε. Με διαδικασία όμοια με αυτή του παραδείγματος (6), για ένα τυχαίο δακτύλιο του Lie, έστω L, ορίζουμε το

$$T(L) = \mathbb{Z} \oplus L \oplus L^2 \oplus ...$$

$$\text{και}$$
$$x * y = \pi(x \otimes y), \quad \forall\, x, y \in T(L)$$

ώστε το $(T(L), +, *)$ να αποτελεί ένα δακτύλιο. Έστω B το ιδεώδες του που γεννάται από όλα τα στοιχεία της μορφής

$$[xy] - x \otimes y - y \otimes x \quad \forall\, x, y \in L$$

Το σύνολο

$$F(L) := T(L)/B$$

αποτελεί δακτύλιο. Ο εγκλεισμός $i' : L \hookrightarrow T(L)$ επάγει μια απεικόνιση $i : L \to F(L), \quad i : x \mapsto x + B$. Δοθέντος ενός δακτυλίου του Lie A και ενός module ομομορφισμού $f : L \to A$ υπάρχει μοναδικός module ομομορφισμός $\tilde{f} : F(L) \to A$ που παραγοντοποιεί τον f και $\tilde{f}(x + B) = f(x)$. Ο $F(L)$ έχει συνεπώς την καθολική ιδιότητα για τον L.

Κεφάλαιο 7

ΕΛΕΥΘΕΡΑ ΓΕΝΝΩΜΕΝΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Στο κεφάλαιο αυτό θα δείξουμε οτι η κατηγορία $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$ έχει μια πυκνή οικογένεια προβολικών γεννητόρων. Πριν προχωρήσουμε όμως στην απόδειξη αυτής της ιδιότητας είναι αναγκαίο να δώσουμε τους σχετικούς ορισμούς.

7.1 Ορισμός. Ένα αντικείμενο P μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$ καλείται **προβολικό** όταν δοθέντος ενός ισχυρού επιμορφισμού $p : X \to Y$ με $X, Y \in \mathcal{C}_0$ και ενός μορφισμού $f : P \to Y$ υπάρχει παραγοντοποίηση $g : P \to X$ ώστε $f = p \circ g$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "p"] & Y \\
& P \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, "g"]
\end{tikzcd}$$

7.2 Ορισμός. Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία. Μια οικογένεια $(G_i)_{i\in I}$ αντικειμένων της $\mathcal{C}$ καλείται **οικογένεια γεννητόρων** αυτής όταν δοθέντων δυο παράλληλων μορφισμών $u, v : A \rightrightarrows B$ στην $\mathcal{C}$ ισχύει:

$$\forall\, i \in I, \forall\, g : G_i \to A \quad u \circ g = v \circ g \Rightarrow u = v$$

Όταν η οικογένεια $(G_i)_{i\in I}$ αποτελείται από ένα μόνο αντικείμενο G, τότε αυτό καλείται **γεννήτορας** της $\mathcal{C}$.

7.3 Ορισμός. Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και $(G_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια αντικειμένων της. Έστω $\mathcal{G}$ η πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ που γεννάται από τα G_i και $\mathcal{G}/C$ η πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{C}/C$ που γεννάται από τα αντικείμενα της μορφής $f_i : G_i \to C$. Η οικογένεια $(G_i)_{i\in I}$ καλείται **πυκνή οικογένεια γεννητόρων** όταν για κάθε αντικείμενο $C \in \mathcal{C}$ το συνόριο του συναρτητή

$$\Gamma^C : \mathcal{G}/C \to C, \quad (f : G_i \to C) \mapsto G_i$$

είναι το $(C,(f)_{f\in \mathcal{G}/C})$. Όταν η οικογένεια $(G_i)_{i\in I}$ αποτελείται από ένα μόνο αντικείμενο G, τότε αυτό ονομάζεται **πυκνός γεννήτορας**.

7.4 Ορισμός. Έστω $\mathcal{T}$ μια αλγεβρική θεωρία , $U : \mathrm{Mod}_{\mathcal{T}} \to \mathrm{Set}$ ο αντίστοιχος επιλήσμων συναρτητής και $F : \mathrm{Set} \to \mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$ ο αριστερά προσαρτημένος του.

(1)**Ελεύθερο $\mathcal{T}$-μοντέλο** καλείται, μέχρις ισομορφισμού, ένα μοντέλο της μορφής $F(X)$ για κάποιο σύνολο X .

(2)**Πεπερασμένα γεννώμενο $\mathcal{T}$-μοντέλο** καλείται ένα μοντέλο M που είναι πηλίκο ενός ελεύθερου μοντέλου $F(n)$, για κάποιο πεπερασμένο σύνολο n.

(3)**Πεπερασμένα παραστάσιμο $\mathcal{T}$ -μοντέλο** καλείται ένα μοντέλο M που μπορεί να προκύψει ως συνεξισωτής ενός διαγράμματος

$$F(m) \rightrightarrows F(n) \to M$$

όπου τα m, n είναι πεπερασμένα σύνολα.

7.5 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{T}$ μια αλγεβρική θεωρία. Ο ελεύθερος συναρτητής F : $\mathrm{Set} \to \mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$* ***διατηρεί μονομορφισμούς****.*

Απόδειξη Έστω $i : X \rightarrowtail Y$ μια απεικόνιση ένα προς ένα στη Set.
• Εαν $X \neq \varnothing$ θεωρούμε την αντίστροφη απεικόνιση $r : Y \to X$ (εαν η i δεν είναι επί θεωρούμε την $i : i(X) \to X$)
Έχουμε

$$r \circ i = 1_X \Rightarrow F(r) \circ F(i) = 1_{F(X)}$$

που αποδεικνύει οτι ο $F(i)$ είναι μονομορφισμός.
• Εαν $X = \varnothing$, που αποτελεί το αρχικό αντικείμενο στη Set, τότε το $F(X) = F(\varnothing)$ είναι το αρχικό αντικείμεο στη $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.

(α)Εαν $UF(\varnothing) = \varnothing$ τότε η απεικόνιση $UF(\varnothing) \to UF(Y)$ είναι ένα προς ένα και συνεπώς ο $F(\varnothing) \to F(Y)$ είναι μονομορφισμοός αφού ο U ανακλά μονομορφισμούς.

(β)Εαν $UF(\varnothing) \neq \varnothing$ κάθε απεικόνιση $Y \to UF(\varnothing)$ επάγει λόγω προσάρτησης έναν $t : F(Y) \to F(\varnothing)$. Έχουμε

$$F(\varnothing) \xrightarrow{t \circ F(i)} F(\varnothing)$$

και λόγω του οτι το $F(\varnothing)$ είναι αρχικό αντικείμενο στη $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$ θα πρέπει $t \circ F(i) = 1_{F(\varnothing)}$ που σημαίνει οτι ο $F(i)$ είναι μονομορφισμός.■

7.6 Λήμμα. *Έστω $\mathcal{T}$ μια αλγεβρική θεωρία. Κάθε ελεύθερο μοντέλο $F(X)$ μπορεί να γραφεί ως* ***φιλτραρισμένο συνόριο*** *ως εξής:*

$$F(X) = \mathrm{colim}_{n \subset X} F(n)$$

όπου το n διατρέχει τα πεπερασμένα σύνολα του X .

Απόδειξη Γνωρίζουμε οτι ένα σύνολο X στην Set μπορεί να γραφεί ως $X = \mathrm{colim}_{n \subset X} n$ και λόγω του οτι ο F διατηρεί συνόρια έχουμε άμεσα το ζητούμενο.■

7.7 Λήμμα. *Έστω $\mathcal{T}$ μια αλγεβρική θεωρία. Τα πεπερασμένα γεννώμενα ελεύθερα μοντέλα είναι, μέχρις ισομορφισμού, τα μοντέλα $F(n)$ για πεπερασμένα σύνολα n.*

Απόδειξη Έστω $F(X)$ ένα πεπερασμένα γεννώμενο ελεύθερο μοντέλο που είναι πηλίκο ενός $F(n)$ όπου n πεπερασμένο σύνολο. Έστω $q : F(n) \to F(X)$ ο αντίστοιχος ομαλός επιμορφισμός. Από το προηγούμενο λήμμα έχουμε οτι

$$F(X) = \mathrm{colim}_{m \subset X} F(m)$$

με το m να διατρέχει τα πεπερασμένα σύνολα του X.

Για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$ το στοιχείο $U(q) \circ \eta_n(i)$ μπορεί να θεωρηθεί ως στοιχείο ενός συνόλου της μορφής $UF(m_i)$, για κάποιο πεπερασμένο σύνολο $m_i \subset X$. Πράγματι αυτό είναι φανερό εαν σκεφτούμε οτι στη Set θα είναι:

$$UF(X) = \mathrm{colim}_{m \subset X} UF(m) = \dot{\bigcup_{m \subset X}} (UF(m))$$

Λόγω του οτι το i παίρνει τιμές από 1 εως n, μπορούμε να θεωρήσουμε ένα σύνολο $UF(m_j)$ που θα περιέχει όλα αυτά τα στοιχεία και αυτό θα είναι το $UF(m)$ όπου m η ένωση όλων των m_i. Έστω $\mu : m \hookrightarrow X$ ο αντίστοιχος εγκλεισμός. Επάγεται προφανώς ένας μορφισμός $u : n \to UF(m)$ και λόγω του οτι το $(F(n), \eta_n)$ είναι η ανάκλαση του n μέσω του U ,υπάρχει μοναδικός μορφισμός $v : F(n) \to F(m)$ ώστε $u = U(v) \circ \eta_n$.
Για τον ίδιο λόγο έχουμε την αντιμεταθετικότητα του τετραγώνου του διαγράμματος 7.1

$$\begin{tikzcd} n \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\eta_n"'] & UF(m) \arrow[d, "UF(\mu)"] \\ UF(n) \arrow[ur, "U(v)"] \arrow[r, "U(q)"'] & UF(x) \end{tikzcd}$$

Διάγραμμα 7.1

όπου $UF(X) = \mathrm{colim}_{m \subset X} UF(m)$

$$UF(\mu) \circ u = U(q) \circ \eta_n$$

Έχουμε λοιπόν:

$$UF(\mu) \circ U(v) \circ \eta_n = UF(\mu) \circ u = U(q) \circ \eta_n \Rightarrow U(F(\mu) \circ v) \circ \eta_n = U(q) \circ \eta_n$$

Από τη συνθήκη μοναδικότητας στον ορισμό της ανάκλασης έχουμε

$$F(\mu) \circ v = q$$

Επειδή ο q είναι ομαλός επιμορφισμός το ίδιο θα ισχύει και για τον $F(\mu)$. Ο $F(\mu)$ είναι επίσης μονομορφισμός αφού ο μ είναι μονομορφισμός και ο F διατηρεί μονομορφισμούς. Εκ των δυο τελευταίων ιδιοτήτων του $F(\mu)$ προκύπτει οτι είναι ισομορφισμός και συνεπώς τα $F(X)$ και $F(m)$ είναι ισό- μορφα.■

7.8 Πρόταση. *Μια αλγεβρική θεωρία $\mathcal{T}$ είναι ισοδύναμη με τη δυική της πλήρους υποκατηγορίας της $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$, τα αντικείμενα της οποίας είναι τα πεπερασμένα γεννώμενα ελεύθερα μοντέλα.*

Απόδειξη Από αυτά που έχουμε πει ως τώρα είναι φανερό οτι το ελεύθερο μοντέλο $F(n)$ είναι ακριβώς ο συναρτητής $\hom_{\mathcal{T}}(T^n, -)$ από όπου προκύπτει οτι:

$$\hom_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}}(F(n), F(m)) \cong \mathrm{Nat}(\hom_{\mathcal{T}}(T^n, -), \hom_{\mathcal{T}}(T^m, -))$$

Επίσης με άμεση εφαρμογή του λήμματος του Yoneda έχουμε την ισοδυναμία:

$$\mathrm{Nat}(\hom_{\mathcal{T}}(T^n, -), \hom_{\mathcal{T}}(T^m, -)) \cong \hom_{\mathcal{T}}(T^m, T^n)$$

Από τις δυο τελευταίες ισοδυναμίες προκύπτει το ζητούμενο:

$$\hom_{\mathcal{T}}(T^m, T^n) \cong \mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}(F(n), F(m))■$$

7.9 Πρόταση. *Τα **ελεύθερα μοντέλα** μιας αλγεβρικής θεωρίας $\mathcal{T}$ είναι **προβολικά αντικείμενα** της κατηγορίας $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$.*

Απόδειξη Έστω ένα ελεύθερο μοντέλο $F(X)$, ένας ισχυρός επιμορφισμός $p : M \to N$ στη $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$ και ένας μορφισμός $f : F(X) \to N$. Αρκεί να δείξουμε οτι υπάρχει παραγοντοποίηση $f = p \circ h$ με $h : F(X) \to M$. Η $U(p) : U(M) \to U(N)$ στην κατηγορία Set λόγω του οτι ο p είναι επιμορφισμός θα είναι απεικόνιση επί. Από το αξίωμα της επιλογής θα έχει μια τμήση $s : U(N) \rightarrowtail U(M)$.

Λόγω προσάρτησης ο f επάγει ένα μορφισμό $g : X \to U(N)$. Ομοίως η σύνθεση $s \circ g : X \to U(M)$ επάγει ένα μορφισμό $h : F(X) \to M$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε οτι $f = p \circ h$. Πάλι εξαιτίας της προσάρτησης, ισοδύναμα αρκεί να αποδείξουμε οτι $U(p) \circ s \circ g = g$ που ισχύει αφού η s αποτελεί τμήση του $U(p)$.

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & M \arrow[d, "p"] \\ & N \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "s\circ g"] \arrow[dr, "g"'] & U(M) \arrow[d, "U(p)"] \\ & U(N) \end{tikzcd}$$

■

Παρατήρηση Συμβολίζουμε με $\eta : 1_{\mathrm{Set}} \Rightarrow UF$ και $\varepsilon : FU \Rightarrow 1_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}}$ τους φυσικούς μετασχηματισμούς της προσάρτησης μεταξύ των συναρτητών U και F. Η προσάρτηση αυτή δίνει την αντιμεταθετικότητα των παρακάτω τριγώνων.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\eta\circ U"] \arrow[dr, "1_U"'] & UFU \arrow[d, "U\circ\varepsilon"] \\ & U \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F \arrow[r, "F\circ\eta"] \arrow[dr, "1_F"'] & FUF \arrow[d, "\varepsilon\circ F"] \\ & F \end{tikzcd}$$

Διάγραμμα 7.2

7.10 Λήμμα. *Ο φυσικός μετασχηματισμός ε_M είναι ομαλός επιμορφισμός για κάθε μοντέλο M.*

Απόδειξη Από το πρώτο τρίγωνο του διαγράμματος 7.2 είναι φανερό οτι η απεικόνιση $U(\varepsilon_M)$ είναι επί, δηλαδή ομαλός επιμορφισμός της κατηγορίας Set. Το ίδιο θα ισχύει για τον ε_M για κάθε μοντέλο στην $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$ αφού ο U ανακλά ομαλούς επιμορφισμούς.■

7.11 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{T}$ μια αλγεβρική θεωρία και M, N δυο $\mathcal{T}$-μοντέλα. Μια απεικόνιση $f : U(M) \to U(N)$ έχει τη μορφή $U(g)$ για έναν(κατ' ανάγκη μοναδικό) $\mathcal{T}$-ομομορφισμό $g : M \to N$ εαν και μόνο εαν το τετράγωνο του διαγράμματος 7.3 αντιμετατίθεται.*

Απόδειξη Εαν $f = U(g)$ όπου $g : M \to N$ τότε το τετράγωνο είναι αντιμεταθετικό λόγω φυσικότητας του ε.

Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε οτι το τετράγωνο είναι αντιμεταθετικό. Θεωρούμε το διάγραμμα 7.3 στη $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$.

$$\begin{array}{ccccc} P & \overset{u_1}{\underset{u_2}{\rightrightarrows}} & FU(M) & \xrightarrow{\varepsilon_M} & M \\ {\scriptstyle h}\big\downarrow & & {\scriptstyle F(f)}\big\downarrow & & {\scriptstyle g}\big\downarrow \\ Q & \overset{v_1}{\underset{v_2}{\rightrightarrows}} & FU(N) & \xrightarrow{\varepsilon_N} & N \end{array}$$

Διάγραμμα 7.3

Τα u_1, u_2 και v_1, v_2 είναι ζεύγη πυρήνα των ε_M και ε_N αντίστοιχα. Με δράση του U έχουμε:

$$U(\varepsilon_N) \circ UF(f) \circ U(u_1) = f \circ U(\varepsilon_M) \circ U(u_1) =$$

$$f \circ U(\varepsilon_M) \circ U(u_2) = U(\varepsilon_N) \circ UF(f) \circ U(u_2)$$

Ο U όμως είναι πιστός συνεπώς ισχύει:

$$\varepsilon_N \circ F(f) \circ u_1 = \varepsilon_N \circ F(f) \circ u_2 \quad (1)$$

Λόγω του οτι το v_1, v_2 είναι το ζεύγος πυρήνα του ε_N, επάγεται ένας μορφισμός h ώστε

$$F(f) \circ u_1 = v_1 \circ h$$

$$F(f) \circ u_2 = v_2 \circ h$$

Ο ε_M είναι ομαλός επιμορφισμός οπότε θα είναι συνεξισωτής του ζεύγους πυρήνατου u_1, u_2. Από τη σχέση (1) είναι φανερό οτι υπάρχει μοναδικός μορφισμός $g : M \to N$ ώστε $\varepsilon_N \circ F(f) = g \circ \varepsilon_M$.
Με δράση του U και στα δυο μέλη και λαμβάνοντας υπόψη το διάγραμμα 7.4 έχουμε:

$$U(g) \circ U(\varepsilon_M) = U(\varepsilon_N) \circ UF(f) = f \circ U(\varepsilon_M)$$

Ο $U(\varepsilon_M)$ είναι επιμορφισμός συνεπώς η τελευταία ισότητα δίνει οτι $f = U(g)$ που είναι ακριβώς το ζητούμενο.

$$\begin{tikzcd} UFU(M) \arrow[r, "UF(f)"] \arrow[d, "U(\varepsilon_M)"'] & UFU(N) \arrow[d, "U(\varepsilon_N)"] \\ U(M) \arrow[r, "f"'] & U(N) \end{tikzcd}$$

Διάγραμμα 7.4

■

7.12 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{T}$ μια αλγεβρική θεωρία. Κάθε $\mathcal{T}$-μοντέλο M είναι* ***πηλίκο ενός ελεύθερου μοντέλου****. Ειδικότερα, το παρακάτω διάγραμμα αποτελεί διάγραμμα συνεξισωτή.*

$$FUFU(M) \underset{FU(\varepsilon_M)}{\overset{\varepsilon_{FU(M)}}{\rightrightarrows}} FU(M) \xrightarrow{\varepsilon_M} M$$

Απόδειξη Γνωρίζουμε ήδη οτι ο ε_M είναι ομαλός επιμορφισμός συνεπώς το M είναι πηλίκο του ελεύθερου μοντέλου $FU(M)$. Θα δείξουμε τώρα οτι ο ε_M είναι ο συνεξισωτής των $\varepsilon_{FU(M)}$ και $FU(\varepsilon_M)$.

$$\begin{tikzcd} FUFU(M) \arrow[r, "\varepsilon_{FU(M)}"] \arrow[d, "FU(\varepsilon_M)"'] & FU(M) \arrow[d, "\varepsilon_M"] \\ FU(M) \arrow[r, "\varepsilon_M"'] & M \end{tikzcd}$$

Το τετράγωνο του σχήματος αντιμετατίθεται λόγω της φυσικότητας του ε. Έχουμε λοιπόν

$$\varepsilon_M \circ FU(M) = \varepsilon_M \circ \varepsilon_{FU(M)}$$

που σημαίνει οτι ο ε_M συνεξισώνει τους δυο μορφισμούς. Έστω ένας μορφισμός $h : FU(M) \to N$ ώστε

$$h \circ \varepsilon_{FU(M)} = h \circ FU(\varepsilon_M)$$

Αρκεί να δείξουμε οτι υπάρχει μοναδικός μορφισμός $g : M \to N$ ώστε $h = g \circ \varepsilon_M$ και η απόδειξη θα έχει ολοκληρωθεί.

Λόγω προσάρτησης, ο h αντιστοιχεί σε ένα μορφισμό $f : U(M) \to U(N)$ για τον οποίο ισχύουν οι σχέσεις:

$$h = \varepsilon_N \circ F(f) \text{ και } f = U(h) \circ \eta_{U(M)}$$

Από την φυσικότητα του η, τις τριγωνικές ιδιότητες της προσάρτησης και την υπόθεση μας για τον h, προκύπτουν οι παρακάτω ισότητες:

$$f \circ U(\varepsilon_M) = (U(h) \circ \eta_{U(M)}) \circ U(\varepsilon_M) = U(h) \circ (\eta_{U(M)} \circ U(\varepsilon_M)) =$$

$$= U(h) \circ (UFU(\varepsilon_M) \circ \eta_{UFU(M)}) = (U(h) \circ UFU(\varepsilon_M)) \circ \eta_{UFU(M)} =$$

$$= (U(h) \circ U(\varepsilon_{FU(M)})) \circ \eta_{UFU(M)} = U(h) \circ (U(\varepsilon_{FU(M)} \circ \eta_{UFU(M)}) =$$

$$= U(h) \circ 1_{UFU(M)} = U(h) = U((\varepsilon_N \circ F(f)) = U(\varepsilon_N) \circ UF(f)$$

Από το διάγραμμα 7.3 και με τη χρήση της προηγούμενης Πρότασης προκύπτει οτι η f γράφεται στη μορφή $U(g)$ όπου $g : M \to N$.
Έχουμε

$$f \circ U(\varepsilon_M) = U(h) \Rightarrow U(g) \circ U(\varepsilon_M) = U(h) \Rightarrow$$
$$U(g \circ \varepsilon_M) = U(h) \Rightarrow g \circ \varepsilon_M = h$$

αφού ο U είναι πιστός.
Επιπλέον ο g είναι μοναδικός. Πράγματι εαν $g' : M \to N$ ένας άλλος μορφισμός ώστε $h = g' \circ \varepsilon_M$ έχουμε $g \circ \varepsilon_M = g' \circ \varepsilon_M \Rightarrow g = g'$ αφού ο ε_M είναι επιμορφισμός.■

7.13 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{T}$ μια αλγεβρική θεωρία. Τα **πεπερασμένα γεννώμενα ελεύθερα μοντέλα** αποτελούν **οικογένεια πυκνών γεννητόρων** της* $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$.

Απόδειξη Θα δείξουμε οτι τα αντικείμενα $\hom(T^n, -)$ αποτελούν οικογένεια πυκνών γεννητόρων της $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$. Για το σκοπό αυτό αρκεί να δείξουμε οτι για κάθε αντικείμενο $F \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$, το συνόριο του συναρτητή

$$\Gamma^C : (\hom(T^n, -) \to F) \mapsto \hom(T^n, -)$$

είναι ακριβώς το αντικείμενο F.
Στην κατηγορία $\mathrm{Fun}(\mathcal{T}, \mathrm{Set})$ γνωρίζουμε οτι κάθε συναρτητής γράφεται ως συνόριο ενός κανονικού διαγράμματος όλων των αναπαραστάσιμων συναρτητών επί του F.
Δηλ.

$$F = \mathrm{colim}((\hom(T^n, -) \to F) \mapsto \hom(T^n, -))$$

Η κατηγορία $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$ περιέχει τους αναπαραστάσιμους συναρτητές και έχει όλα τα μικρά συνόρια συνεπώς η παραπάνω ισότητα είναι αληθής στη $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$ και το ζητούμενο απεδείχθη.■

7.14 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{T}$ μια αλγεβρική θεωρία. Κάθε $\mathcal{T}$-μοντέλο είναι η* ***φιλτραρισμένη ένωση*** *των* ***πεπερασμένα γεννώμενων $\mathcal{T}$-υπομοντέλων του****.*

Απόδειξη Για κάθε αντικείμενο $(F(n), u) \in \mathcal{F}/M$ θεωρούμε την επι-μονο παραγοντοποίηση του $u : F(n) \to M$ όπως φαίνεται στο διάγραμμα 7.5

$$\begin{tikzcd} F(n) \arrow[r, "u"] \arrow[dr] & M \\ & \mathrm{Imu} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Διάγραμμα 7.5

Κάθε αντικείμενο Imu ως πηλίκο ενός $F(n)$, είναι πεπερασμένα γεννώμενο υπο-μοντέλο του M.
Συνεπώς έχουμε

$$\mathrm{Imu} \subseteq M \Rightarrow U(\mathrm{Imu}) \subseteq U(M) \Rightarrow \cup(U(\mathrm{Imu})) \subseteq U(M)$$

Θεωρούμε τώρα το διάγραμμα 7.6 και έστω ένα τυχαίο $x \in U(M)$.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\eta_1"] \arrow[dr] & UF(1) \arrow[r, "U(\bar{x})"] & U(M) \\ & U(\mathrm{Im\bar{x}}) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Διάγραμμα 7.6

Ισχύει

$$x = U(\bar{x})(\{*\}) \Rightarrow x \in U(\mathrm{Im\bar{x}})$$

Συνεπώς η ένωση όλων των $U(\mathrm{Imu})$ περιέχει όλα τα στοιχεία του $U(M)$ και ισχύει:

$$U(M) \subseteq \cup(U(\mathrm{Imu}))$$

από όπου έχουμε την ισότητα

$$U(M) = \cup(U(\mathrm{Imu}))$$

Από την τελευταία προκύπτει οτι

$$M(T) = \cup(\mathrm{Imu}(T)) \Rightarrow M(T) = \cup(\mathrm{Imu})(T) \Rightarrow M = \cup(\mathrm{Imu})$$

Αρκεί τώρα να αποδείξουμε οτι πρόκειται για φιλτραρισμένη ένωση. Έστω n, m πεπερασμένα σύνολα και μορφισμοί $u : F(n) \to M, v : F(m) \to M$. Έστω (u, v) ο επαγόμενος μορφισμός στο συν-γινόμενο

$$(u, v) : F(n + m) = F(n) \sqcup F(m) \to M$$

Θεωρούμε το διάγραμμα 7.7

$$\begin{array}{ccccc} F(n+M) & \longrightarrow & I(u,v) & \xrightarrow{i} & M \\ \uparrow & & {\scriptstyle h}\uparrow & & {\scriptstyle id}\uparrow \\ F(n) & \longrightarrow & I_u & \xrightarrow{j} & M \end{array}$$

Διάγραμμα 7.7

Από την Πρόταση 1.24 έχουμε οτι υπάρχει $h : I_u \to I(u, v)$ ώστε το διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό. Έχουμε $j = i \circ h$ και ο j είναι μονομορφισμός συνεπώς ο h είναι επίσης μονομορφισμός και προφανώς $I_u \subset I(u, v)$. Ομοίως αποδεικνύεται οτι $I_v \subset I(u, v)$.■

Παρατήρηση Με τη μέχρι στιγμής εξοικείωση μας με τους ορισμούς και τις έννοιες της ενότητας αυτής, μπορούμε να δικαιολογήσουμε τον όρο **πεπερασμένα παραστάσιμο** μοντέλο. Έστω λοιπόν ένα μοντέλο M που προκύπτει ως συνεξισωτής του διαγράμματος

$$F(m) \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} F(n) \xrightarrow{q} M$$

όπου τα m και n είναι πεπερασμένα. Τα u, v αντιστοιχούν λόγω προσάρτησης σε απεικονίσεις $\tilde{u}, \tilde{v} : m \rightrightarrows UF(n)$ στην Set, δηλαδή σε m-άδες $(u_1, ..., u_m)$, $(v_1, ..., v_m)$ από στοιχεία του $UF(n)$. Προκύπτει άμεσα οτι το M είναι το πηλίκο του $F(n)$ προς τη μικρότερη σχέση ισοδυναμίας επί της $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$ (ισοτιμία), η οποία περιέχει τα ζεύγη (u_i, u_i) για $i = 1, ..., m$. Το M λοιπόν είναι το μοντέλο που προκύπτει από:

• **Πεπερασμένου πλήθους γεννήτορες**:Τα στοιχεία του συνόλου n .

• **Πεπερασμένου πλήθους σχέσεις** $u_i = v_i$ μεταξύ στοιχείων που παράγονται από αυτούς τους γεννήτορες.

Δικαιολογημένα, συνεπώς, για το M χρησιμοποιείται ο όρος **πεπερασμένα παραστάσιμο**.

7.15 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{T}$ μια αλγεβρική θεωρία. Τα* ***πεπερασμένα παραστάσιμα μοντέλα*** *αποτελούν* ***πυκνή οικογένεια γεννητόρων*** *της* $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$, *και είναι ευσταθή ως προς πεπερασμένα συνόρια. Επιπλέον κάθε $\mathcal{T}$-μοντέλο είναι φιλτραρισμένο συνόριο πεπερασμένα παραστάσιμων μοντέλων.*

Απόδειξη Αρχικά θα δείξουμε οτι η οικογένεια των πεπερασμένα παραστάσιμων αντικειμένων αποτελεί πυκνή οικογένεια γεννητόρων της $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$.

Έστω $\mathcal{P}$ η πλήρης υποκατηγορία που αποτελείται από τα πεπερασμένα παραστά- σιμα $\mathcal{T}$-μοντέλα. Δοθέντος ενός μοντέλου M, θεωρούμε την κατηγορία $\mathcal{P}/M$ και τον επιλήσμονα συναρτητή

$$\varphi : \mathcal{P}/M \to \mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}, \quad \varphi : (u : P \to M) \mapsto P, \quad \forall\, P \in \mathcal{P}$$

Θεωρούμε τον κανονικό κώνο

$$s(P,u) : \varphi(P,u) \to M, \quad s(P,u) = u$$

Θα δείξουμε οτι το $(M, s(P,u))$ έχει την καθολική ιδιότητα, το οποίο είναι προφανώς συν-κώνος.

Έστω ένας δεύτερος συν-κώνος επί του φ:

$$t(P,u) : \varphi(P,u) \to N$$

Θεωρούμε το μορφισμό $t(F(n),u)$, n πεπερασμένο σύνολο, ο οποίος επάγει μια μοναδική παραγοντοποίηση $g : M \to N$ ώστε

$$g \circ s(F(n),u) = t(F(n),u)$$

για κάθε μορφισμό $u : F(n) \to M$, αφού η οικογένεια των ελεύθερων πεπερασμένα γεννώμενων αντικειμένων ήδη γνωρίζουμε οτι αποτελεί πυκνή οικογένεια γεννητόρων της $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$. Δοθέντος ενός $P \in \mathcal{P}$ και $u : P \to M$ θεωρούμε έναν ομαλό επιμορφισμό $p : F(m) \to P$, m πεπερασμένο σύνολο. Ο p επάγει ενα μορφισμό $p : (F(m), u \circ p) \to (P,u)$ στην κατηγορία $\mathcal{P}/M$ και έχουμε τις παρακάτω σχέσεις:

$$t(P,u) \circ p = t(F(m), u \circ p)$$

εφόσον ο $(N, t(P,u))$ είναι συν-κώνος.

$$t(F(m), u \circ p) = g \circ s(F(m), u \circ p)$$

όπως αναφέρθηκε παραπάνω . Επίσης

$$s(F(m), u \circ p) = s(P,u) \circ p$$

εφόσον ο $(M, s(P, u))$ είναι συν-κώνος. Αν συνδυάσουμε τις παραπάνω σχέσεις έχουμε

$$t(P, u) \circ p = g \circ s(P, u) \circ p \Rightarrow t(P, u) = g \circ s(P, u)$$

αφού ο p είναι επιμορφισμός.
Ο $(M, s(P, u))$ έχει συνεπώς την καθολική ιδιότητα που τον καθιστά όριο του φ και αποδεικνύεται άμεσα το ζητουμενο.

$$\begin{tikzcd}
 & N & \\
 & M \arrow[u] & \\
F(m) \arrow[uur, bend left, "{t(F(m),u\circ p)}"] \arrow[ur] \arrow[rr, "p"'] & & P \arrow[ul, "{s(P,u)}"'] \arrow[uul, bend right, "{t(P,u)}"']
\end{tikzcd}$$

Απομένει να αποδείξουμε οτι η $\mathcal{P}$ είναι ευσταθής ως προς πεπερασμένα συνόρια. Ως συνέπεια αυτού η κατηγορία $\mathcal{P}/M$ θα είναι φιλτραρισμένη και προφανώς κάθε $\mathcal{T}$ -μοντέλο θα είναι φιλτραρισμένο συνόριο πεπερασμένα παραστάσιμων μοντέλων.

• Η $\mathcal{P}$ δεν είναι κενή αφού περιέχει το αρχικό αντικείμενο $F(\varnothing)$. Έστω τώρα P, Q δυο πεπερασμένα παραστάσιμα μοντέλα ως συνεξισωτές των παρακάτω δυο διαγραμμάτων αντιστοίχως.

$$F(m) \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} F(n) \xrightarrow{p} P, \qquad F(k) \underset{s}{\overset{r}{\rightrightarrows}} F(l) \xrightarrow{q} Q$$

Γνωρίζουμε οτι το παρακάτω διάγραμμα θα είναι επίσης διάγραμμα συνεξισωτή

$$F(m) \sqcup F(k) \underset{v \sqcup s}{\overset{u \sqcup r}{\rightrightarrows}} F(n) \sqcup F(l) \xrightarrow{p \sqcup q} P \sqcup Q$$

Λόγω των σχέσεων

$$F(m) \sqcup F(k) = F(m + k) \qquad F(n) \sqcup F(l) = F(n + l)$$

είναι φανερό οτι το $P \sqcup Q$ είναι επίσης πεπερασμένα παραστάσιμο. Δείξαμε λοιπόν οτι η $\mathcal{P}$ είναι ευσταθής ως προς πεπερασμένα συν-γινόμενα. Το ζητούμενο θα προκύψει άμεσα εαν δείξουμε οτι η κατηγορία $\mathcal{P}$ είναι ευσταθής επίσης ως προς συνεξσωτές.

• θεωρούμε το διάγραμμα 7.8 όπου οι στήλες και η τελευταία σειρά αποτελούν συνεξισωτές. Τα k, l, m, n είναι πεπερασμένα σύνολα συνεπώς τα P και

Q είναι πεπερασμένα παραστάσιμα. Το ίδιο καλούμεθα να αποδείξουμε για το R και η απόδειξη της Πρότασης θα είναι πλήρης.

$$\begin{tikzcd}
F(m) \arrow[d, shift right, "a"'] \arrow[d, shift left, "b"] & F(l) \arrow[d, shift right, "c"'] \arrow[d, shift left, "d"] & F(n+l) \arrow[dl, shift right, "x\sqcup c"'] \arrow[dl, shift left, "y\sqcup d"] \\
F(n) \arrow[r, shift left, "x"] \arrow[r, shift right, "y"'] \arrow[d, "p"'] & F(k) \arrow[r, "z"] \arrow[d, "q"'] & Z \\
P \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & Q \arrow[r, "r"'] \arrow[ur, "m"] & R \arrow[u, "n"']
\end{tikzcd}$$

Διάγραμμα 7.8

Το $F(n)$ είναι προβολικό αντικείμενο συνεπώς μπορούμε να επιλέξουμε μορφισμούς x, y ώστε

$$q \circ x = u \circ p, \quad q \circ y = v \circ p$$

Θεωρούμε το αντικείμενο $F(n+l) = F(n) \sqcup F(l)$ και τους μορφισμούς

$$x \sqcup c, y \sqcup d : F(n+l) \to F(k)$$

Θα δείξουμε οτι $r \circ q = \mathrm{Coker}(x \sqcup c, y \sqcup d)$ από όπου προκύπτει άμεσα το ζητούμενο. Έχουμε

$$r \circ q \circ x = r \circ (q \circ x) = r \circ (u \circ p) = (r \circ u) \circ p = r \circ (v \circ p) = r \circ q \circ y$$

$$(r \circ q) \circ c = r \circ (q \circ c) = r \circ (q \circ d) = (r \circ q) \circ d$$

Ο $r \circ q$ λοιπόν πράγματι συνεξισώνει τα ζεύγη x, y και c, d, συνεπώς και το ζεύγος $x \sqcup c, y \sqcup d$. Έστω $z : F(k) \to Z$ ένας μορφισμός που συνεξισώνει επίσης τους $x \sqcup c$ και $y \sqcup d$. Εφόσον $z \circ c = z \circ d$ υπάρχει μοναδικός μορφισμός $m : Q \to Z$ ώστε $z = m \circ q$.
Έχουμε

$$m \circ u \circ p = m \circ q \circ x = z \circ x = z \circ y = m \circ q \circ y = m \circ v \circ p \Rightarrow$$

$$m \circ u = m \circ v$$

εφόσον ο p είναι επιμορφισμός.
Λόγω της τελευταίας σχέσης υπάρχει μοναδικός μορφισμός $n : R \to Z$ ώστε $m = n \circ r$. Για τον z ισχύει: $z = m \circ q = n \circ (r \circ q)$ Ο n είναι ο ζητούμενος μορφισμός και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί.■

7.16 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{T}$ μια αλγεβρική θεωρία. Ένα $\mathcal{T}$-μοντέλο είναι* ***πεπερασμένα παραστάσιμο*** *τότε και μόνο τότε όταν ο* ***αναπαραστάσιμος συναρτητής***

$$\hom_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}}(M, -) : \mathrm{Mod}_{\mathcal{T}} \to \mathrm{Set}$$

διατηρεί φιλτραρισμένα συνόρια*.*

Απόδειξη Θεωρούμε ένα φιλτραρισμένο συνόριο $N = \mathrm{colim} N_i$ στην κατηγορία $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$. Οι κανονκοί μορφισμοί $s_i : N_i \to N$ επάγουν έναν συν-κώνο $\hom_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}}(M, s_i)$ και συνεπώς μια παραγοντοποίηση

$$\varphi : \mathrm{colim}\, \hom_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}}(M, N_i) \to \hom_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}}(M, \mathrm{colim} N_i)$$

Ας υποθέσουμε αρχικά οτι το μοντέλο M είναι πεπερασμένα παραστάσιμο μέσω του συνεξισωτή

$$F(m) \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} F(n) \xrightarrow{q} M$$

Αρκεί να δείξουμε οτι ο φ είναι ισομορφισμός.

• Δοθέντος ενός μορφισμού $f : M \to \mathrm{colim} N_i$, η σύνθεση

$$f \circ q : F(n) \to \mathrm{colim} N_i$$

λόγω προσάρτησης δίνει μια απεικόνιση $n \to U(\mathrm{colim} N_i)$ δηλαδή n στοιχεία $x_1, ..., x_n \in U(\mathrm{colim} N_i)$. Λόγω του οτι ο U διατηρεί φιλτραρισμένα συνόρια έχουμε

$$U(\mathrm{colim} N_i) = \mathrm{colim} U(N_i)$$

Με βάση την Πρόταση 1.8 τα n στοιχεία θα είναι κλάσεις $\bar{x}_j, j = 1, ..., n$ που λόγω της ιδιότητας του φίλτρου, μπορούμε να υποθέσουμε οτι ανήκουν από κοινού σε ένα σύνολο $U(N_{i_0})$. Επάγεται συνεπώς μια νέα απεικόνιση $n \to U(N_{i_0})$ και ένας μορφισμός $g : F(n) \to N_{i_0}$ ώστε $s_{i_0} \circ g = f \circ q$.
Με το ίδιο σκεπτικό όπως και παραπάνω οι μορφισμοί

$$g \circ u : F(m) \to N_{i_0}, \quad g \circ v : F(m) \to N_{i_0}$$

αντιστοιχούν σε m-άδες $y_1, ..., y_m$ και $z_1, ..., z_m$ από στοιχεία του $U(N_{i_0})$.
Η ισότητα

$$s_{i_0} \circ g \circ u = f \circ q \circ u = f \circ q \circ v = s_{i_0} \circ g \circ v$$

λόγω προσάρτησης δίνει την ισότητα των παραπάνω στοιχείων,δηλαδή

$$[y_k] = [z_k],\ k = 1, ..., m$$

Λόγω του πεπερασμένου αριθμού αυτών των ισοτήτων και της ιδιότητας του φίλτρου, υπάρχει ένα σύνολο N_{i_1} στο διάγραμμα του συνορίου ώστε να ισχύουν εντός αυτού. Συνεπώς υπάρχει και ένας μορφισμός $s : N_{i_0} \to N_{i_1}$ ώστε

$$s(y_k) = s(z_k), k = 1, ..., m$$

Προφανώς θα ισχύει $s \circ g \circ u = s \circ g \circ v$ που με τη σειρά της επάγει μια μοναδική παραγοντοποίηση $h : M \to N_{i_1}$ μέσω του συνεξισωτή q των u και v.
Έχουμε $s \circ g = h \circ q$ και

$$s_{i_1} \circ h \circ q = s_{i_1} \circ s \circ g = s_{i_0} \circ g = f \circ q \Rightarrow s_{i_1 \circ h} = f$$

αφού ο q είναι επιμορφισμός.
Αυτό σημαίνει οτι $f = \varphi([h])$ για $h \in \hom_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}}(M, N_{i_1})$ και ο φ είναι επί.

- Δοθέντων τώρα δυο μορφισμών

$$h \in \hom_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}}(M, N_{i_1}) \text{ και } k \in \hom_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}}(M, N_{i_2})$$

με $\varphi([h]) = \varphi([k])$ μπορούμε να επιλέξουμε ένα σύνολο N_{i_3} ως πεδίο τιμών των h και k. Οι δυο μορφισμοί

$$h \circ q, k \circ q : F(n) \rightrightarrows N_{i_3}$$

αντιστοιχούν σε δυο n-άδες $a_1, ..., a_n$και $b_1, ..., b_n$ εντός του $U(N_{i_3})$ με βάση το σκεπτικό που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως.

Από τη σχέση $\varphi([h]) = \varphi([k])$ έχουμε

$$s_{i_3} \circ h \circ q = s_{i_3} \circ k \circ q$$

και συνεπώς

$$[a_j] = [b_j], \quad j = 1, ..., n$$

στο συνόριο. Λόγω της ιδιότητας του φίλτρου, οι σχέσεις $[a_j] = [b_j]$ όπου $j = 1, ..., n$ ισχύουν σε κάποιο σύνολο N_{i_4} στο διάγραμμα του συνορίου και για κάποιο μορφισμό $s' : N_{i_3} \to N_{i_4}$. Λόγω προσάρτησης οι σχέσεις αυτές δίνουν

$s' \circ h \circ q = s' \circ k \circ q \Rightarrow s' \circ h = s' \circ k$ αφού ο q είναι επιμορφισμός.

$s' \circ h = s' \circ k \Rightarrow [h] = [k]$ και συνεπώς ο φ είναι αμφιμονοσήμαντος.

Θα αποδείξουμε τώρα τον αντίστροφο ισχυρισμό. Έστω οτι για κάθε φιλτραρισμένο συνόριο ο φ είναι ισομορφισμός. Εφαρμόζουμε την υπόθεση αυτή στην περίπτωση του φιλτραρισμένου συνορίου που ορίζει ένα $\mathcal{T}$-μοντέλο M.

$$\varphi : \operatorname{colim} \hom_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}}(M, \varphi(P, u)) \cong \hom_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}}(M, \operatorname{colim} \varphi(P, u))$$

$$= \hom_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}}(M, M)$$

Η ταυτοτική συνάρτηση του M αντιστοιχεί στην κλάση ισοδυναμίας ενός μορφισμού $f : M \to P$. Συνεπώς η σύνθεση $s(P, u) \circ f$ είναι η ταυτοτική συνάρτηση του M.

$$M \xrightarrow{f} P = \varphi(P, u) \xrightarrow{s(P,u)=u} M$$

Το M αποτελεί συστολή του P και το παρακάτω διάγραμμα είναι διάγραμμα συνεξισωτή.

$$P \underset{f\circ s(P,u)}{\overset{1_P}{\rightrightarrows}} P \xrightarrow{s(P,u)} M$$

Το $s(P,u)$ συνεξισώνει τα 1_P και $f \circ s(P,u)$ αφού

$$\begin{aligned} s(P,U) \circ (f \circ s(P,u)) &= (s(P,u) \circ f) \circ s(P,u) = 1_M \circ s(P,u) \\ &= s(P,u) = s(P,u) \circ 1_P \end{aligned}$$

Εαν τώρα υπάρχει μια $h : P \to M$ ώστε

$$h \circ 1_P = h \circ (f \circ s(P,u))$$

τότε

$$h = (h \circ f) \circ s(P,u)$$

δηλαδή η h παραγοντοποιείται μέσω της $h \circ f$.

Το P είναι πεπερασμένα παραστάσιμο μοντέλο. Για τα μοντέλα αυτού του είδους γνωρίζουμε οτι είναι ευσταθή ως προς συνεξισωτές. Συνεπώς το M που προκύπτει από διάγραμμα συνεξισωτή δυο πεπερασμένα παραστάσιμων μοντέλων, θα είναι και αυτό πεπερασμένα παραστάσιμο. Με το τελευταίο συμπέρασμα η απόδειξη της πρότασης είναι πλήρης.■

Θα αποδείξουμε στη συνέχεια οτι κάθε αλγεβρικός συναρτητής έχει αριστερά προσαρτημένο με εφαρμογή της παρακάτω Πρότασης για την ύπαρξη αριστερά προσαρτημένου προσαρτητή.

7.17 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{A}$ μια* ***τοπικώς μικρή κατηγορία με όρια και φιλτραρισμένα συνόρια*** *που διατηρούνται από ένα συναρτητή $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ εντός μιας* ***τοπικώς πεπερασμένα παραστάσιμης*** *κατηγορίας $\mathcal{B}$. Εαν η $\mathcal{A}$ έχει μια οικογένεια αντικειμένων $\mathcal{G}$ που αποτελεί* ***σύνολο γεννητόρων****, τότε ο $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$* ***έχει αριστερά προσαρτημένο συναρτητή*** *$F : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$.*

Απόδειξη Θα αποδείξουμε οτι για κάθε αντικείμενο $B \in \mathcal{B}$, υπάρχει ένα αντικείμενο $F(B)$ και μια απεικόνιση $\eta_B : B \to G(FB)$ με την ιδιότητα κάθε μορφισμός $g : B \to G(A)$ να έχει μοναδική παραγοντοποίηση $f : F(B) \to A$ με $g = G(f) \circ \eta_B$. Εαν το B μπορεί να γραφεί ως φιλτραρισμένο συνόριο, δηλαδή $B = \mathrm{colim}_{i\in I} B_i$ και τα παραπάνω ισχύουν για κάθε $B_i, i \in I$, τότε αποδεικνύεται εύκολα οτι ισχύουν και για το B. Μάλιστα, εαν για κάθε απεικόνιση $a : i \to j \in \mathrm{Morph}(I)$, ορίσουμε τον F_a ώστε το παρακάτω τετράγωνο να είναι αντιμεταθετικό,

$$\begin{tikzcd} B_i \arrow[r] \arrow[d, "\ulcorner a \urcorner"'] & G(FB_i) \arrow[d, "GF_a"] \\ B_j \arrow[r] & G(FB_j) \end{tikzcd}$$

τότε το φιλτραρισμένο συνόριο $\mathrm{colim}_{i\in I}FB_i$ έχει νόημα. Ορίζουμε συνεπώς

$$F(B) = \mathrm{colim}_{i\in I}FB_i$$

Λόγω του οτι ο G διατηρεί φιλτραρισμένα συνόρια έχουμε την κανονική απεικόνιση

$$B = \mathrm{colim}B_i \to \mathrm{colim}G(FB_i) \cong G(\mathrm{colim}FB_i)$$

Αν θέσουμε ως η_B την τελευταία απεικόνιση είναι εύκολο να αποδείξουμε οτι έχει τη ζητούμενη ιδιότητα.

Με βάση το προηγούμενο συμπέρασμα και το γεγονός οτι η $\mathcal{B}$ είναι τοπικώς πεπερασμένα παραστάσιμη για την ολοκλήρωση της απόδειξης αρκεί να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη του ζεύγους $(F(B), \eta_B)$ για ένα πεπερασμένα παραστάσιμο αντικείμενο B της $\mathcal{B}$. Λόγω του οτι η $\mathcal{A}$ έχει όρια και ο G τα διατηρεί, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Προσαρτημένου Συναρτητή(Θεώρημα 1.16) για το B. Αναζητούμε συνεπώς την ύπαρξη ενός συνόλου

$$\{g_i : B \to G(A_i)\, i \in I\}$$

με την ιδιότητα για κάθε μορφισμό $g : B \to G(A)$ να υπάρχει μοναδική παραγοντοποίηση $f : A_i \to A$ για κάποιο $i \in I$ ώστε $g = G(f) \circ g_i$. Το

$$\{B \to G(A), A \in \mathcal{G}\}$$

είναι ένα τέτοιο σύνολο. Πράγματι, κάθε $A \in \mathcal{A}$ γράφεται ως φιλτραρισμένο συνόριο αντικειμένων της $\mathcal{G}$, δηλαδή

$$A = \mathrm{colim}_{k\in K}A_k$$

με συν-κώνο

$$\{i_k : A_k \to A, k \in K\}$$

Ο G διατηρεί φιλτραρισμένα συνόρια συνεπώς έχουμε

$$G(A) = \mathrm{colim}_{k\in K}G(A_k)$$

και

$$\{G(i_k) : G(A_k) \to G(A), k \in K\}$$

ο συν-κώνος του συνορίου. Δοθέντος ενός μορφισμού $g : B \to G(A)$, λόγω του οτι το B είναι πεπερασμένα παραστάσιμο, ο g παραγοντοποιείται μέσω μιας εκ των απεικονίσεων του συν-κώνου. Δηλαδή

$$g : B \to G(A_k) \xrightarrow{G(i_k)} G(A)$$

για κάποιο $k \in K$ και $A_k \in \mathcal{G}$.■

7.18 Πόρισμα. ***Κάθε αλγεβρικός συναρτητής έχει αριστερά προσαρτημένο.***

Απόδειξη Γνωρίζουμε οτι κάθε αλγεβρική κατηγορία είναι τοπικά μικρή, πλήρης και συν-πλήρης. Επιπλέον η οικονένεια των πεπερασμένα παραστάσιμων μοντέλων είναι σύνολο γεννητόρων της κατηγορίας και κάθε $\mathcal{T}$-μοντέλο είναι φιλτραρισμένο συνόριο πεπερασμένα παραστάσιμων μοντέλων. Συνεπώς κάθε αλγεβρική κατηγορία είναι τοπικώς πεπερασμένα παραστάσιμη. Λόγω του οτι κάθε αλγεβρικός συναρτητής διατηρεί όρια και φιλτραρισμένα συνόρια με εφαρμογή της προηγούμενης Πρότασης προκύπτει άμεσα το ζητούμενο.

Κεφάλαιο 8

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΚΑΤΗΓΟΡΙΩΝ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα συνοψίσουμε τις ιδιότητες μιας αλγεβρικής κατηγορίας. Με αυτόν τον τρόπο θα τις χαρακτηρίσουμε και θα αποδείξουμε πως αν μια τυχαία κατηγορία έχει αυτές τις ιδιότητες τότε αποτελεί αλγεβρική κατηγορία που αντιστοιχεί σε μια αλγεβρική θεωρία. Το παρακάτω θεώρημα αποτελεί κριτήριο για αυτόν ακριβώς το σκοπό.

8.1 Θεώρημα. *Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και $U : \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$ ένας συναρτητής. Οι συνθήκες (I) και (II) είναι ισοδύναμες:*

(I) Η $\mathcal{C}$ είναι ισοδύναμη με την ***κατηγορία των μοντέλων μιας αλγεβρικής θεωρίας*** *$\mathcal{T}$ και ο U είναι ο αντίστοιχος* ***επιλήσμων συναρτητής****.*

(II) Οι εξής συνθήκες ικανοποιούνται:

(α) Η $\mathcal{C}$ έχει ***συνεξισωτές*** *και* ***ζεύγη πυρήνων****.*

(β) Ο U έχει ***αριστερά προσαρτημένο*** *F.*

(γ) Ο U ***ανακλά ισομορφισμούς****.*

(δ) Ο U ***διατηρεί ομαλούς επιμορφισμούς****.*

(ε) Ο UF ***διατηρεί φιλτραρισμένα συνόρια****.*

Υπο αυτές τις συνθήκες, η $\mathcal{T}^{op}$ είναι ισοδύναμη με την πλήρη υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ που γεννιέται από τα αντικείμενα $F(n)$, όπου το n διατρέχει τα πεπερασμένα σύνολα.

$$\mathcal{T}^{op} \cong \{F(0), F(1), F(2), ...\} \text{ ή } \mathcal{T} \cong \{F(0), F(1), F(2), ...\}^{op}$$

Συνεπώς

$$\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}} \cong Pr(\{F(0), F(1), ...\}^{op}, \mathrm{Set})$$

Απόδειξη Έστω οτι η $\mathcal{C}$ είναι ισοδύναμη με την κατηγορία μοντέλων $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$ μιας αλγεβρικής θεωρίας $\mathcal{T}$, τότε οι συνθήκες (α) ως (δ) ικανοποιούνται με βάση όσα έχουμε αναφέρει στα προηγούμενα κεφάλαια. Ο U διατηρεί φιλτραρισμένα συνόρια και σύμφωνα με την Πρόταση 1.14 το ίδιο ισχύει και για τον F συνεπώς η συνθήκη (ε) ικανοποιείται. Ο τελευταίος ισχυρισμός για τη δυική κατηγορία της $\mathcal{T}$ προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 7.8.

Αντίστροφα, εαν ισχύουν τα (α) ως (ε) τότε ο U εφόσον έχει αριστερά προσαρτημένο, διατηρεί τα μικρά όρια άρα και τα ζεύγη πυρήνων(καθώς το ζεύγος πυρήνα είναι ειδική περίπτωση του ορίου). Λόγω του οτι ο U διατηρεί όλα τα μικρά όρια και ανακλά ισομορφισμούς, ανακλά όλα τα μικρά όρια άρα και τα ζεύγη πυρήνων.(Βλ. Πρόταση 1.5)Με βάση αυτά θα δείξουμε οτι ανακλά ομαλούς επιμορφισμούς.

• Πράγματι, ας θεωρήσουμε ένα μορφισμό $f : A \to B$ στην $\mathcal{C}$ ώστε ο $U(f)$ να είναι ομαλός επιμορφισμός στη Set. Έστω (u, v) το ζεύγος πυρήνα του f. Το $(U(u), U(v))$ είναι προφανώς το ζεύγος πυρήνα του $U(f)$ και λόγω του οτι ο $U(f)$ είναι ομαλός επιμορφισμός θα είναι ο συνεξισωτής του ζεύγους πυρήνατου $(U(u), U(v))$.
Έστω $q : A \to Q$ ο συνεξισωτής των u, v και $\omega : Q \to B$ ο μοναδικός μορφισμός ώστε $f = \omega \circ q$. Το (u, v) είναι επίσης ζεύγος πυρήνα του q αφού $q \circ u = q \circ v$.
Ο q λοιπόν είναι ομαλός επιμορφισμός ως συνεξισωτής του ζεύγους (u, v). Επειδή ο U διατηρεί ομαλούς επιμορφισμούς, ο $U(q)$ είναι ομαλός επιμορφισμός και συνεπώς συνεξισωτής του ζεύγους $(U(u), U(v))$. Λόγω μοναδικότητας του συνεξισωτή οι $U(f)$ και $U(q)$ είναι ισόμορφοι με $U(\omega)$ τον ισομορφισμό μεταξύ τους. Ο U ανακλά ισομορφισμούς συνεπώς ο ω είναι ισομορφισμός μεταξύ των f και q που αποδεικνύει οτι ο f είναι επίσης ομαλός επιμορφισμός.

• Ορίζουμε την κατηγορία $\mathcal{T}$ με διακεκριμένα αντικείμενα $T^0, T^1, T^2, ..., T^n, ...$ και μορφισμούς

$$\hom_{\mathcal{T}}(T^n, T^m) \cong \hom_{\mathcal{C}}(F(m), F(n))$$

καθότι η $\mathcal{T}$ είναι η δυική της πλήρους υποκατηγορίας της $\mathcal{C}$ με αντικείμενα τα $F(0), F(1), F(2), ..., F(n), ...$. Λόγω του οτι το αντικείμενο $F(n)$ ισούται με $\coprod_{i=1}^{n} F(1)$ η $\mathcal{T}$ είναι πράγματι αλγεβρική θεωρία .

• Ο συναρτητής $\hom_{\mathcal{C}}(-, C)$ $\forall\, C \in \mathcal{C}$ ως ανταλλοίωτος μετασχηματίζει πεπερασμένα συν-γινόμενα σε πεπερασμένα γινόμενα συνεπώς επάγει ένα $\mathcal{T}$-μοντέλο

$$\hom_{\mathcal{C}}(-, C) : \mathcal{T} \to \mathrm{Set}, \quad T^n \mapsto \hom_{\mathcal{C}}(F(n), C)$$

Η $f \in \hom_{\mathcal{T}}(T^n, T^m)$ αντιστοιχεί στην $f : F(m) \to F(n)$ στην $\mathcal{C}$ και επάγει την απεικόνιση:

$$\hom_{\mathcal{C}}(F(n), C) \to \hom_{C}(F(m), C), \quad g \mapsto g \circ f$$

Έχουμε συνεπώς κατασκευάσει ένα συναρτητή

$$\varphi : \mathcal{C} \to \mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}, \quad C \mapsto \hom_{\mathcal{C}}(-, C), \quad f \mapsto \hom_{\mathcal{C}}(-, f)$$

Αρκεί να αποδείξουμε οτι αποτελεί ισοδυναμία μεταξύ των κατηγοριών $\mathcal{C}$ και $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$, και η απόδειξη του Θεωρήματος θα είναι πλήρης.

I. Απόδειξη της πιστότητας του φ
Έστω $V : \mathrm{Mod}_{\mathcal{T}} \to \mathrm{Set}$ ο επιλήσμων συναρτητής και $G : \mathrm{Set} \to \mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$ ο αριστερά προσαρτημένος αυτού. Παρατηρούμε οτι

$$(V \circ \varphi)(C) = V(\hom_{\mathcal{C}}(-, C)) = \hom_{\mathcal{C}}(F(1), C) \cong \mathrm{Set}(1, U(C)) \cong U(C)$$

από όπου προκύπτει οτι $V \circ \varphi \cong U$
Παρατηρούμε επίσης οτι για κάθε πεπερασμένο σύνολο n ισχύει:

$$\varphi(F(n)) \cong \hom_{\mathcal{C}}(-, F(n)) \cong \hom_{\mathcal{T}}(T^n, -) \cong G(n)$$

Γενικότερα, κάθε σύνολο X γράφεται ως φιλτραρισμένο συνόριο $X = \mathrm{colim} X_i$, όπου το X_i διατρέχει τα πεπερασμένα σύνολα του X. Λόγω του οτι ο F διατηρεί φιλτραρισμένα συνόρια έχουμε

$$F(X) = \mathrm{colim} F(X_i)$$

• Θεωρούμε την κανονική παραγοντοποίηση

$$\alpha_X : \mathrm{colim}\varphi(F(X_i)) \to \varphi(\mathrm{colim}F(X_i))$$

Θα δείξουμε οτι ο α_X είναι ισομορφισμός και επειδή ο V γνωρίζουμε οτι ανακλά ισομορφισμούς, αρκεί ο $V(\alpha_X)$ να είναι ισομορφισμός.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, shift left, "U"] & & \mathrm{Mod}_{\mathcal{T}} \arrow[dl, shift left, "V"] \\
& \mathrm{Set} \arrow[ul, shift left, "F"] \arrow[ur, shift left, "G"] &
\end{tikzcd}$$

Ο V διατηρεί φιλτραρισμένα συνόρια οπότε έχουμε:

$$V(\mathrm{colim}\varphi(F(X_i)) \cong \mathrm{colim}(V \circ \varphi)(F(X_i)) \cong \mathrm{colim}(U \circ F)(X_i) \cong$$
$$U(\mathrm{colim}F(X_i)) \cong V(\varphi(\mathrm{colim}F(X_i))$$

Ως αποτέλεσμα έχουμε οτι ο $V(\alpha_X)$ και συνεπώς και ο α_X είναι ισομορφισμός. Για κάθε σύνολο X λοιπόν ισχύει:

$$\varphi \circ F(X) = \varphi(\mathrm{colim}F(X_i)) = \mathrm{colim}\varphi(F(X_i)) \cong \mathrm{colim}G(X_i) \cong G(X)$$

δηλαδή $\varphi \circ F \cong G$

• Συμβολίζουμε με $\eta : 1_{\mathrm{Set}} \Rightarrow UF$ και $\varepsilon : FU \Rightarrow 1_{\mathcal{C}}$ τους φυσικούς μετασχηματισμούς της προσάρτησης των F και U.

Από την ισότητα $(U{*}\varepsilon)\circ(\eta{*}U) = 1_U$ προκύπτει οτι η $U(\varepsilon_C)$ είναι απεικόνιση επί για κάθε $C \in \mathcal{C}$ και η $\varepsilon_C : FU(C) \to C$ ομαλός επιμορφισμός.
Έστω λοιπόν οτι είναι συνεξισωτής του ζεύγους (u_C, v_C).

Θεωρώντας την ισοδυναμία

$$\hom_{\mathcal{C}}(FU(C), D) \cong \mathrm{Set}(U(C), U(D))$$

και μορφισμούς $f, g : C \to D$, οι

$$f \circ \varepsilon_C, g \circ \varepsilon_C \in \hom_{\mathcal{C}}(FU(C), D)$$

οπότε αντιστοιχούν στους μορφισμούς

$$U(f), U(g) \in \mathrm{Set}(U(C), U(D))$$

Εαν

$$U(f) = U(g) \Rightarrow f \circ \varepsilon_C = g \circ \varepsilon_C \Rightarrow f = g$$

αφού ο ε_C είναι επιμορφισμός. Με άλλα λόγια ο U είναι πιστός και λόγω της σχέσης $U = V \circ \varphi$ προκύπτει οτι ο φ είναι επίσης πιστός.

II Απόδειξη της πληρότητας του φ

Στμβολίζουμε με $\sigma : 1_{\mathrm{Set}} \Rightarrow VG$ και $\tau : GV \Rightarrow 1_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}}$ τους φυσικούς μετασχηματισμούς της προσάρτησης των G και V. Με το ίδιο σκεπτικό όπως και προηγουμένως αποδεικνύεται οτι ο $\tau_M : GV(M) \to M$ είναι ομαλός επιμορφισμός για κάθε $\mathcal{T}$-μοντέλο M.

• Θεωρούμε ένα σύνολο X και ένα αντικείμενο $D \in \mathcal{C}$. Από όσα έχουμε αναφέρει ως τώρα προκύπτει:

$$\hom_{\mathcal{C}}(F(X), D) \cong \mathrm{Set}(X, U(D)) \cong \mathrm{Set}(X, V \circ \varphi(D)) \cong$$
$$\hom_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}}(G(X), \varphi(D)) \cong \hom_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}}(\varphi(F(X), \varphi(D)))$$

Εαν λοιπόν έχουμε μια απεικόνιση $h : \varphi(F(X)) \to \varphi(D)$ η ισοδυναμία αποδεικνύει οτι $h = \varphi(f)$ όπου $f : F(X) \to D$. Για την πληρότητα του φ, αρκεί να δείξουμε οτι το ίδιο ισχύει για τυχαίο αντικείμενο $C \in \mathcal{C}$ (όχι απαραίτητα της μορφής $F(X)$).

• Έστω $C, D \in \mathcal{C}$ και ένας μορφισμός $\alpha : \varphi(C) \Rightarrow \varphi(D)$ στην $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$.
Η σύνθεση:

$$\varphi(F(U(C))) \xrightarrow{\varphi(\varepsilon_C)} \varphi(C) \xrightarrow{\alpha} \varphi(D)$$

λόγω της προηγούμενης ισοδυναμίας είναι της μορφής $\varphi(f)$ για μοναδική απεικόνιση $f : FU(C) \to D$.
Ο ε_C είναι ο συνεξισωτής των u_C και v_C οπότε έχουμε

$$\varphi(f) \circ \varphi(u_C) = \alpha \circ \varphi(\varepsilon_C) \circ \varphi(u_C) = \alpha \circ \varphi(\varepsilon_C) \circ \varphi(v_C) = \varphi(f) \circ \varphi(v_C) \Rightarrow$$
$$f \circ u_C = f \circ v_C$$

αφού ο φ είναι πιστός .
Συνεπώς υπάρχει μοναδική παραγοντοποίηση $g : C \to D$ ώστε $f = g \circ \varepsilon_C$
Επίσης ισχύει:

$$(V \circ \varphi)(g) \circ U(\varepsilon_C) = U(g) \circ U(\varepsilon_C) = U(f) = (V \circ \varphi)(f) = V(\alpha \circ \varphi(\varepsilon_C)) =$$
$$V(\alpha) \circ (V \circ \varphi)(\varepsilon_C) = V(\alpha) \circ U(\varepsilon_C) \Rightarrow (V \circ \varphi)(g) = V(\alpha)$$

αφού ο $U(\varepsilon_C)$ είναι επιμορφισμός.

Επιπλέον $\varphi(g) = \alpha$ αφού ο v είναι πιστός. Ο g συνεπώς είναι ο ζητούμενος μορφισμός και ο φ είναι πλήρης.

III Απόδειξη της ισοδυναμίας των κατηγοριών $\mathcal{C}$ και $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$.

Θα δείξουμε οτι ο φ έχει αριστερά προσαρτημένο συναρτητή, έστω ψ.
Για κάθε $\mathcal{T}$-μοντέλο, θεωρούμε το ζεύγος πυρήνα του τ_M

$$R(M) \underset{s_M}{\overset{r_M}{\rightrightarrows}} GV(M) \xrightarrow{\tau_M} M$$

Εφόσον ο τ_M είναι ομαλός επιμορφισμός, θα είναι ο συνεξισωτής του ζεύγους πυρήνατου (r_M, s_M).
Παρατηρούμε τις παρακάτω συνθέσεις:

$$\varphi FVR(M) \cong GVR(M) \xrightarrow{\tau_{R(M)}} R(M) \xrightarrow{r_M} GV(M) \cong \varphi FV(M)$$

$$\varphi FVR(M) \cong GVR(M) \xrightarrow{\tau_{R(M)}} R(M) \xrightarrow{s_M} GV(M) \cong \varphi FV(M)$$

Λόγω του οτι ο φ είναι πλήρης και πιστός, υπάρχουν μοναδικά προσδιορισμένοι μορφισμοί

$$\alpha_M, \beta_M : FVR(M) \to FV(M)$$

ώστε

$$\varphi(\alpha_M) = r_M \circ \tau_{R(M)}, \quad \varphi(\beta_M) = s_M \circ \tau_{R(M)}$$

Ορίζουμε ως q_M τον συνεξισωτή των α_M, β_M δηλ.

$$q_M = \mathrm{Coker}(\alpha_M, \beta_M)$$

$$FVR(M) \underset{\beta_M}{\overset{\alpha_M}{\rightrightarrows}} FV(M) \xrightarrow{q_M} \psi(M)$$

Ορίζουμε επίσης το ζεύγος πυρήνα m_M, n_M του q_M

$$S(M) \underset{n_M}{\overset{m_M}{\rightrightarrows}} FV(M) \xrightarrow{q_M} \psi(M)$$

Ο q_M είναι ομαλός επιμορφισμός(ως συνεξισωτής του ζεύγους (α_M, β_M)) συνεπώς είναι συνεξισωτής του ζεύγους πυρήνατου m_M, n_M. Δηλαδή

$$q_M = \mathrm{Coker}(m_M, n_M)$$

Με τη βοήθεια της σχέσης $U = V \circ \varphi$ έχουμε οτι το $(\varphi(m_M), \varphi(n_M))$ είναι το ζεύγος πυρήνα του ομαλού επιμορφισμού $\varphi(q_M)$ εφόσον ο U διατηρεί ζεύγη πυρήνα και ομαλούς επιμορφισμούς και ο V ανακλά τα ίδια. Προφανώς

$$\varphi(q_M) = \mathrm{Coker}(\varphi(m_M), \varphi(n_M))$$

Θεωρούμε τώρα το διάγραμμα 8.1 όπου στις οριζόντιες γραμμές έχουμε ζεύγη πυρήνα και συνεξισωτές.

$$\begin{array}{ccccccc}
GVR(M) & \xrightarrow{\tau_{R(M)}} & R(M) & \underset{s_M}{\overset{r_M}{\rightrightarrows}} & GV(M) & \xrightarrow{\tau_M} & M \\
 & & {\scriptstyle\gamma_M}\Big\downarrow & & {\scriptstyle\cong}\Big\downarrow & & {\scriptstyle\delta_M}\Big\downarrow \\
 & & \varphi s(M) & \underset{\varphi(n_M)}{\overset{\varphi(m_M)}{\rightrightarrows}} & \varphi FV(M) & \xrightarrow{\varphi(q_M)} & \varphi\psi(M)
\end{array}$$

Διάγραμμα 8.1

Παρατηρούμε οτι

$$\varphi(q_M) \circ r_M \circ \tau_{R(M)} = \varphi(q_M) \circ \varphi(\alpha_M) = \varphi(q_M) \circ \varphi(\beta_M) = \varphi(q_M) \circ s_M \circ \tau_{R(M)} \Rightarrow$$
$$\varphi(q_M) \circ r_M = \varphi(q_M) \circ s_M$$

αφού ο $\tau_{R(M)}$ είναι επιμορφισμός.
Επειδή το $(\varphi(m_M), \varphi(n_M))$ είναι ζεύγος πυρήνα του $\varphi(q_M)$ υπάρχει μοναδική παραγοντοποίηση $\gamma_M : R(M) \to \varphi s(M)$ ώστε

$$\varphi(m_M) \circ \gamma_M = r_M, \quad \varphi(n_M) \circ \gamma_M = s_m$$

Ακόμα λόγω του οτι ο τ_M είναι ο συνεξισωτής των r_M, s_M υπάρχει μοναδική παραγοντοποίηση $\delta_M : M \to (\varphi \circ \psi)(M)$ ώστε

$$\varphi(q_M) = \delta_M \circ \tau_M$$

• Θα δείξουμε οτι το $(\psi(M), \delta_M)$ είναι η ανάκλαση του M κατά μήκος του φ.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\delta_M"] \arrow[d, "\alpha"'] & \varphi\psi(M) \arrow[dl, "\varphi(y)"] & \psi(M) \arrow[dl, "y"] \\
\varphi(C) & C &
\end{tikzcd}$$

Διάγραμμα 8.2

Δοθέντος ενός $C \in \mathcal{C}$ και ενός μορφισμού $\alpha : M \Rightarrow \varphi(C)$ η σύνθεση:

$$\varphi FV(M) \cong GV(M) \xrightarrow{\tau_M} M \xrightarrow{\alpha} \varphi(C)$$

εξαιτίας του γεγονότος οτι ο φ είναι πλήρης και πιστός, έχει τη μορφή $\varphi(x)$ για μοναδικό μορφισμό $x : FV(M) \to C$
Έχουμε:

$$\varphi(x) \circ \varphi(\alpha_M) = (\alpha \circ \tau_M) \circ (r_M \circ \tau_{R(M)}) = \alpha \circ (\tau_M \circ r_M) \circ \tau_{R(M)} =$$

$$= (\alpha \circ \tau_M) \circ (s_M \circ \tau_{R(M)}) = \varphi(x) \circ \varphi(\beta_M) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \circ \alpha_M = x \circ \beta_M$$

αφού ο φ είναι πιστός. Όμως $q_M = \operatorname{Coker}(\alpha_M, \beta_M)$ συνεπώς υπάρχει μοναδική παραγοντοποίηση $y : \psi(M) \to C$ ώστε $y \circ q_M = x$
Ισχύει οτι:

$$\varphi(y) \circ \delta_M \circ \tau_M = \varphi(y) \circ \varphi(q_M) = \varphi(x) = \alpha \circ \tau_M \Rightarrow \varphi(y) \circ \delta_M = \alpha$$

αφού ο τ_M είναι επιμορφισμός. Η y είναι μοναδική με αυτήν την ιδιότητα διότι εαν υπάρχει y' ώστε

$$\varphi(y') \circ \delta_M = \alpha = \varphi(y) \circ \delta_M \Rightarrow$$

$\Rightarrow \varphi(y) = \varphi(y')$, αφού ο δ_M είναι επιμορφισμός.
$\Rightarrow y = y'$, αφού ο φ είναι πιστός.

Συνεπώς το διάγραμμα 8.2 είναι αντιμεταθετικό και το $(\psi(M), \delta_M)$ είναι πράγματι η ανάκλαση του M κατά μήκος του φ .

Με βάση την Πρόταση 1.12 προκύπτει οτι ο φ επεκτείνεται σε ένα συναρτητή $\psi : \mathrm{Mod}_{\mathcal{T}} \to \mathcal{C}$ που είναι αριστερά προσαρτημένος του πλήρους και πιστού συναρτητή φ. Ισχύει $\psi \circ \varphi = id_{\mathcal{T}}$ και θα αποδείξουμε οτι επίσης ισχύει $\varphi \circ \psi = id_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}}$ ή διαφορετικά οτι ο φυσικός μετασχηματισμός $\delta : 1_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}} \Rightarrow \varphi \circ \psi$ είναι ισομορφισμός. Με την απόδειξη του τελευταίου θα έχουμε δείξει οτι ο $\varphi : \mathcal{C} \to \mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$ είναι μια ισοδυναμία μεταξύ των δυο κατηγοριών αυτών και η απόδειξη του Θεωρήματος θα έχει ολοκληρωθεί.

• Θα δείξουμε σε πρώτη φάση οτι ο γ_M είναι μονομορφισμός. Έστω λοιπόν οτι

$$\gamma_M \circ h = \gamma_M \circ k$$

$$\begin{tikzcd} R(M) \arrow[r, "r_M"] \arrow[d, "s_M"] & GV(M) \arrow[d, "\tau_M"] \\ GV(M) \arrow[r, "\tau_M"'] & M \end{tikzcd}$$

Το (r_M, s_M) είναι το ζεύγος πυρήνα του τ_M συνεπώς είναι η εφέλκυση $(R(M), r_M, s_M)$ του τ_M με τον εαυτό του. Έχουμε

$$r_M \circ h = \varphi(m_M) \circ \gamma_M \circ h = \varphi(m_M) \circ \gamma_M \circ k = r_M \circ k$$

$$s_M \circ h = \varphi(n_M) \circ \gamma_M \circ h = \varphi(n_M) \circ \gamma_M \circ k = s_M \circ k$$

από όπου προκύπτει $h = k$ αφού πρόκειται για διάγραμμα εφέλκυσης. Συνεπώς ο γ_M είναι πράγματι μονομορφισμός.

• Λόγω του οτι ο ψ είναι αριστερά προσαρτημένος του φ, ο μορφισμός $\gamma_M : R(M) \to \varphi s(M)$ επάγει ένα μοναδικό μορφισμό

$$h_M : \psi R(M) \to s(M) \text{ ώστε } \varphi(h_M) \circ \delta_{R(M)} = \gamma_M$$

Ο $\delta_{R(M)}$ είναι μονομορφισμός αφού ο γ_M είναι μονομορφισμός.

Επίσης ο $\varphi(q_{R(M)})$ είναι ομαλός επιμορφισμός άρα και ισχυρός επιμορφισμός οπότε από τη σχέση $\varphi(q_{R(M)}) = \delta_{R(M)} \circ \tau_{R(M)}$ έχουμε οτι και ο $\delta_{R(M)}$ είναι ισχυρός επιμορφισμός και κατά συνέπεια ισομορφισμός.

Θεωρούμε το παρακάτω διάγραμμα

$$\varphi\psi R(M) \underset{\varphi(n_M \circ h_M)}{\overset{\varphi(m_M \circ h_M)}{\rightrightarrows}} GV(M) \xrightarrow{\tau_M} M$$

Από τις σχέσεις

$$\varphi(m_M \circ h_M) \circ \delta_{R(M)} = \varphi(m_M) \circ \gamma_M = r_M$$

$$\varphi(n_M \circ h_M) \circ \delta_{R(M)} = \varphi(n_M) \circ \gamma_M = s_M$$

προκύπτει οτι πρόκειται για διάγραμμα συνεξισωτή και ζεύγους πυρήνων. Έχουμε:

$$\varphi(m_M \circ h_M \circ q_{R(M)}) = \varphi(m_M) \circ \varphi(h) \circ \delta_{R(M)} \circ \tau_{R(M)} =$$

$$= \varphi(m_M) \circ \gamma_M \circ \tau_{R(M)} = r_M \circ \tau_{R(M)} = \varphi(\alpha_M) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_M = m_M \circ h_M \circ q_{R(M)}$$

αφού ο φ είναι πιστός.
Ομοίως έχουμε οτι

$$\beta_M = n_M \circ h_M \circ q_{R(M)}$$

Συνεπώς

$$q_M = \mathrm{Coker}(m_M \circ h_M \circ q_{R(M)}, n_M \circ h_M \circ q_{R(M)}) \Rightarrow$$

$$q_M = \mathrm{Coker}(m_M \circ h_M, n_M \circ h_M)$$

αφού ο $q_{R(M)}$ είναι επιμορφισμός.

Θεωρουμε την εικόνα μέσω του φ του διαγράμματος

$$\psi R(M) \underset{n_M \circ h_M}{\overset{m_M \circ h_M}{\rightrightarrows}} FV(M) \xrightarrow{q_M} \psi(M)$$

που είναι το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} \varphi\psi R(M) \arrow[r, shift left, "\varphi(m_M \circ h_M)"] \arrow[r, shift right, "\varphi(n_M \circ \beta_M)"'] & \varphi FV(M) \arrow[r, "\varphi(q_M)"] & \varphi\psi(M) \\ & GV(M) \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "\tau_M"] & M \arrow[u, "\delta_M"'] \end{tikzcd}$$

Πρόκειται για το ζεύγος πυρήνα $\varphi(m_M \circ h_M), \varphi(n_M \circ h_M)$ του τ_M. Επειδή τα ζεύγη πυρήνα διατηρούνται από τον V και ανακλώνται από τον U η σχέση $U = V \circ \varphi$ δίνει οτι το $(m_M \circ h_M, n_M \circ h_M)$ είναι ζεύγος πυρήνα στη $\mathcal{C}$, συνεπώς θα είναι το ζεύγος πυρήνα του συνεξισωτή τους q_M. Ο φ λόγω του οτι έχει αριστερά προσαρτημένο, διατηρεί ζεύγη πυρήνα. Συνεπώς το τελευταίο διάγραμμα είναι το ζεύγος πυρήνα του $\varphi(q_M)$. Ο $\varphi(q_M)$ τώρα είναι είναι ομαλός επιμορφισμός εφόσον ο q_M είναι ομαλός επιμορφισμός, ο U διατηρεί ομαλούς επιμορφισμούς ενώ ο V τους ανακλά και ισχύει $U = V \circ \varphi$. Συνεπώς ο $\varphi(q_M)$ θα είναι ο συνεξισωτής του ζεύγους πυρήνα του $\varphi(m_M \circ h_M), \varphi(n_M \circ h_M)$. Ο τ_M είναι επίσης συνεξισωτής του ίδιου ζεύγους οπότε λόγω μοναδικότητας οι τ_M και $\varphi(q_M)$ είναι υποχρεωτικά ισόμορφοι και ο δ_M είναι ισομορφισμός. Με το τελευταίο συμπέρασμα η απόδειξη του Θεωρήματος έχει ολοκληρωθεί.■

Βιβλιογραφία

[1] S. LANG, *Algebra*, Addison-Wesley Publising Company (1993).

[2] F. BORCEUX, *Handbook of Categorical Algebra Volume 1, Basic Category Theory*, Cambridge University Press (1994)

[3] F. BORCEUX, *Handbook of Categorical Algebra Volume 2, Categorical Algebra*, Cambridge University Press (1994)

[4] S. MAC LANE, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag (1971)

[5] M. MAKKAI, A. PITTS, Some results on locally finitely presentable categories, *Transactions AMS*, 299, 473–496 (1987)

[6] N. JACOBSON , *Basic Algebra II*, W. H. Freeman Company (1989)

[7] F. W. LAWVERE, *Functorial Semantics of Algebraic Theories*, Dissertation, Columbia University. N.Y. Summarized in Proc. Nat. Acad. Sci.(1963)

[8] G. WRAITH, *Algebraic Theories*, Lecture Notes Series 22, Mathematisk Institut, Aarhus Universitet (1975)