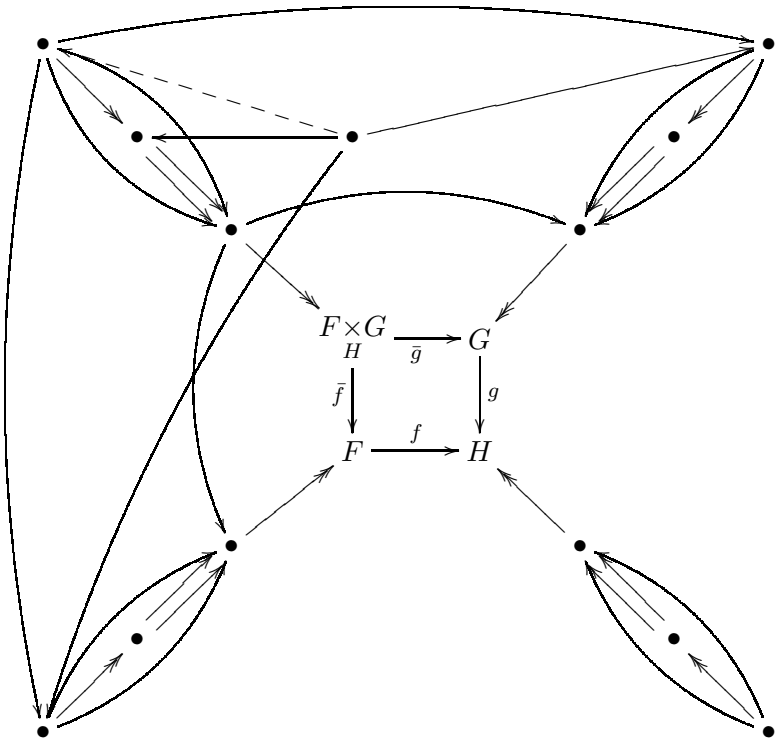
# ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΘΕΜΑ: ΠΛΗΡΩΣΗ ΩΣ ΠΡΟΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΑΚΡΙΒΕΙΑΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΣ ΦΟΙΤΗΤΗΣ**

**ΜΑΤΖΑΡΗΣ ΑΠΟΣΤΟΛΟΣ**




**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΠΑΝΑΓΗΣ ΚΑΡΑΖΕΡΗΣ**

ΠΑΤΡΑ 2004

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ


**1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ - ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ** **1**

*Εισαγωγή - Κατηγορίες* . . . . . 1

1.1 ΣΥΝΑΡΤΗΤΗΣ . . . . . 2

1.2 ΦΥΣΙΚΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ . . . . . 4

1.3 ΛΗΜΜΑ YONEDA . . . . . 6

1.4 ΜΟΝΟΜΟΡΦΙΣΜΟΣ . . . . . 8

1.5 ΕΠΙΜΟΡΦΙΣΜΟΣ . . . . . 8

1.6 ΟΡΙΑ - ΣΥΝΟΡΙΑ . . . . . 9

1.7 ΠΡΟΣΑΡΤΗΜΕΝΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΤΕΣ . . . . . 14

1.8 ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ GROTHENDIECK ΣΕ ΜΙΑ (ΜΙΚΡΗ) ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ . . . . . 16

1.9 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ Η ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΗΣ ΣΕ ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ . . . . . 17

**2 ΟΜΑΛΕΣ ΚΑΙ ΑΚΡΙΒΕΙΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ** **25**

*Ομαλές και Ακριβείς Κατηγορίες* . . . . . 25

2.1 ΟΜΑΛΟΣ ΕΠΙΜΟΡΦΙΣΜΟΣ . . . . . 25

2.2 ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ - ΣΧΕΣΕΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ . . . . . 27

2.3 ΟΜΑΛΗ ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ - ΑΚΡΙΒΗΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ . . . . . 30

**3 ΠΛΗΡΩΣΗ ΩΣ ΠΡΟΣ ΣΥΝΟΡΙΑ** **39**

*Πλήρωση Ως Προς Συνόρια* . . . . . 39

3.1 ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ ΚΑΝ . . . . . 39

3.2 ΠΛΗΡΩΣΗ ΩΣ ΠΡΟΣ ΣΥΝΟΡΙΑ . . . . . 41

3.3 ΕΠΙΠΕΔΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΤΗΣ . . . . . 45

3.4 ΕΝΝΟΙΕΣ ΕΠΙΠΕΔΟΤΗΤΑΣ ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΜΕ ΜΙΑ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ GROTHENDIECK 46

**4 ΠΛΗΡΩΣΗ ΩΣ ΠΡΟΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΑΚΡΙΒΕΙΑΣ** **49**

4.1 ΟΜΑΛΗ ΠΛΗΡΩΣΗ - ΑΚΡΙΒΗΣ ΠΛΗΡΩΣΗ . . . . . 49

**5 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ** **75**

**ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ** **82**

# Πρόλογος

Συχνά μεγάλα μέρη της μαθηματικής δραστηριότητας έχουν χαρακτήρα τυπικό/δομικό. Αυτό σημαίνει πως φαινομενικά διαφορετικές κατασκευές πάνω σε εννοιολογικά ασυσχέτιστες περιοχές μπορεί να έχουν κοινό δομικό χαρακτήρα, πως μια σειρά από μαθηματικά αποτελέσματα που διέπουν τέτοιες κατασκευές είναι κοινά. Ο κλάδος των Μαθηματικών που έχει καταφέρει καλλίτερα και με τη μεγαλύτερη γενικότητα να εκφράσει αυτά το κοινά δομικά στοιχεία διαφορετικών περιοχών είναι η Θεωρία των Κατηγοριών. Με μια τέτοια γενική κατασκευή, η οποία αρθρώνεται στη γλώσσα της Θεωρίας των Κατηγοριών, ασχολούμαστε στην παρούσα εργασία. Αν θέλαμε να πούμε πως η παρούσα εργασία απαντάει σε κάποιο ερώτημα,τότε το ερώτημα αυτό θα ήταν:

Τι κοινό έχουν μεταξύ τους το πέρασμα από τη συλλογή των ελεύθερων ομάδων στη συλλογή όλων των ομάδων με το πέρασμα από τη συλλογή των τοπολογικών χώρων στη συλλογή των τοπολογικών χώρων που είναι εφοδιασμένοι με μία σχέση ισοδυναμίας? Πολλά περισσότερα ερωτήματα αυτού του χαρακτήρα θα μπορούσαν να διατυπωθούν με λίγη παραπάνω προεργασία. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την άλγεβρα των μερικών αναδρομικών συναρτήσεων. Οι μερικές αναδρομικές συναρτήσεις είναι αριθμήσιμες το πλήθος και οι φυσικοί αριθμοί είναι εφοδιασμένοι με μια μερικώς ορισμένη πράξη εφαρμογής $n.m$ που σημαίνει ότι η υπ' αριθμό $n$ μερική αναδρομική συνάρτηση ορίζεται πάνω στον αριθμό $m$ και $n.m$ είναι το αποτέλεσμα αυτής της εφαρμογής. Ας θεωρήσουμε τη συλλογή των συνόλων που είναι εφοδιασμένα με μια συνάρτηση προς αυτό το ''μερικό μονοειδές''. Ας θεωρήσουμε επίσης ένα σύμπαν συνόλων όπου η αλήθεια μιας πρότασης συμπίπτει με τη λεγόμενη ''πραγματοποιησιμότητα κατά Kleene'', όπως αυτή νοείται στα κατασκευα στικά μαθηματικά. Τι κοινό έχει το πέρασμα από την προηγούμενη συλλογή σε αυτό το σύμπαν με τα περάσματα που περιγράψαμε νωρίτερα? Ακόμα πιο πέρα, τι κοινό έχει με τα παραπάνω το πέρασμα από την κατηγορία των αλυσωτών συμπλεγμάτων

$$...C_{n-1} \xrightarrow{\vartheta_{n-1}} C_n \xrightarrow{\vartheta_n} C_{n+1} \xrightarrow{\vartheta_{n+1}} ...$$

(όπου $C_n$ είναι διανυσματικοί χώροι και $\vartheta_{n+1} \circ \vartheta_n = 0$) και των ομοτοπικών κλάσεων απεικονίσεων ανάμεσά τους στην κατηγορία όπου λαμβάνει τιμές η καθολική συνομολογιακή θεωρία?

Στο τελευταίο παράδειγμα διατυπώνεται με πιό ρητό τρόπο το είδος του περάσματος που έχουμε υπ' όψη. Τα δύο είδη δομών που συσχετίζονται μεταξύ τους κάθε φορά οργανώνονται ως κατηγορίες και το πέρασμα στο οποίο αναφερόματσε είναι ένας συναρτητής που τις συσχετίζει. Σε όλες τις προαναφερθείσες περιπτώσεις οι κατηγορίες στις οποίες αναφερόμαστε αρχικά (ελεύθερες

ομάδες, σύνολα εφοδιασμένα με συνάρτηση προς το μερικό μονοειδές των φυσικών, κλπ.) μοιράζον ται ένα ελάχιστο κοινών κατηγορικών ιδιοτήτων. Το πέρασμα για το οποίο μιλάμε κάθε φορά μας πηγαίνει σε μία πολύ πιο πλούσια κατηγορία (κατηγορία αλγεβρών στην πρώτη περίπτωση, κατηγορία με εκθετικά αντικείμενα στη δεύτερη περίπτωση, τόπο στην τρίτη περίπτωση, αβελιανή κατηγορία στην τέταρτη περίπτωση). Αυτές οι πλουσιώτερες κατηγορίες με τη σειρά τους μοιράζον ται μια σειρά από κοινές κατηγορικές ιδιότητες. Το τι είναι κοινό σε τέτοιου είδους κατηγορίες (δηλαδή τι είναι κοινό στις αλγεβρικές κατηγορίες, τους τόπους και τος αβελιανές κατηγορίες) απασχόλησε τους ερευνητές στην περιοχή της θεωρίας κατηγοριών ήδη από την δεκαετία του 1960. Η απάντηση δίνεται από ένα μικρό σύνολο αξιωμάτων (πρωτοβάθμιων, στη γλώσσα της θεωρίας κατηγοριών) που περιγράφουν την έννοια της ακριβούς κατηγορίας κατά Barr. Πιο συγκεκριμμένα, ακριβής είναι μια κατηγορία η οποία έχει πεπερασμένα όρια (ισοδύναμα, πεπερασμένα γινόμενα και εξισωτές, δηλαδή την γενική κατηγορική εκδοχή του πυρήνα μίας γραμμικής απεικόνισης), συνεξισωτές σχέσεων ισοδυναμίας (δηλαδή την κατηγορική γενίκευση του πηλίκου προς μια ισοτι μία), οι επιμορφισμοί που προκύπτουν ως συνεξισωτές είναι ευσταθείς ως προς εφελκύσεις και κάθε επιμορφισμός που προκύπτει ως συνεξισωτής κάποιων μορφισμών είναι κατ' ανάγκη ο συνεξι σωτής του γενικευμένου πυρήνα του.

Ομως στις περιπτώσεις που αναφερθήκαμε κάτι περισσότερο συμβαίνει. Το πέρασμα κάθε φορά δεν αφορά απλώς σε έναν οποιοδήποτε συναρτητή από μια κατηγορία με λιγώτερες ιδιότητες σε μια ακριβή κατηγορία. Τα περάσματα που περιγράψαμε αποτελούν κάθε φορά, με μία κατάλληλη έννοια, τον καθολικό συναρτητή προς μια ακριβή κατηγορία. Μιλάμε, με άλλα λόγια, κάθε φορά για την πλήρωση μιας κατηγορίας, κατά καθολικό τρόπο, ως προς την ιδιότητα του να είναι ακριβής. Αυτήν τη διαδικασία πραγματεύεται η παρούσα εργασία.

Η μελέτη της αφηρημένης αυτής διαδικασίας έχει ένα παρελθόν περίπου δύο δεκαετιών. Η αρχική σύλληψή της οφείλεται στον A. Joyal και η πρώτη συστηματική καταγραφή της είναι η εργασία [CM]. Σε αυτήν την εκδοχή η διαδικασία της πλήρωσης εφαρμόζεται σε κατηγορίες που έχουν πεπερασμένα όρια και η καθολική ιδιότητα ισχύει αναφορικά με συναρτητές προς ακριβείς κατηγορίες που διατηρούν πεπερασμένα όρια. Εντονη ερευνητική δραστηριότητα προσελκύεται γύρω από αυτήν την κατασκευή μετά τη συνειδητοποίηση ότι κάποια παραδείγματα τόπων, οι οποίοι παίζουν σημαντικό ρόλο στη μαθηματική λογική και τη θεωρία των αναδρομικών συναρτήσεων, αποτελούν στιγμιότυπα αυτής της κατασκευής (ουσιαστικά το πέρασμα του τρίτου παραδείγματος, παραπάνω) [RR], [C]. Η μελέτη συναφών κατασκευών στη μαθηματική λογική θέτει το πρόβλημα της επέκτασης της διαδικασίας της πλήρωσης για κατηγορίες οι οποίες δεν έχουν πεπερασμένα όρια [VO], [P]. Το πρόβλημα αντιμετωπίζεται στις εργασίες [HT] και [CV], η παρουσίαση των αποτελεσμάτων των οποίων αποτελεί το κύριο θέμα αυτής της εργασίας. Στις εργασίες αυτές περιγράφεται η διαδικασία της πλήρωσης σε ακριβή κατηγορία μιας κατηγορίας με ασθενή πεπερασ μένα όρια. Η γενίκευση αυτή επιβάλεται για τη μελέτη και μίας σειράς άλλων περιπτώσεων, όπως οι συσχετίσεις που αναφέρονται στο πρώτο και το τέταρτο παράδειγμα, παραπάνω. Πράγματι, τόσο η κατηγορία των ελεύθερων αλγεβρικών δομών κάποιου τύπου, όσο και η κατηγορία των αλυσωτών συμπλεγμά
των και των κλάσεων ομοτοπίας απεικονίσεων μεταξύ τους (καθώς και της ομοτοπικής κατηγορίας των τοπολογικών χώρων) είναι παραδείγματα κατηγοριών με ασθενή πεπερασμένα όρια. Το

ερώτημα που ανακύπτει, τη απουσία πεπερασμένων ορίων, είναι αναφορικά με ποιού είδους συναρτητές έχει τώρα την καθολική ιδιότητα η πλήρωση. Η απάντηση είναι ότι η ακριβής πλήρωση μίας κατηγορίας με ασθενή πεπερασμένα όρια έχει την καθολική ιδιότητα μεταξύ των λεγόμενων επίπεδων (ή, αλλιώς, αριστερά καλύπτωντων) συναρτητών. Παρουσιάζουμε λοιπόν εδώ αυτό το αποτέλεσμα, ελπίζοντας ότι συνεισφέρουμε μια πληρέστερη και σχετικά νέα σκοπιά, σε τουλάχιστον δύο σημεία: Πρώτον, δίνουμε μια αναλυτική απόδειξη του καθοριστικού γεγονότος ότι η πλήρωση, όπως αυτή περιγράφεται στην εργασία [HT], έχει πεπερασμένα όρια. Η απόδειξη αυτού του βήματος στην εν λόγω εργασία είναι λανθασμένη. Αντίθετα, στην εργασία [CV] έχουμε μια, όχι ιδιαίτερα κατατοπιστική, σκιαγράφηση της κατασκευής των πεπερασμένων ορίων στην πλήρωση. Δεύτερον, για την απόδειξη της καθολικής ιδιότητας της πλήρωσης, ειδικά του γεγονότος ότι ο επαγόμενος συναρτητής από την πλήρωση προς όποια άλλη ακριβή κατηγορία διατηρεί πεπερασμένα όρια, βασιζόμαστε στην προσέγγιση της εργασίας [$K_2$]. Προσπαθούμε να αποφύγουμε δηλαδή την πολυσέλ
ιδη έκθεση της σχετικής απόδειξης στην εργασία [HT], η οποία επιβαρύνεται ούτως ή άλλως από το λάθος στην απόδειξη ύπαρξης πεπερασμένων ορίων. Αντίθετα προσπαθούμε να εκθέσουμε την πιό εννοιολογική προσέγγιση της [$K_2$], η οποία ανάγει την έννοια του αριστερά καλύπτοντος συναρτητή σε μία γενική έννοια που εκφράζεται συντακτικά στη γλώσσα των συναρτητών με πεδίο μια δεδομένη κατηγορία. Η προσέγγιση αυτή, αξιοποιώντας ένα γενικό αποτέλεσμα της εργασίας [AK], δίνει το ζητούμενο. Η παρενέργεια αυτής της προσέγγισης είναι ότι αναγκαζόμαστε να επιμηκύνουμε αρκετά το εισαγωγικό κεφάλαιο της παρούσας εργασίας προκειμένου να εισάγουμε τις σχετικές ιδέες περί διευρυμένων πρωτοβάθμιων γλωσσών που επιτρέπουν απειρομελείς διαζεύ ξεις και την ερμηνεία τους αναφορικά με μία κατηγορία που είναι εφοδιασμένη με μία τοπολογία Grothendieck.

Η παρούσα εργασία δομείται ως εξής: Στο πρώτο κεφάλαιο εκθέτουμε όλες τις απαραίτητες εισαγωγικές έννοιες, συμπεριλαμβανομένων αυτής της τοπολογίας Grothendieck και της ερμηνείας της γεωμετρικής λογικής σε μια κατηγορία εφοδισμένη με μια τέτοια τοπολογία. Στο δεύτερο κεφάλαιο εισάγουμε λεπτομερειακά την έννοια της ακριβούς και την ασθενέστερη σχετική της ομαλής κατηγορίας. Στην πορεία εξετάζουμε διεξοδικά τις απαραίτητες για τη διατύπωσή τους έννοιες επιμορφισμών και αποτελέσματα για τη συμπεριφορά τους. Στο τρίτο κεφάλαιο δίνουμε μια πρόγευση της έννοιας της πλήρωσης κατηγορίας, δίνοντας μια περιγραφή της πλήρωσης μίας κατηγορίας ως προς μικρά συνόρια και ως προς πεπερασμένα συνόρια. Με αφορμή αυτήν την περιγραφή παρουσιάζουμε και την έννοια της επέκτασης Kan καθώς και το θεμελιώδες αποτέλεσμα περί του πότε μια τέτοια διατηρεί πεπερασμένα όρια.

Στην πορεία εξετάζουμε διεξοδικά τις απαραίτητες για τη διατύπωσή τους έννοιες επιμορφισμών και αποτελέσματα για τη συμπεριφορά τους. Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε το κατ' εξοχήν θέμα της εργασίας, την ακριβή πλήρωση, την περιγραφή της και τις ιδιότητές της. προσπαθούμε να δώσουμε διεξοδικά όλες τις αποδείξεις, συμπληρώνοντας κενά που η υπάρχουσα βιβλιογραφία δεν πραγματεύεται. Το ζήτημα της απόδειξης της ύπαρξης πεπερασμένων ορίων στην ακριβή πλήρωση μας απασχολεί εδώ όμως η πλήρης αντιμετώπιση της απόδειξης θα μας οδηγούσε σε υπερβολική μεγέθυνση του κεφαλαίου. Ως εκ τούτου παραθέτουμε μια σειρά από τεχνικές λεπτομέρειες στο παράρτημα της παρούσας εργασίας.

Κλείνοντας αυτήν την εισαγωγή θα θέλαμε να επανέλθουμε στα αρχικά σχόλια. Εχοντας διατυπώσει τις σχετικές έννοιες, έχοντας δώσει τα τεχνικά αποτελέσματα που διέπουν αυτές και γνωρίζοντας ότι τα τέσσερα παραδείγματα των αρχικών γραμμών αυτής της εισαγωγής (καθώς και πάρα πολλά άλλα) εμπίπτουν σε αυτό το πλαίσιο, ας αναρωτηθούμε αν υπάρχουν οφέλη από αυτήν την προσέγγιση. Η απάντηση είναι ναι, τόσο στο τεχνικό - υπολογιστικό όσο και στο εννοιολογικό επίπεδο. Στο πρώτο επίπεδο, έχουμε ότι ο χαρακτηρισμός συγκεκριμμένων κατηγοριών ως πληρώσεων μας επιτρέπει να απαντήσουμε ευκολώτερα σε ένα αφηρημένο πλαίσιο πότε πληρούν περαιτέρω χαρακτηριστικά (π.χ, πότε η ακριβής πλήρωση είναι καρτεσιανά κλειστή κατηγορία ή τόπος, πότε οι συνομολογιακοί συναρτητές είναι κλειστοί ως προς διάφορες κατασκευές που μπορεί να ενδιαφέρουν?)

Στο εννοιολογικό επίπεδο, ο προσδιορισμός διαφόρων, φαινομενικά ασυσχέτιστων κατασκευών, όπως αυτές που αναφέρθηκαν παραπάνω, ως πληρώσεων κάποιων οικείων κατηγοριών, μας βοηθάει να κατανοήσουμε καλύτερα τη φύση κάποιων φαινομένων μελετώντας τα με όρους που είναι οικείοι από άλλα κομμάτια των μαθηματικών. Για παράδειγμα, το πέρασμα από την εντασιακή στην εκτασιακή σημασιολογία της κατασκευαστικής λογικής, ως στιγμιότυπο της ακριβούς πλήρωσης, μας δείχνει ότι η σχέση της λογικής συνέπειας είναι ένα είδος ‘‘ομοτοπικής ισοδυναμίας’’ ανάμεσα σε αποδείξεις [Law].

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

# ΕΙΣΑΓΩΓΗ - ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ

Στο πρώτο αυτό κεφάλαιο θα αναφερθούμε στις βασικές έννοιες της Θεωρίας Κατηγοριών. Θα ξεκινήσουμε δίνοντας πρώτα τον ορισμό της κατηγορίας.

**Ορισμός 1.1** *Μια κατηγορία $\mathcal{C}$ αποτελείται απο μία συλλογή αντικειμένων, την οποία συμβολίζουμε $\mathcal{C}_0$ και μία συλλογή απο μορφισμούς ανάμεσα στα αντικείμενα, τους οποίους απλά ονομάζουμε βέλη και την συμβολίζουμε $\mathcal{C}_1$ . Σε κάθε μορφισμό $f$ αντιστοιχίζονται δύο αντικείμενα, το πεδίο και το συν-πεδίο του $f$ που συμβολίζονται με $\partial_0 f$ και $\partial_1 f$ , αντίστοιχα. Γράφουμε επίσης, όταν $\partial_0 f = A$ και $\partial_1 f = B$, $f : A \longrightarrow B$ .*
*Πρέπει να ικανοποιούνται οι εξής συνθήκες:*

1. *Για κάθε αντικείμενο $A$ μιας κατηγορίας ορίζεται ο ταυτοτικός μορφισμός $id_A : A \longrightarrow A$*
2. *Για κάθε δύο μορφισμούς $f : A \longrightarrow B$ , $g : B \longrightarrow C$ , όπου το συν-πεδίο του ενός είναι το πεδίο του άλλου ορίζεται η σύνθεση τους $g \circ f : A \longrightarrow C$ .*
3. *Εστω $A$ , $B$ δύο αντικείμενα της κατηγορίας, και τα ταυτοτικά βέλη $id_A : A \longrightarrow A$ και $id_B : B \longrightarrow B$ τότε για κάθε μορφισμό $f : A \longrightarrow B$ ισχύει ο νόμος*

$$id_B \circ f = f \text{ και } f \circ id_A = f$$

4. *Ισχύει η προσεταιριστικότητα ως προς την σύνθεση, δηλ. για τους μορφισμούς $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C, h : C \longrightarrow D$ ισχύει ότι*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

*Παραδείγματα κατηγοριών μπορεί να είναι συλλογές μαθηματικών δομών και κατάλληλων μορφισμών μεταξύ τους αλλα και μαθηματικές δομές καθαυτές (π.χ μια ομάδα, ένας τόπος).*

**Ορισμός 1.2** *Μια κατηγορία ονομάζεται* **μικρή** *αν οι συλλογές των αντικειμένων και των μορφισμών είναι σύνολα και όχι κλάσεις.*

**Ορισμός 1.3** *Μια κατηγορία* $\mathcal{C}$ *ονομάζεται* **τοπικά μικρή** *αν για κάθε δύο αντικείμενα* $A$ , $B$ *η συλλογή* $\hom_{\mathcal{C}}(A,B) = \{f \mid f : A \longrightarrow B\}$ *είναι σύνολο.*

**Ορισμός 1.4** *Ενας μορφισμός* $f : A \longrightarrow B$ *σε μια κατηγορία* $\mathcal{C}$ *θα ονομάζεται ισομορφισμός, όταν υπάρχει μορφισμός* $g : B \longrightarrow A$ *της* $\mathcal{C}$*, ο οποίος ικανοποιεί τις σχέσεις:*

$$f \circ g = id_B \quad , \quad g \circ f = id_A$$

*Ο μορφισμός αυτός είναι μοναδικός τον αποκαλούμε αντίστροφο του* $f$ *και τον συμβολίζουμε* $f^{-1}$.

**Παρατηρήσεις:**

- Κάθε ταυτοτικός μορφισμός είναι ισομορφισμός.
- Η σύνθεση δύο ισομορφισμών είναι ισομορφισμός.

**Ορισμός 1.5** *Μια κατηγορία* $\mathcal{C}$ *θα λέγεται φιλτραρισμένη όταν:*

*(i) Υπάρχει* $C \in \mathcal{C}$ *(δηλ. είναι μη-κενή).*

*(ii) Για κάθε* $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ *υπάρχει* $C_3 \in \mathcal{C}$ *και μορφισμοί* $f : C_1 \longrightarrow C_3$ , $g : C_2 \longrightarrow C_3$ .

*(iii) Για κάθε* $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ *και για κάθε* $f, g : C_1 \rightrightarrows C_2$ *υπάρχει αντικείμενο* $C_3 \in \mathcal{C}$ *και μορφισμός* $h : C_2 \longrightarrow C_3$ *τέτοιος ώστε* $h \circ f = h \circ g$ .

## 1.1 ΣΥΝΑΡΤΗΤΗΣ

**Ορισμός 1.6** *Συναρτητής F απο μια κατηγορία* $\mathcal{C}$ *σε μια κατηγορία* $\mathcal{D}$ $(F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D})$ *είναι μια απεικόνιση που αντιστοιχίζει:*

- *Κάθε αντικείμενο της κατηγορίας* $\mathcal{C}$ *σε ένα αντικείμενο της κατηγορίας* $\mathcal{D}$ *(δηλ. αν* $C \in \mathcal{C}_0$ *τότε* $C \mapsto F(C)$ *, όπου* $F(C) \in \mathcal{D}_0$*)*
- *Κάθε μορφισμό της κατηγορίας* $\mathcal{C}$ *σε ένα μορφισμό της κατηγορίας* $\mathcal{D}$ *ως εξής: Εστω* $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_0$ *και* $f : C_1 \longrightarrow C_2$ *τότε* $F(f) : F(C_1) \longrightarrow F(C_2)$*, όπου* $F(C_1), F(C_2) \in \mathcal{D}_0$.

και που πληρεί τις εξής ιδιότητες:

1. $F(id_C) = id_{FC}$ , για κάθε $C \in \mathcal{C}_0$
2. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ , όποτε η σύνθεση $g \circ f$ ορίζεται στη $\mathcal{C}$ .

Ο πιο τετριμμένος συναρτητής που μπορεί να οριστεί είναι ο ταυτοτικός $id_{\mathcal{C}}$, για κάθε κατηγόρια $\mathcal{C}$ $(id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C})$. Απεικονίζει κάθε αντικείμενο στον εαυτό του, και κάθε μορφισμό f της κατηγορίας στον εαυτό του.

Ενας απο τους πιο σημαντικούς συναρτητές είναι ο hom-συναρτητής.
Εστω $\mathcal{C}$ μικρή κατηγορία. Για κάθε $C \in \mathcal{C}$, ορίζεται ο συναλλοίωτος συναρτητής:

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\hom_{\mathcal{C}}(C,-)} \mathrm{Set}$$

απεικονίζει κάθε αντικείμενο $C'$ στο $\hom_{\mathcal{C}}(C, C')$ που είναι το σύνολο των μορφισμών της $\mathcal{C}$ απο το $C$ στο $C'$ και κάθε μορφισμό:

$$\begin{array}{ccccc} C' & & \hom_{\mathcal{C}}(C,C') & \in & C \xrightarrow{x} C' \\ f\downarrow & \mapsto & \downarrow & & \downarrow \\ C'' & & \hom_{\mathcal{C}}(C,C'') & \in & C \xrightarrow{x} C' \xrightarrow{f} C'' \end{array}$$

Δοθείσης της κατηγορίας $\mathcal{C}$ μπορούμε να ορίσουμε την κατηγορία $\mathcal{C}^{op}$ , η οποία έχει τα ίδια αντικείμενα που έχει και η $\mathcal{C}$, διαφέρει μόνο ως προς την φορά των μορφισμών, δηλαδή $C' \longrightarrow C$ είναι ένας μορφισμός της $\mathcal{C}$ στην κατηγορία $\mathcal{C}^{op}$ γίνεται $C \longrightarrow C'$
Ο hom-συναρτητής σ'αυτήν την περίπτωση ορίζεται ως εξής:

$$\hom_{\mathcal{C}^{op}}(C, C') := \hom_{\mathcal{C}}(C', C)$$

Δηλ. για κάθε κατηγορία $\mathcal{C}$ ορίζεται ο ανταλλοίωτος συναρτητής

$$\mathcal{C}^{op} \xrightarrow{\hom_{\mathcal{C}}(-,C)} \mathrm{Set}$$

όπου για κάθε αντικείμενο $C' \in \mathcal{C}^{op}$ το $\hom_{\mathcal{C}}(C', C)$ είναι το σύνολο των μορφισμών $C' \longrightarrow C$ και για κάθε μορφισμό:

$$\begin{array}{ccccc} C' & C'' & \hom_{\mathcal{C}}(C',C) & \in & C' \xrightarrow{x} C \\ f^{op}\downarrow \in \mathcal{C}^{op} & f\downarrow \in \mathcal{C} & \downarrow & & \downarrow \\ C'' & C' & \hom_{\mathcal{C}}(C'',C) & \in & C'' \xrightarrow{f} C' \xrightarrow{x} C \end{array}$$

## 1.2 ΦΥΣΙΚΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ

Κατάλληλη έννοια απεικόνισης ανάμεσα σε συναρτητές είναι αυτή του **φυσικού μετασχηματισμού**.

**Ορισμός 1.7** *Εστω* $\mathcal{D},\mathcal{C}$ *κατηγορίες και F,G συναρτητές από την* $\mathcal{D}$ *στη* $\mathcal{C}$ $(\mathcal{D} \overset{F}{\underset{G}{\rightrightarrows}} \mathcal{C})$, *φυσικός μετασχηματισμός* $\varphi : F \dot{\longrightarrow} G$ *είναι μια συνάρτηση η οποία:*

- *Απεικονίζει κάθε αντικείμενο D της* $\mathcal{D}$ *στο μορφισμό* $\varphi(D) : F(D) \longrightarrow G(D)$, *τον συμβολίζουμε συνήθως* $\varphi_D$
- *Κάθε μορφισμός* $f : D \longrightarrow D'$ *της κατηγορίας* $\mathcal{D}$ *αντιμεταθέτει το εξής διάγραμμα:*

$$\begin{array}{ccc} D & F(D) & \xrightarrow{\varphi_D} G(D) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & {\scriptstyle F(f)}\downarrow & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ D' & F(D') & \xrightarrow{\varphi_{D'}} G(D') \end{array}$$

*δηλ.* $G(f) \circ \varphi_D = \varphi_{D'} \circ F(f)$

**Πρόταση 1.1** *Οι φυσικοί μετασχηματισμοί συντίθενται και η συλλογή* $Fun(\mathcal{D},\mathcal{C})$, *με αντικείμενα τους συναρτητές* $\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ *και μορφισμούς τους φυσικούς μετασχηματισμούς αποτελεί* **κατηγορία**

**Απόδειξη:** Εστω F , G , H συναρτητές από την $\mathcal{D}$ στη $\mathcal{C}$ και $\varphi$ , $\vartheta$ φυσικοί μετασχηματισμοί με $\varphi : F \dot{\longrightarrow} G$ και $\vartheta : G \dot{\longrightarrow} H$ .

- Θα δείξουμε πρώτα οτι η σύνθεση $\vartheta \circ \varphi : F \longrightarrow H$ είναι φυσικός μετασχηματισμός

  Για κάθε αντικείμενο D της $\mathcal{D}$ έχουμε:

$$(\vartheta\varphi)_D : F(D) \longrightarrow H(D)$$

  όμως

$$\vartheta_D : G(D) \longrightarrow H(D)$$
$$\varphi_D : F(D) \longrightarrow G(D)$$

  άρα:

$$(\vartheta\varphi)_D = \vartheta_D \circ \varphi_D$$

Για κάθε μορφισμό $f : D \longrightarrow D'$ έχουμε:

$$\begin{array}{ccccc} D & F(D) & \xrightarrow{\varphi_D} G(D) & \xrightarrow{\vartheta_D} & H(D) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & {\scriptstyle F(f)}\downarrow & (I) \quad \downarrow{\scriptstyle G(f)} & (II) & \downarrow{\scriptstyle H(f)} \\ D' & F(D') & \xrightarrow{\varphi_{D'}} G(D') & \xrightarrow{\vartheta_{D'}} & H(D') \end{array}$$

Θα δείξουμε ότι $(Hf) \circ (\vartheta\varphi)_D = (\vartheta\varphi)_{D'} \circ (Ff)$

Τα τετράγωνα I,II αντιμετατίθεται γιατί οι $\varphi, \vartheta$ είναι φυσικοί μετασχηματισμοί, άρα:

$$Gf \circ \varphi_D = \varphi_{D'} \circ Ff \quad (1)$$
$$Hf \circ \vartheta_D = \vartheta_{D'} \circ Gf \quad (2)$$

$Hf \circ (\vartheta\varphi)_D = (Hf \circ \vartheta_D) \circ \varphi_D = (Hf \circ \vartheta_D) \circ \varphi_D \overset{(2)}{=} (\vartheta_{D'} \circ Gf) \circ \varphi_D = \vartheta_{D'} \circ (Gf \circ \varphi_D) \overset{(1)}{=} \vartheta_{D'} \circ (\varphi_{D'} \circ Ff)(\vartheta_{D'} \circ \varphi_{D'}) \circ Ff = (\vartheta\varphi)_{D'} \circ Ff$
Αρα πράγματι η σύνθεση φυσικών μετασχηματισμών είναι φυσικός μετασχηματισμός.

- Για κάθε αντικείμενο $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$, υπάρχει ο ταυτοτικός μορφισμός που είναι ο εξής:

$$id_F : F \dot{\longrightarrow} F.$$

όπου για κάθε $C \in \mathcal{D}$ $(id_F)_C = id_{FC} : F(C) \longrightarrow F(C)$ και ισχύουν οι ισότητες:

$$id_G \circ \varphi = \varphi$$
$$\varphi \circ id_F = \varphi$$

■

Χαρακτηρηστικό παράδειγμα τέτοιας κατηγορίας είναι η κατηγορία $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ η οποία έχει αντικείμενα συναρτητές (ανταλλοίωτους) της μορφής $P : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathrm{Set}$ και μορφισμούς φυσικούς μετασχηματισμούς αναμεσά τους. Την κατηγορία αυτή την ονομάζουμε **κατηγορία των προδραγμάτων (preasheaf)**.

**Ορισμός 1.8 (Φυσικός Ισομορφισμός)**
*Ενας φυσικός μετασχηματισμός είναι φυσικός ισομορφισμός αν οι συνιστώσες του $\varphi$ ( $\varphi_D, \varphi_{D'}$ ) στον Ορισμό 1.6 είναι οχι απλα μορφισμοί αλλα ισομορφισμοί.*

## 1.3 ΛΗΜΜΑ YONEDA

Το Λήμμα του Yoneda είναι ένα απο τα πιο βασικά εργαλεία της Θεωρίας Κατηγοριών, θα αναφερθούμε σ'αυτό αφού πρώτα ορίσουμε τις έννοιες, του **Αναπαραστάσιμου Συναρτητή** και της **Εμφύτευσης Yoneda**

**Ορισμός 1.9** *Ενας συναρτητής F από μια κατηγορία $\mathcal{C}$ στην κατηγορία των συνόλων* Set *(δηλ. $F : \mathcal{C} \longrightarrow$ Set), ονομάζεται αναπαραστάσιμος αν είναι φυσικά ισόμορφος με ένα hom-συναρτητή, όπως τον έχουμε ορίσει στην Ενότητα 1.1. Πιο συγκεκριμένα, ένας συναλλοίωτος συναρτητής είναι αναπαραστάσιμος αν είναι φυσικά ισόμορφος με τον hom-συναρτητή $\hom_{\mathcal{C}}(C, -)$, όπου C αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{C}$, και λέμε οτι ο C αναπαριστά τον συναρτητή. Αντίστοιχα, ένας ανταλλοίωτος συναρτητής είναι αναπαραστάσιμος με τον hom-συναρτητή $\hom_{\mathcal{C}}(-, C)$, όπου C αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{C}$, όπως και πριν λέμε οτι ο C αναπαριστά τον ανταλλοίωτο τώρα συναρτητή.*

**Ορισμός 1.10 (Εμφύτευση Yoneda)**
*Εστω $\mathcal{C}$ κατηγορία, ορίζουμε συναρτητή*

$$y : \mathcal{C} \longrightarrow [\mathcal{C}^{op}, \text{Set}]$$

*ως εξής:*

- *Κάθε αντικείμενο C της $\mathcal{C}$ απεικονίζεται στο*

$$y(C) = \hom_{\mathcal{C}}(-, C)$$

- *Κάθε μορφισμός $f : C \longrightarrow C'$ της $\mathcal{C}$ απεικονίζεται στο*

$$y(f) = f \circ - : \hom_{\mathcal{C}}(-, C) \longrightarrow \hom_{\mathcal{C}}(-, C')$$

*Θα αποδείξουμε οτι η απεικόνιση αυτή είναι φυσικός μετασχηματισμός.*

**Απόδειξη:** *Αν $\hom_{\mathcal{C}}(-, X), \hom_{\mathcal{C}}(-, Y) : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow$ Set δύο αντικείμενα της κατηγορίας, $[\mathcal{C}^{op}, \text{Set}]$ τότε ορίζουμε τον* **φυσικό μετασχηματισμό** *:*

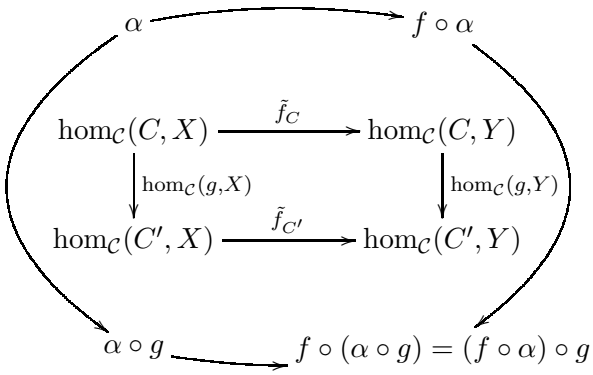
$$\tilde{f} : \hom_{\mathcal{C}}(-, X) \Rightarrow \hom_{\mathcal{C}}(-, Y)$$

*όπου,* $f : X \longrightarrow Y$ *ως εξής:*

$$\begin{array}{rccc} \tilde{f}_C : & \hom_{\mathcal{C}}(C,X) & \longrightarrow & \hom_{\mathcal{C}}(C,Y) \\ & C & & C \\ & {\scriptstyle\alpha}\downarrow & \mapsto & \downarrow{\scriptstyle f\circ\alpha} \\ & X & & Y \end{array}$$

*η C-συντεταγμένη του, τότε:*

*Θα δείξουμε ότι ο* $\tilde{f}$ *είναι πράγματι φυσικός μετασχηματισμός:*




*Το τετράγωνο αντιμετατίθεται, άρα πράγματι ο* $\tilde{f}$ *είναι φυσικός μετασχηματισμός.* ■

**Πρόταση 1.2** *Ο συναρτητής y είναι* **πλήρης** *και* **πιστός**, *δηλ.*

- *πλήρης: Κάθε μορφισμός* $y(C) \longrightarrow y(C')$ *είναι* $y(f)$ *για κάποιο* $f : C \longrightarrow C'$
- *πιστός: αν* $y(f) = y(g)$ *τότε f=g*

Η παραπάνω πρόταση προκύπτει ως πόρισμα του παρακάτω γενικότερου θεωρήματος.

**Θεώρημα 1.1 (Λήμμα Yoneda)**
*Εστω* $F \in [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$, *τότε για κάθε* $C \in \mathcal{C}_0$, *υπάρχει 1-1 αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των φυσικών μετασχηματισμών* $(\hom_{\mathcal{C}}(-,C), F)$ *και του* $FC$

**Απόδειξη:** Θα σκιαγραφήσουμε την απόδειξη. Η αντιστοιχία στέλνει τον φυσικό μετασχηματισμό $\varphi : \hom_{\mathcal{C}}(-, C) \longrightarrow F$ στο $\varphi_C(id_C) \in F(C)$ και αντίστροφα το $x \in F(C)$ στο μετασχηματισμό $\varphi_x = (\varphi_{x,D} : \hom(D, C) \longrightarrow F(D))_{\mathcal{D}}$, όπου $\varphi_{x,D}(f) = (Ff)(x) \in F(D)$, ο οποίος αποδεικνύεται οτι είναι φυσικός. ■

## 1.4 ΜΟΝΟΜΟΡΦΙΣΜΟΣ

**Ορισμός 1.11** *Εστω μορφισμός $f : X \longrightarrow Y$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$, θα λέμε ότι ο $f$ είναι* **μονομορφισμός** *αν οποτεδήποτε έχουμε:*

$$T \underset{t_2}{\overset{t_1}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{f} Y \text{ , με } \; f \circ t_1 = f \circ t_2$$

*τότε* $t_1 = t_2$

**Παρατηρήσεις:**

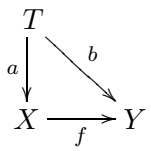
- Η σύνθεση μονομορφισμών είναι μονομορφισμός
- Αν η σύνθεση δύο μορφισμών $g \circ f$ είναι μονομορφισμός τότε και ο f είναι μονομορφισμός
- Μια συνάρτηση είναι 1-1 αν και μόνο αν είναι μονομορφισμός στην κατηγορία $\mathrm{Set}$.

## 1.5 ΕΠΙΜΟΡΦΙΣΜΟΣ

Πριν ορίσουμε την έννοια του επιμορφισμού, θα δούμε πρώτα πότε μια απεικόνιση είναι επί.

**Ορισμός 1.12** *Εστω μορφισμός $f : X \longrightarrow Y$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$, θα είναι "επί" αν οποτεδήποτε έχουμε απεικόνιση $b : T \longrightarrow Y$, τότε υπάρχει απεικόνιση $a : T \longrightarrow X$ τέτοια ώστε*

$$f \circ a = b$$



**Ορισμός 1.13** *Η απεικόνιση* $f : X \longrightarrow Y$ *είναι* **επιμορφισμός** *αν οποτεδήποτε έχουμε:*

$$X \xrightarrow{f} Y \underset{b}{\overset{a}{\rightrightarrows}} T \ \ \mu\varepsilon \ \ a \circ f = b \circ f$$

*έπεται ότι* $a = b$

**Παρατηρήσεις:**

- Αν η $f$ είναι "επί" τότε η f έχει δεξιά αντίστροφο.
- Αν η $f$ έχει δεξιά αντίστροφο τότε είναι επιμορφισμός.
- Αν η $f$ είναι "επί" τοτε είναι και επιμορφισμός.
- Αν μια απεικόνιση είναι επιμορφισμός δεν σημαίνει οτι θα είναι "επί". Σε ορισμένες μόνο κατηγορίες ισχύει όπως π.χ στην κατηγορία των συνόλων (Set).
- Γενικά ισχύει ότι:
  1. Η σύνθεση επιμορφισμών είναι επιμορφισμός.
  2. Αν η σύνθεση δύο απεικονίσεων $f \circ g$ είναι επιμορφισμός τότε και η f είναι επιμορφισμός.

## 1.6 ΟΡΙΑ - ΣΥΝΟΡΙΑ

### Γινόμενο

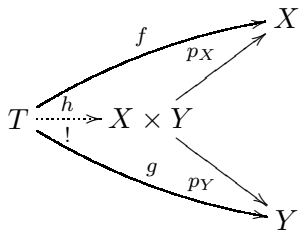
**Ορισμός 1.14** *Εστω X,Y δύο αντικείμενα της κατηγορίας C, το γίνομενο τους είναι ένα νέο αντικείμενο* $Z := X \times Y$ *που έχει τις εξής ιδιότητες:*

1. *Υπάρχει ένα ζεύγος μορφισμών* $p_X : Z \longrightarrow X$ , $p_Y : Z \longrightarrow Y$
2. *Για κάθε άλλο αντικείμενο ,T, της κατηγορίας για το οποίο υπάρχουν μορφισμοί* $f : T \longrightarrow X$ *και* $g : T \longrightarrow Y$ *, υπάρχει μοναδικός μορφισμός*

$$h : T \longrightarrow X \times Y$$

*έτσι ώστε:*

$$f = p_X \circ h$$
$$g = p_Y \circ h$$




Το γινόμενο δύο αντικειμένων, εφόσον υπάρχει, είναι "μοναδικό μέχρις ισομορφισμού", δηλ. αν $Z = X \times Y$, το γινόμενο των X και Y, για οποιοδήποτε άλλο $Z'$ το οποίο ικανοποιεί τις δύο ιδιότητες ισχύει ότι $Z' \cong Z$.

### Τελικό-Αρχικό αντικείμενο

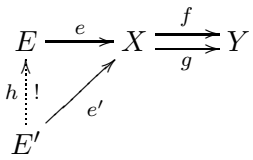
**Ορισμός 1.15** *Ενα αντικείμενο μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$, το οποίο συνήθως το συμβολίζουμε $\mathbf{1}$, ονομάζεται τελικό αντικείμενο της κατηγορίας αν για κάθε αντικείμενο $C$ της $\mathcal{C}$ υπάρχει μοναδικός μορφισμός $C \xrightarrow{!} \mathbf{1}$.*

*Δυικά, ένα αντικείμενο μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$ θα ονομάζεται αρχικό, το συμβολίζουμε με $\mathbf{0}$, αν για κάθε αντικείμενο $C$ της $\mathcal{C}$ υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\mathbf{0} \xrightarrow{!} \mathbf{C}$.*

### Εξισωτής

**Ορισμός 1.16** *Ενα αντικείμενο E με μια απεικόνιση $e : E \longrightarrow X$ είναι εξισωτής ενός ζεύγους μορφισμών $f, g : X \longrightarrow Y$, αν:*

1. $f \circ e = g \circ e$
2. *Για οποιαδήποτε άλλη απεικόνιση $e' : E' \longrightarrow X$, με την ιδιότητα $f \circ e' = g \circ e'$, θα υπάρχει μοναδικός μορφισμός $h : E' \longrightarrow E$ τέτοιος ώστε $e \circ h = e'$*




Οπως και στο γινόμενο δύο αντικειμένων έτσι και εδώ αποδεικνύεται ότι ένα αντικείμενο με τις ιδιότητες αυτές, εφόσον υπάρχει, είναι μοναδικά προσδιορισμένο μέχρι ισομορφισμού.

**Παρατηρήσεις:**

- Στην κατηγορία των συνόλων (Set), ο εξισωτής των f και g είναι το σύνολο

$$E = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

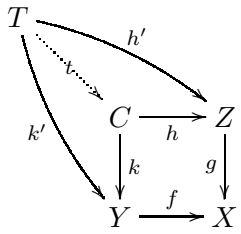
- Σε μια οποιαδήποτε κατηγορία, αν $e : E \longrightarrow X$ είναι εξισωτής έστω του διαγράμματος $X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$, τότε είναι μονομορφισμός.

## Εφέλκυση (Pullback)

**Ορισμός 1.17** *Εφέλκυση ενός μορφισμού $g : Z \longrightarrow X$ κατα μήκος ενός μορφιμού $f : Y \longrightarrow X$ ονομάζουμε, ένα αντικείμενο C μαζί με δύο μορφισμούς $h : C \longrightarrow Z, k : C \longrightarrow Y$ με $g \circ h = f \circ k$, που έχει την ιδιότητα, για κάθε άλλο αντικείμενο T και μορφισμούς $h' : T \longrightarrow Z$, $k' : T \longrightarrow Y$ με $g \circ h' = f \circ k'$, να υπάρχει μοναδικός μορφισμός $t : T \overset{!}{\longrightarrow} C$, ως προς τις ιδιότητες:*

$$h' = h \circ t$$
$$k' = k \circ t$$

*Το αντικείμενο C το συμβολίζουμε $C := Y \underset{\times}{\times} Z$.*




**Παρατηρήση:**

- Η εφέλκυση ενός βέλους $f$ κατα μήκος του εαυτού του ονομάζεται ζεύγος πυρήνα του βέλους $f$ και συμβολίζεται $ker(f)$.
- Αν μια κατηγορία έχει γινόμενα και εξισωτές τότε έχει και εφελκύσεις.

Αν ερμηνεύσουμε τις παραπάνω έννοιες του γινομένου δύο αντικειμένων, του εξισωτή και της εφέλκυσης στην δυϊκή κατηγορία της $\mathcal{C}$ $(\mathcal{C}^{op})$ έχουμε τους ορισμούς του συν-γινομένου,συν-εξισωτή και της εξώθησης (pushout), αντίστοιχα.

Ολα όσα έχουμε αναφέρει μέχρι εδώ είναι ειδικές περιπτώσεις ορίων και συν-ορίων σε μια κατηγορία. Θα αναφερθούμε τώρα στις γενικές έννοιες του ορίου και του συν-ορίου.

Εστω $\mathbb{I}$ μια μικρή κατηγορία, **διάγραμμα** τύπου $\mathbb{I}$ μέσα στη $\mathcal{C}$ λέμε ένα συναρτητή

$$D : \mathbb{I} \longrightarrow \mathcal{C}$$

**Ορισμός 1.18 Κώνος**, *για ένα διάγραμμα D τύπου* $\mathbb{I}$, *μέσα στη* $\mathcal{C}$ *είναι:*

- *Ενα αντικείμενο* $C$ *και*
- *Ενας φυσικός μετασχηματισμός* $\lambda : \sigma_C \Rightarrow D$, *όπου* $\sigma_C$ *είναι συναρτητής απο την* $\mathbb{I}$ *στη* $\mathcal{C}$, *ο οποίος αντιστοιχεί όλα τα αντικείμενα της* $\mathbb{I}$ *στο αντικείμενο C και όλους τους μορφισμούς της* $\mathbb{I}$ *στον ταυτοτικό μορφισμό* $id_C : C \longrightarrow C$ *και D ο συναρτητής που αντιστοιχεί κάθε αντικείμενο i της* $\mathbb{I}$ *σε ένα στοιχείο D(i) της* $\mathcal{C}$ *και κάθε μορφισμό* $\alpha : i \longrightarrow j$ *στο μορφισμό* $D(\alpha) : D(i) \longrightarrow D(j)$.

*Αναλύωντας τα παραπάνω βρίσκουμε οτι ένας κώνος για το* $D$ *συνίσταται σε:*
*Μορφισμούς της μορφής* $\lambda_i : C \longrightarrow D(i)$, *έτσι ώστε για κάθε βέλος* $D(\alpha) : D(i) \longrightarrow D(j)$ *και μορφισμούς* $\lambda_i : C \longrightarrow D(i)$, $\lambda_j : C \longrightarrow D(j)$ *να ισχύει:*

$$\lambda_j = D(\alpha) \circ \lambda(i)$$

*Τον κώνο τον συμβολίζουμε και* $(C, \lambda)$.

**Ορισμός 1.19 Οριο** *ενός διαγράμματος D τύπου* $\mathbb{I}$ *στην κατηγορία* $\mathcal{C}$, *είναι ένας κώνος* $(C, \lambda)$ *με την ιδιότητα ότι, για κάθε άλλο κώνο* $(C', \mu)$ *υπάρχει μοναδικός μορφισμός* $f : C' \stackrel{!}{\longrightarrow} C$ *ώστε για κάθε αντικείμενο i της* $\mathbb{I}$ *να ισχύει:*

$$\lambda_i \circ f = \mu_i$$

Οπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, το όριο εφόσον υπάρχει, είναι μοναδικό μέχρις ισομορφισμού.
Επίσης αν ερμηνεύσουμε το όριο στην $\mathcal{C}^{op}$ παίρνουμε τον ορισμό του συν-ορίου.
Τα γινόμενα, οι εξισωτές, οι εφελκύσεις είναι ειδικές περιπτώσεις ορίων και αντίστοιχα, τα συν-γινόμενα, οι συνεξισωτές, οι απωθήσεις (pushout), ειδικές περιπτώσεις συν-ορίων.

**Παρατηρήσεις:**

- Μια κατηγορία έχει όλα τα (πεπερασμένα) όρια αν και μόνο αν έχει (αντίστοιχα πεπερασμένα) γινόμενα και εξισωτές.
- Μια κατηγορία έχει όλα τα (πεπερασμένα) συν-όρια αν και μόνο αν έχει (αντίστοιχα πεπερασμένα) συν-γινόμενα και συν-εξισωτές.

**Ορισμός 1.20** *Λέμε οτι η κατηγορία* $\mathcal{C}$ *είναι πλήρης (αντ. συν-πλήρης) αν έχει όρια (αντ. συν-όρια) για όλα τα διαγράμματα* $D : \mathbb{I} \longrightarrow \mathcal{C}$, *όπου* $\mathbb{I}$ *μικρή κατηγορία.*
*Λέμε οτι είναι πεπερασμένα πλήρης (αντ. πεπερασμένα συν-πλήρης) αν έχει όρια (αντ. συν-όρια) για όλα τα πεπερασμένα διαγράμματα.*

**Ορισμός 1.21** *Λέγοντας "φιλτραρισμένο συνόριο" εννοούμε το συνόριο ενός συναρτητή που ορίζεται σε μια φιλτραρισμένη κατηγορία, όπως την έχουμε ορίσει στην παράγραφο 1.0.*
*Μια κατηγορία* $\mathcal{D}$ *θα λέμε οτι έχει φιλτραρισμένα συνόρια, όταν για κάθε μικρή φιλτραρισμένη κατηγορία* $\mathcal{C}$ *και για κάθε συναρτητή* $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *υπάρχει το συνόριο μέσω του* $F$.

**Πρόταση 1.3** *Κάθε αντικείμενο της κατηγορίας* $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$, *δηλ. κάθε συναρτητής* $F : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathrm{Set}$, *είναι φυσικά ισόμορφος μ'ένα συνόριο ενός διαγράμματος αναπαραστάσιμων αντικειμένων.*

Η πρόταση αυτή αναφέρει οτι, έχοντας ένα συναρτητή $F : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathrm{Set}$, μπορούμε να κατασκευάσουμε με κανονικό τρόπο μια ''μικρή'' δείκτρια κατηγορία $\mathbb{J}$ και ένα διάγραμμα $A : \mathbb{J} \longrightarrow \mathcal{C}$ στην $\mathcal{C}$ τύπου $\mathbb{J}$, έτσι ώστε ο $F$ να είναι ισόμορφος με το συνόριο $\mathrm{colim}(\mathbb{J} \xrightarrow{A} \mathcal{C} \xrightarrow{y} [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}])$.
Η δείκτρια κατηγορία $\mathbb{J}$ ονομάζεται κατηγορία των στοιχείων του $F$ και την συμβολίζουμε $el(F) = y \downarrow F$.
Εχει αντικείμενα της μορφής $x : y(m) \longrightarrow F$ και μορφισμούς τα αντιμεταθετικά τρίγωνα

$$\begin{array}{ccc} y(m) & \xrightarrow{\;y(\alpha)\;} & y(n) \\ & {\scriptstyle x}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \psi} & \\ & F & \end{array}$$

όπου $\alpha : m \longrightarrow n$.
Με άλλα λόγια, έχει αντικείμενα ζεύγη της μορφής $(m, x)$ και μορφισμούς $(m, x) \longrightarrow (n, \psi)$ έτσι ώστε $F_\alpha(\psi) = x$.
Οπότε έχουμε ότι: $F \cong \mathrm{colim}(y \downarrow F \xrightarrow{\pi} \mathcal{C} \xrightarrow{y} [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}])$.

## 1.7 ΠΡΟΣΑΡΤΗΜΕΝΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΤΕΣ

**Ορισμός 1.22** *Εστω $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ και F,G ένα ζεύγος συναρτητών ανάμεσα στις δύο κατηγορίες*

$$\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\leftrightarrows}} \mathcal{D}$$

*Λέμε οτι ο $F$ είναι* **αριστερά προσαρτημένος** *στον $G$, (ισοδύναμα ο $G$ είναι* **δεξιά προσαρτημένος** *στον $F$) και το συμβολίζουμε $F \dashv G$, αν υπάρχει μια φυσική αντιστοιχία μορφισμών*
$\forall\, C \in \mathcal{C}_0 \quad , \quad \forall\, D \in \mathcal{D}_0$

$$\frac{FD \longrightarrow C}{D \longrightarrow GC}$$

*δηλ.* $\mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(FD, C) \cong \mathrm{hom}_{\mathcal{D}}(D, GC)$

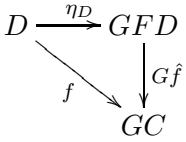
Για την ακρίβεια, οι $F, G$ είναι προσαρτημένοι συναρτητές (ή συζυγείς) αν υπάρχει φυσικός ισομορφισμός $\varphi$ ανάμεσα στους συναρτητές:

$$\mathcal{D}^{op} \times \mathcal{C} \underset{\mathrm{hom}_{\mathcal{D}}(-, G(-))}{\overset{\mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(F(-), -)}{\rightrightarrows}} \mathrm{Set}$$

Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

1. $F \dashv G$

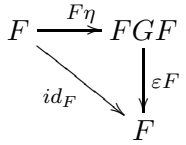
2. Υπάρχει φυσικός μετασχηματισμός $\eta : id_{\mathcal{D}} \Rightarrow G \circ F$, έτσι ώστε για κάθε $D \in \mathcal{D}_0$, $C \in \mathcal{C}_0$ και $f : D \longrightarrow GC$, να υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\hat{f} : FD \longrightarrow C$ τέτοιος ώστε να αντιμετατίθεται το τρίγωνο:



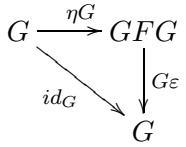

3. Υπάρχουν φυσικοί μετασχηματισμοί:

$$\eta : id_{\mathcal{D}} \Rightarrow G \circ F \ , \ \varepsilon : FG \Rightarrow id_{\mathcal{C}}$$

τέτοιοι ώστε να ικανοποιούνται οι ισότητες:
$\varepsilon F \circ F\eta = id_F$




και
$G\varepsilon \circ \eta G = id_G$




**Πρόταση 1.4** *Οι προσαρτημένοι συναρτητές είναι μοναδικοί μέχρις φυσικού ισομορφισμού*

**Παρατηρήσεις:**

- Οι δεξιά προσαρτημένοι συναρτητές διατηρούν **όρια**
- Οι αριστερά προσαρτημένοι συναρτητές διατηρούν **συν-όρια**

## 1.8 ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ GROTHENDIECK ΣΕ ΜΙΑ (ΜΙΚΡΗ) ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ

**Ορισμός 1.23** *Εστω $\mathcal{E}$ μικρή κατηγορία με εφελκύσεις, θα λέμε οτι είναι εφοδιασμένη με μια τοπολογία Grothendieck την οποία την συμβολίζουμε με j, αν για κάθε $B \in \mathcal{E}$ υπάρχει μια οικογένεια καλυμμάτων του $B$ ($Cov(B)$) που αποτελείται απο οικογένειες βέλων $\{\xi_i : X_i \longrightarrow B \mid i \in I\}$ με κοινό συν-πεδίο το $B$ οι οποίες ικανοποιούν τις εξής συνθήκες:*

1. *Αν $f : A \longrightarrow B$ τυχαίο βέλος τότε για κάθε $i \in I$,*

$$\begin{array}{ccc} A \underset{B}{\times} X_i & \longrightarrow & X_i \\ {\scriptstyle f^*(\xi_i)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \xi_i} \\ A & \xrightarrow[f]{} & B \end{array}$$

   *είναι η εφέλκυση του $\xi_i$ κατα μήκος του $f$ τότε $\{f^*(\xi_i) \mid i \in I\}$ είναι ένα κάλυμμα του $A$. Δηλαδή, οι καλύπτουσες οικογένειες είναι σταθερές ως προς εφελκύσεις.*

2. *Αν για κάθε $i \in I$ η οικογένεια βελών $\{\eta_{ij} : Y_j \longrightarrow X_i \mid j \in J_i\}$, είναι ένα κάλυμμα του $X_i$ τότε η οικογένεια $\{Y_{ij} \xrightarrow{\eta_{ij}} X_i \xrightarrow{\xi_i} B \mid i \in I, j \in J_i\}$ είναι ένα κάλυμμα του $B$. Δηλαδή, οι καλύπτουσες οικογένειες είναι σταθερές ως προς την σύνθεση.*

3. *Η οικογένεια που αποτελείται απο το ταυτοτικό βέλος $\{id_B : B \longrightarrow B\}$, είναι ένα κάλυμμα του $B$.*

**Παραδείγματα:**

1) Οταν $\mathcal{C} = O(X)$, όπου $X$ ένας τοπολογικός χώρος η συνηθισμένη έννοια του καλύμματος δίνει μια τοπολογία Grothendieck:
Ορίζουμε $\{U_i \longrightarrow U \mid i \in I\} \in Cov(U)$ αν $\bigcup_{i\in I} U_i = U$. Πληρούνται πράγματι οι 1,2,3 γιατί, $\bigcup\{u\} = U$, αν $\bigcup_{i\in I} U_i = U$ και $\bigcup_{j\in J} U_{i,j} = U_i$ τότε $\bigcup_{i,j} U_{i,j} = U$. Τέλος αν, $\bigcup_{i\in I} U_i = U$ και $V \subseteq U$, έχουμε $V = U \cap V = \bigcup_{i\in I} U_i \cup V = \bigcup_{i\in I}(U_i \cup V)$, δηλ. $\{U_i \underset{U}{\times} V \mid i \in I\} \in Cov(V)$. Θυμίζουμε οτι

στην $O(X)$ η $U_i \underset{U}{\times} V = U \cup V$.

2) Οταν η $\mathcal{C}$ είναι ομαλή κατηγορία (με την έννοια που δίνουμε στο Κεφάλαιο 2) ορίζεται μια τοπολογία Grothendieck την οποία συμβολίζουμε $j_{reg}$, με καλύπτουσες οικογένειες μονοσύνολα $\{\varepsilon : D \longrightarrow C\}$, όπου $\varepsilon$ ομαλός επιμορφισμός.

## 1.9 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ Η ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΗΣ ΣΕ ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ

Θεωρούμε μια γλώσσα $\mathcal{L}$ η οποία περιλαμβάνει:

- Ενα σύνολο απο είδη μεταβλητών $X_i$ και για κάθε είδος μεταβλητής ένα αριθμήσιμο σύνολο μεταβλητών αυτού του είδους $x_i$.
  Γράφουμε $x_i : X$ για να δηλώσουμε οτι η μεταβλητή $x_i$ είναι είδους $X$.

- Ενα είδος σταθερών $c_i$, καθεμία είναι συσχετισμένη μ'ένα είδος μεταβλητής $X_i$. Γράφουμε $c_i : X_i$.

- Ενα σύνολο συναρτησιακών συμβόλων $f$ που εφαρμόζονται σ'ένα πεπερασμένο πλήθος μεταβλητών, τύπων $X_{i_1}, \ldots, X_{i_n}$ και παράγουν ένα αποτέλεσμα τύπου $X_j$. Γράφουμε $f : X_{i_1}, \ldots, X_{i_n}; X_j$.

- Ενα σύνολο σχεσιακών συμβόλων $R$ που συσχετίζουν μεταβλητές των ειδών $X_{i_1}, \ldots, X_{i_m}$. Γράφουμε $R : X_{i_1}, \ldots, X_{i_m}$.

- Λογικούς συνδέσμους $\wedge$, $\bigvee$.

- Τον υπαρξιακό ποσοδείκτη $\exists$.

Στη γλώσσα $\mathcal{L}$ ορίζονται οι όροι ως εξής:

- Οι μεταβλητές $x : X$ είναι όροι.

- Οι σταθερές $c : X$ είναι όροι.

- Αν $t_1 : X_{i_1}, \ldots, t_n : X_{i_1}$ είναι όροι και $f : X_{i_1}, \ldots, X_{i_n}; X_j$ τότε $f(t_1, \ldots, t_n) : X_j$ είναι όρος.

Στη γλώσσα $\mathcal{L}$ ατομικός τύπος είναι μια έκφραση $t_1 = t_2$ ή $R(t_1, \ldots, t_m)$, όπου $R : X_{i_1}, \ldots, X_{i_m}$ σχεσιακό σύμβολο και $t_{i_k} : X_{i_k}$ είναι όροι.

Μια γεωμετρική θεωρία στη γλώσσα $\mathcal{L}$ είναι ένα σύνολο προτάσεων της μορφής:

$$\forall x_1 : X_1, \ldots, \forall x_n : X_n \, (\varphi(x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow \bigvee_{k \in K} \exists y_{k,1} \ldots \exists y_{k,m} \, \psi_k(x_1, \ldots, x_n, y_{k,1}, \ldots, y_{k,m}))$$

όπου $\varphi$ και $\psi_k$ είναι συζεύξεις ατομικών τύπων. Εδώ θα πρέπει να σημειώσουμε οτι το σύνολο των ατομικών τύπων στις $\varphi, \psi_k$ μπορεί να είναι κενό, οπότε δηλώνουμε τις $\varphi, \psi_k$ με $\top$ (πάντοτε αληθής πρόταση) καθώς και το σύνολο $K$ να είναι κενό, τότε δηλώνουμε την διάζευξή τους με $\bot$ (πάντοτε ψευδής πρόταση).
Ειδικώτερα στη γεωμετρική λογική μπορούμε να εκφράσουμε "αρνητικούς" ισχυρισμούς π.χ οτι "δεν ισχύει $\varphi$" ( $\varphi$ σύζευξη ατομικών τύπων) με αξιώματα της μορφής $\forall x\,(\varphi(x) \longrightarrow \bot)$.

**Παραδείγματα:**

1. Η θεωρία των γραμμικών διατάξεων με ελάχιστο και μέγιστο στοιχείο έχει ένα είδος μεταβλητής, δύο σταθερές 0,1 του ίδιου είδους με τις μεταβλητές, ένα σχεσιακό σύμβολο $\leq$ και αξιώματα:
$\forall x\,(x \leq x)$
$\forall x\,\forall y\,(x \leq y \ \wedge\ y \leq x \longrightarrow x = y)$
$\forall x\,\forall y\,\forall z\,(x \leq y \ \wedge\ y \leq z \longrightarrow x \leq z)$
$\forall x\,(0 \leq x) \quad , \quad \forall x\,(x \leq 1)$
$\forall x\,\forall y\,(x \leq y \ \vee\ y \leq x)$

2. Η θεωρία των αβελιανών ομάδων με στρέψη έχει ένα είδος μεταβλητής, μια σταθερά 0 του ίδιου είδους, ένα διμελές συναρτησιακό σύμβολο +, ένα μονομελές συναρτησιακό σύμβολο - ( ) και αξιώματα:
$\forall x\,\forall y\,\forall z\,((x+y)+z = x+(y+z))$
$\forall x\,\forall y\,(x+y = y+x)$
$\forall x\,(x+0 = x)$
$\forall x\,(x+(-(x)) = 0)$
$\forall x\,(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} x+\ldots+x = 0)$

Παρατηρούμε εδώ οτι, σε αντίθεση με το προηγούμενο παράδειγμα, η παρούσα θεωρία δεν εκφράζεται στα πλαίσια της συνηθισμένης πρωτοβάθμιας λογικής, αφού χρησιμοποιούμε μια απειρομελή διάζευξη. Αποδεικνύεται οτι αυτό δεν αποτελεί υποκειμενική αδυναμία μας αλλα αντικειμενικό γεγονός: Μπορούμε να κατασκευάσουμε υπεργινόμενο αβελιανών ομάδων με στρέψη που να είναι αβελιανή ομάδα που δεν έχει στρέψη (δηλ. έχει στοιχεία $x$ που για κανένα $m$ δεν είναι $mx = 0$). Αυτό αντιβαίνει το θεώρημα του $Loš$ που ισχύει για μοντέλα πρωτοβάθμιων θεωριών.

3. Η θεωρία των συναρτητών πάνω σε μια μικρή κατηγορία $\mathcal{C}$.
Η θεωρία αυτή έχει ένα σύνολο απο είδη μεταβλητών $C_i$, ένα για κάθε αντικείμενο της $\mathcal{C}$. Εχει επίσης ένα σύνολο συναρτησιακών συμβόλων $f : C; D$, ένα για κάθε μορφισμό $f : C \longrightarrow D$ της $\mathcal{C}$. Εχει τα αξιώματα:
$\forall x : C\,(id_C(x) = x)$
$\forall x : C\,(g(f(x)) = (g \circ f)(x))$

Τα μοντέλα αυτής της θεωρίας είναι οικογένειες απο σύνολα $(X_C)_{C\in\mathcal{C}}$, ένα για κάθε αντικείμενο

της $\mathcal{C}$, μαζί με συναρτήσεις $X_f : X_C \longrightarrow X_{C'}$, μια για κάθε $f : C \longrightarrow C'$ της $\mathcal{C}$, έτσι ώστε να ικανοποιούνται τα εξής:

$$X_{id}(x) = x \quad , \quad X_g(X_f(x)) = X_{g \circ f}(x)$$

Με άλλα λόγια τα μοντέλα αυτής της θεωρίας είναι απλώς συναρτητές $X : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Set}$.

### Ερμηνεία της γεωμετρικής λογικής σε κατηγορίες μεταβαλλόμενων συνόλων

Σκοπός μας είναι να δείξουμε εδώ πώς μπορούμε να ερμηνεύουμε τη γεωμετρική λογική σε κατηγορίες μεταβαλλόμενων συνόλων όπως η $[\mathcal{D}^{op}, \mathrm{Set}]$ ή η $sh(\mathcal{D}, j)$ όπου $\mathcal{D}$ είναι μια μικρή κατηγορία και $j$ μια τοπολογία Grothendieck πάνω σ'αυτήν.

Θέλουμε τα είδη των μεταβλητών να ερμηνεύονται ως αντικείμενα (μεταβαλλόμενα σύνολα) σε αυτές τις κατηγορίες, τα συναρτησιακά σύμβολα ως μορφισμοί και τα σχεσιακά σύμβολα ως υποαντικείμενα (μεταβαλλόμενα υποσύνολα).
Προκειμένου να γράψουμε πιο μεθοδικά τη σημασιολογία αυτή μας καθοδηγούν οι εξής δύο αρχές:

- Οι όροι της θεωρίας θα ερμηνεύονται απο γενικευμένα στοιχεία των μεταβαλλόμενων συνόλων.
- Οι τύποι της θεωρίας θα ερμηνεύονται απο υποαντικείμενα μεταβαλλόμενων συνόλων (δηλ. απο τις εκτάσεις τους) έτσι ώστε οι λογικοί σύνδεσμοι να αντιστοιχίζονται στις πράξεις του δικτυωτού των υποαντικειμένων ενός μεταβαλλόμενου συνόλου. Θυμίζουμε εδώ οτι αυτό το δικτυωτό στις περιπτώσεις των κατηγοριών $[\mathcal{D}^{op}, \mathrm{Set}]$ και $sh(\mathcal{D}, j)$ έχει δομή πλήρους Heyting άλγεβρας.

Προκειμένου να ερμηνεύσουμε τους όρους της γλώσσας κάνουμε την εξής σύμβαση:
Οι όροι εμφανίζονται συνήθως μέσα σε κάποια περιβάλλοντα ελεύθερων μεταβλητών. Αυτό σημαίνει οτι μπορεί να έχουμε εκφράσεις όπως $x = f(y, c)$, όπου $x : X, y : Y$ μεταβλητές. Συμφέρει για λόγους ομοιομορφίας της έκφρασης να μιλάμε για ερμηνείες όρων σ'ένα περιβάλλον.

Ερμηνεύουμε λοιπόν τους όρους ως εξής:

- Αν $t = x : X$ τότε $\tilde{t} = T \longrightarrow \tilde{X}$, τυχαίο γενικευμένο στοιχείο.
- Αν $t = c : X$ τότε $\tilde{t} = 1 \longrightarrow \tilde{X}$ συγκεκριμένο σταθερό στοιχείο.
- Αν $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, όπου $f : X_1, \ldots, X_n; X$ και $\tilde{t}_i : T \longrightarrow \tilde{X}_i$, τότε $\tilde{t} = T \stackrel{<\tilde{t}_1, \ldots, \tilde{t}_n>}{\longrightarrow} \tilde{X}_1 \times \ldots \times \tilde{X}_n \stackrel{\tilde{f}}{\longrightarrow} \tilde{X}$.

Ερμηνεύουμε τους ατομικούς τύπους ως εξής:

- Λέμε οτι $\tilde{X} \models t_1 = t_2$, όπου $t_1, t_2 : X$, αν ο μορφισμός $T \stackrel{<\tilde{t}_1, \tilde{t}_2>}{\longrightarrow} \tilde{X} \times \tilde{X}$ παραγοντοποιείται μέσω του $\tilde{X} \stackrel{<id, id>}{\rightarrowtail} \tilde{X} \times \tilde{X}$ (δηλ. $\tilde{t}_1 = \tilde{t}_2 : T \longrightarrow \tilde{X}$).

- Λέμε ότι $\tilde{X}_1 \times \ldots \times \tilde{X}_m \models R(t_1, \ldots, t_m)$, όπου $R : X_1, \ldots, X_m$, αν ο μορφισμός $T \xrightarrow{<\tilde{t}_1,\ldots,\tilde{t}_m>} \tilde{X}_1 \times \ldots \times \tilde{X}_m$ παραγοντοποιείται μέσω του υποαντικειμένου $\tilde{R} \rightarrowtail \tilde{X}_1 \times \ldots \times \tilde{X}_m$ που ερμηνεύει το σχεσιακό σύμβολο.

Γράφωντας κάθε δράγμα (όντας προδράγμα) ως συνόριο αναπαρστάσιμων έχουμε:

$$iX \cong \operatorname*{colim}_{(D,x)\in y\downarrow x} y(D)$$

άρα

$$l(iX) \cong l(\operatorname*{colim}_{(D,x)\in y\downarrow x} y(D))$$

όμως $l \circ i \cong id$, όταν $i$ πλήρης και πιστός, άρα:

$$X \cong l(\operatorname*{colim}_{(D,x)\in y\downarrow x} y(D))$$

άρα,

$$X \cong \operatorname*{colim}_{(D,x)\in y\downarrow x} l(y(D))$$

γιατί $l$ αριστερά προσαρτημένος.

Οταν η τοπολογία $j$ έχει την ιδιότητα οτι οι αναπαραστάσιμοι συναρτητές είναι δράγματα γι'αυτήν έχουμε

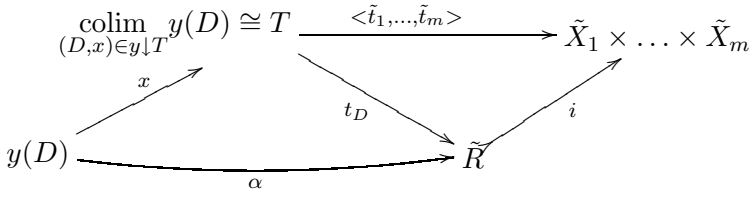
$$X \cong \operatorname*{colim}_{(D,x)\in y\downarrow x} y(C)$$

(κάθε δράγμα είναι συνόριο αναπαραστάσιμων).
Αυτό σημαίνει οτι προκειμένου να πιστοποιήσουμε αν επαληθεύεται ένας ατομικός τύπος για μια "αποτίμηση μεταβλητών", δηλ. αν αντιστοιχίσουμε γενικευμένα στοιχεία $\tilde{x} : T \longrightarrow \tilde{X}$ στις μεταβλητές $x : X$, αρκεί να εξετάσουμε τα γενικευμένα στοιχεία με πεδίο μεταβολής αναπαραστάσιμους συναρτητές $\tilde{x} : y(D) \longrightarrow \tilde{X}$.
Πράγματι, προκειμένου $\tilde{X} \models t_1 = t_2$, όπου $t_1, t_2 : X$, αν ξέρουμε πως για όλα τα $x : y(D) \longrightarrow T$ έχουμε:

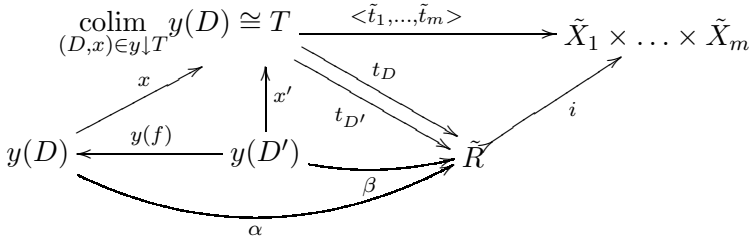
$$t_1 \circ x = t_2 \circ x : y(D) \longrightarrow T \rightrightarrows \tilde{X}$$

απο την καθολική ιδιότητα του συνορίου $T \cong \operatorname*{colim}_{(D,x)\in y\downarrow T} y(D)$ έχουμε ότι $t_1 = t_2 : T \longrightarrow \tilde{X}$.

Ομοίως για τύπους της μορφής $R(t_1, \ldots, t_m)$ : Αν για κάθε $x : y(D) \longrightarrow T$ :



το $< \tilde{t}_1, \ldots, \tilde{t}_m > \circ x$ παραγοντοποιείται μέσω του $\tilde{R}$, δηλ. $< \tilde{t}_1, \ldots, \tilde{t}_m > \circ x = i \circ \alpha$, τότε το $(\tilde{R}, t_D \circ x)_{(D,x)\in y\downarrow T}$ γίνεται συν-κώνος.
Πράγματι: για $f : D \longrightarrow D'$ και $x' : y(D') \longrightarrow T$




έχουμε ότι $t_D \circ x \circ y(f) = t_{D'} \circ x'$, δεδομένου ότι $i \circ t_D \circ x \circ y(f) = (i \circ \alpha) \circ y(f) =$ $< \tilde{t}_1, \ldots, \tilde{t}_m > \circ(x \circ y(f)) =< \tilde{t}_1, \ldots, \tilde{t}_m > \circ x' = i \circ \beta = i \circ t_{D'} \circ x'$ και $i$ μονομορφισμός.

Με αυτά τα δεδομένα μπορούμε να ορίσουμε μια "σχέση επιβολής" ανάμεσα σε αντικείμενα της $\mathcal{D}$ και τύπους $\varphi$ της $\mathcal{L}$. Εχοντας ορίσει τι σημαίνει

$$\tilde{X}_1 \times \ldots \times \tilde{X}_n \models \varphi(x_1 : X_1, \ldots, x_n : X_n)$$

όπου: $\tilde{X}_1 : y(D) \longrightarrow \tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n : y(D) \longrightarrow \tilde{X}_n$, $\varphi$ ατομικούς τύπους και ερμηνείες μεταβλητών απο γενικευμένα στοιχεία με "πεδίο μεταβολής" $y(D)$, ορίζουμε:

$$D \Vdash \varphi(x_1 : X_1, \ldots, x_n : X_n) \quad \alpha\nu\nu \quad \tilde{X}_1 \times \ldots \times \tilde{X}_n \models \varphi \qquad (*)$$

για την αποτίμηση που δίνει την τυχαία τιμή $\tilde{x}_i : y(D) \longrightarrow \tilde{X}_i$ στη μεταβλητή $x_i : X_i$.

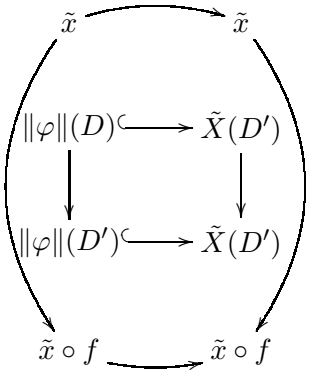
Επαγωγικά μπορούμε τώρα να επεκτείνουμε αυτή τη σχέση σε τύπους της μορφής

$$\varphi \wedge \psi \quad , \quad \bigvee_{i\in I} \psi_i \quad , \quad \exists y\, \psi(x, y)$$

Ας παρατηρήσουμε πρώτα οτι με βάση τον ορισμό $(*)$, προκειμένου για ατομικούς τύπους $\varphi$, αν $D \Vdash \varphi(x : X)$ για $\tilde{x} : y(D) \longrightarrow \tilde{X}$ και $f : D' \longrightarrow D$ στη $\mathcal{D}$ τότε $D' \Vdash \varphi(x : X)$ για $\tilde{x} \circ f = y(D') \longrightarrow \tilde{X}$.
Επομένως ο εγκλεισμός

$$\|\varphi\|(D) := \{y(D) \xrightarrow{\tilde{x}} \tilde{X} \quad , \quad \tilde{X} \models \varphi(x : X)\} \subseteq \tilde{X}(D)$$

είναι φυσικός, δηλ. για $f : D' \longrightarrow D$ το ακόλουθο διάγραμμα αντιμετατίθεται:




Ετσι για κάθε ατομικό τύπο ελεύθερης μεταβλητής $x : X$ έχουμε βρει ένα υποαντικείμενο $\|\varphi\| \rightarrowtail \tilde{X}$.
Οπως είπαμε νωρίτερα μας καθοδηγεί στη σημασιολογία η αντιστοιχία μεταξύ λογικών συνδέσμων και πράξεων στο δικτυωτό των υποαντικειμένων του $\tilde{X}$. Θέλουμε δηλ. να ορίσουμε

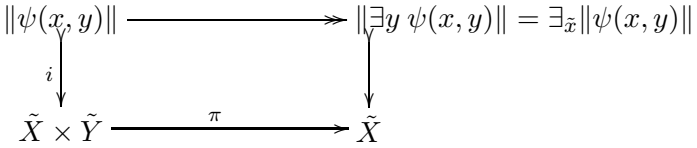
$$\|\varphi \wedge \psi\| = \|\varphi\| \cap \|\psi\| \text{ (infimum υποαντικειμένων)}$$

$$\|\bigvee_{i\in I} \psi_i\| = \bigcup_{i\in I} \|\psi_i\| \text{ (supremum υποαντικειμένων)}$$

Επίσης,

$$\|\exists y\, \psi(x,y)\| = \exists_{\tilde{x}} \|\psi(x,y)\|$$

όπου




η επί-μόνο παραγοντοποίηση του $\pi \circ i$.

Επεκτείνουμε τώρα τη σχέση $D \Vdash \varphi$ σε συνθετώτερους τύπους απλώς λαμβάνοντας υπ'όψη τους παραπάνω ''νόμους'' και το πώς ορίζονται τα υποαντικείμενα στα δεξιά των παραπάνω ισοτήτων σε επίπεδο $D \in \mathcal{D}$ (δηλ. ποιά είναι τα γενικευμένα τους στοιχεία με πεδίο μεταβολής $y(D)$).
Επειδή το υποαντικείμενο $\|\varphi\| \cap \|\psi\|$ ορίζεται απο την κατα συντεταγμένη τομή των $\|\varphi\|$ και $\|\psi\|$, τόσο στην κατηγορία $[\mathcal{D}^{op}, \mathrm{Set}]$ όσο και στην $sh(\mathcal{D}, j)$, δηλ.

$$(\|\varphi\| \cap \|\psi\|)(D) = \|\varphi\|(D) \cap \|\psi\|(D)$$

ορίζουμε τη σχέσηεπιβολής

$$D \Vdash \varphi \wedge \psi \text{ αν } D \Vdash \varphi \text{ και } D \Vdash \psi$$

(δηλ. το $y(D) \xrightarrow{\tilde{x}} \tilde{X}$ ικανοποιεί την "έκταση" του $(\varphi \wedge \psi)(x : X)$ αν το $\tilde{x}$ ικανοποιεί την έκταση του $\varphi$ και την έκταση του $\psi$ ).

Ομοίως θα ορίζαμε τη σχέση επιβολής για τους τύπους $\bigvee_{i \in I} \psi_i$ , $\exists y\, \psi(x, y)$ προκειμένου για τη σημασιολογία στην κατηγορία $[\mathcal{D}^{op}, \mathrm{Set}]$ . Εμας όμως κυρίως μας ενδιαφέρει η σημασιολογία στην κατηγορία $sh(\mathcal{D}, j)$ . Εκεί το supremum των $\|\psi_i\|$ , $i \in I$ , δεν δίνεται απο την "κατα συντεταγμένη" ένωση γιατί, γενικώς, το προδράγμα που ορίζεται ως

$$(\|\bigvee_{i \in I} \psi_i\|)(D) = \bigcup_{i \in I} \|\psi_i\|(D)$$

δεν είναι δράγμα.
Το supremum $\bigcup_{i \in I} \|\psi_i\|$ δίνεται απο το "συσχετισμένο δράγμα" του προδράγματος που ορίζεται απο την παραπάνω "κατα συντεταγμένη ένωση". Ανάλογα έχει η κατάσταση με τον ορισμό του υποαντικειμένου $\exists_{\tilde{x}} \|\psi(x, y)\|$ στη $sh(\mathcal{D}, j)$ .
Η περιγραφή του "συσχετισμένου δράγματος" καθορίζει την επέκταση της "σχέσης επιβολής" ως εξής:

$$D \underset{\tilde{x}: y(D) \to \tilde{X}}{\Vdash} \bigvee_{i \in I} \psi_i(x : X)$$

αν υπάρχει κάλυμμα $\{D_k \xrightarrow{\alpha_k} D \mid k \in K\} \in Cov(D)$ ώστε, για κάθε $k \in K$ ,

$$D_k \underset{\tilde{x} \circ \alpha_k : y(D_k) \to \tilde{X}}{\Vdash} \psi_i(x : X)$$

για κάποιο $i \in I$ .

Ομοίως:

$$D \underset{\tilde{x}: y(D) \to \tilde{X}}{\Vdash} \exists y\, \psi(x, y)$$

αν υπάρχει κάλυμμα $\{D_k \xrightarrow{\alpha_k} D \mid k \in K\} \in Cov(D)$ τέτοιο ώστε, για κάθε $k \in K$ , να υπάρχει $\tilde{y} : y(D_k) \longrightarrow \tilde{Y}$ ώστε

$$D_k \underset{\tilde{x} \circ \alpha_k : y(D_k) \to \tilde{X}}{\Vdash} \psi(x : X, y : Y)$$

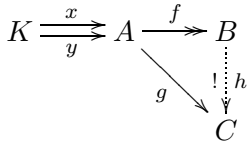
# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

# ΟΜΑΛΕΣ ΚΑΙ ΑΚΡΙΒΕΙΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ

Θα ξεκινήσουμε το κεφάλαιο αυτό αναλύοντας μια απο τις πιο βασικές έννοιες του κεφαλαίου αυτη του **ομαλού επιμορφισμού**

## 2.1 ΟΜΑΛΟΣ ΕΠΙΜΟΡΦΙΣΜΟΣ

**Ορισμός 2.1** *Ονομάζουμε ένα μορφισμό* $f : A \longrightarrow B$ *ομαλό επιμορφισμό αν και μόνο αν είναι συν-εξισωτής ενός ζεύγους μορφισμών δηλ. αν υπάρχουν* $x, y : K \longrightarrow A$ *ώστε* $f \circ x = f \circ y$ *και για κάθε* $g : A \longrightarrow C$ *όπου* $g \circ x = g \circ y$*, τότε υπάρχει μοναδικό* $h : B \longrightarrow C$ *τέτοιο ώστε* $g = h \circ f$




Εχουμε αναφέρει οτι η σύνθεση επιμορφισμών είναι πάντα επιμορφισμός, δεν συμβαίνει όμως το ίδιο και για τους ομαλούς επιμορφισμούς δηλ. η σύνθεση ομαλών επιμορφισμών δεν είναι γενικά ομαλός επιμορφισμός ακόμα και όταν η κατηγορία στην οποία αναφερόμαστε είναι συν-πλήρης.

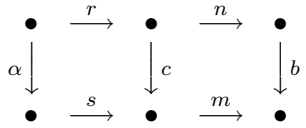
**Πρόταση 2.1** *Αν η σύνθεση* $f \circ g$ *είναι ομαλός επιμορφισμός και αν η g είναι επιμορφισμός τότε ο f είναι ομαλός επιμορφισμός.*

**Ορισμός 2.2** *Εαν ένας μορφισμός $f$ έχει μια παραγοντοποιήση $f = n \circ r$ όπου $o$ $r$ είναι ομαλός επιμορφισμός και $n$ μονομορφισμός λέμε οτι $o$ $f$ έχει ομαλή παραγοντοποίηση. Οι ομαλές παραγοντοποιησεις είναι μοναδικές μέχρις ισομορφισμού για κάθε μορφισμό (θα δώσουμε στην επόμενη ενότητα, οπου θα αναφερθούμε στην ομαλή κατηγορία, μια αποδειξη αυτού.*
*Αν σε μια κατηγορία κάθε μορφισμός έχει ομαλή παραγοντοποίηση τότε λέμε οτι η κατηγορία δέχεται ομαλές παραγοντοποιήσεις.*

**Πρόταση 2.2** *Αν $o$ $f$ έχει ομαλή παραγοντοποίηση $n \circ r$ τότε:*

- *$o$ $n$ είναι ισομορφισμός ανν $o$ $f$ είναι ομαλός επιμορφισμός.*
- *$o$ $r$ είναι ισομορφισμός ανν $o$ $f$ είναι μονομορφισμός*

**Πρόταση 2.3** *Εστω ότι $b \circ f = g \circ \alpha$ και οτι οι f,g έχουν ομαλή παραγοντοποίηση $f = n \circ r, g = m \circ s$. Τότε υπάρχει μοναδικός μορφισμός c τέτοιος ώστε να κάνει το ακόλουθο διάγραμμα αντιμεταθετικό.*

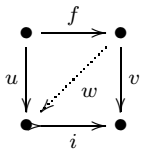



**Πρόταση 2.4** *Αν σε μια κατηγορία κάθε μορφισμός έχει ομαλή παραγοντοποίηση τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

1. *Οι ομαλοί επιμορφισμοί είναι κλειστοί ως προς την σύνθεση*
2. *Σε κάθε ομαλή παραγοντοποίηση $n \circ r$ $o$ $n$ είναι μονομορφισμός*

Τέλος, θα αναφερθούμε και στην έννοια του ισχυρού επιμορφισμού

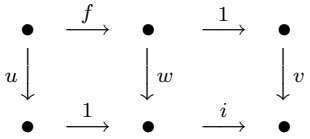
**Ορισμός 2.3** *Ονομάζουμε ένα επιμορφισμό $f$* **ισχυρό επιμορφισμό** *αν οποτεδήποτε ισχύει $v \circ f = i \circ u$, με $i$ μονομορφισμό, υπάρχει μοναδικό $w$ τέτοιο ώστε τα δύο τρίγωνα να αντιμετατίθενται:*



**Πρόταση 2.5** *Οι ομαλοί επιμορφισμοί είναι ισχυροί επιμορφισμοί*

**Απόδειξη:** Εστω $f$ ομαλός επιμορφισμός με $v \circ f = i \circ u$ όπου $i$ μονομορφισμός τότε:
ο $f$ έχει ομαλή παραγοντοποίηση: $f = 1 \circ f$
ο $i$ έχει ομαλή παραγοντοποίηση: $i = i \circ 1$

Αρα σύμφωνα με προηγούμενη πρόταση υπάρχει μοναδικό $w$ τέτοιο ώστε να αντιμετατίθεται το ακόλουθο διάγραμμα:




Ομως

$$w \circ f = 1 \circ u = u$$
$$i \circ w = v \circ 1 = v$$

Αρα ο $f$ είναι ισχυρός επιμορφισμός. ■

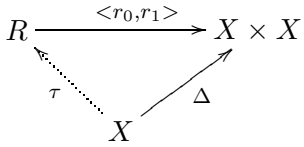
**Πρόταση 2.6** *Οι ισχυροί επιμορφισμοί είναι κλειστοί ως προς την σύνθεση*

**Ορισμός 2.4** *Αν ένας μορφισμός $f$ μιας κατηγορίας έχει παραγοντοποίηση $f = i \circ p$, όπου $p$ ισχυρός επιμορφισμός και $i$ μονομορφισμός, τότε η παραγοντοποίηση ονομάζεται* **κανονική**

## 2.2 ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ - ΣΧΕΣΕΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ

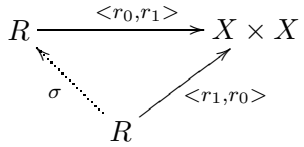
Ας υποθέσουμε ότι $\mathcal{C}$ είναι μια κατηγορία με εφελκύσεις. Ενα ζεύγος $r_0, r_1 : R \rightrightarrows X$ λέγεται γράφημα (αν είμαστε στην κατηγορία των συνόλων, σκεφτόμαστε το $R$ ως το σύνολο των ακμών, $X$ το σύνολο των κορυφών και $r_0$, $r_1$ ως τις συναρτήσεις που αντιστοιχίζουν σε κάθε ακμή την αρχή και το τέλος της, αντίστοιχα).

Λέμε ότι το παραπάνω γράφημα είναι ανακλαστικό αν:




υπάρχει μορφισμός $\tau : X \longrightarrow R$ τέτοιος ώστε $r_0 \circ \tau = r_1 \circ \tau = id_X$ (Αν είμαστε στην κατηγορία των συνόλων σκεφτόμαστε τη συνάρτηση $\tau$ ως εκείνη που αντιστοιχίζει κάθε αντικείμενο σε μια ακμή που το συνδέει με τον εαυτό του)

Λέμε ότι το παραπάνω γράφημα είναι συμμετρικό αν:




υπάρχει μορφισμός $\sigma : R \longrightarrow R$ τέτοιος ώστε:

$$r_1 \circ \sigma = r_0$$
$$r_0 \circ \sigma = r_1$$

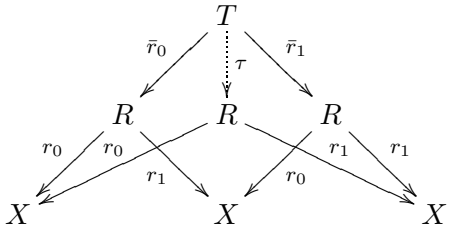
(Αν είμαστε στην κατηγορία των συνόλων σκεφτόμαστε τη συνάρτηση $\sigma$ ως εκείνη που αντιστοιχίζει κάθε ακμή σε μια ακμή που συνδέει τις ίδιες κορυφές αλλά πηγαίνει στην αντίθετη κατεύθυνση)

Λέμε ότι δύο παράλληλα βέλη $Q \underset{y_1}{\overset{y_0}{\rightrightarrows}} X$ είναι απο κοινού μονομορφικά αν οποτεδήποτε:

$$y_0 \circ f = y_0 \circ g$$
$$y_1 \circ f = y_1 \circ g$$
$$\text{τότε } \; f = g$$

Ονομάζουμε σχέση σε μια κατηγορία ένα γράφημα όπου το ζεύγος $(r_0, r_1)$ είναι από κοινού μονομορφικό. Λέμε ότι η σχέση $r_0, r_1 : R \rightrightarrows X$ είναι ανακλαστική ή συμμετρική αν είναι, αντίστοιχα, ανακλαστική ή συμμετρική ως γράφημα.

**Ορισμός 2.5** *Μεταβατικό γράφημα*
*Ενα γράφημα είναι μεταβατικό, αν για την εφέλκυση:*



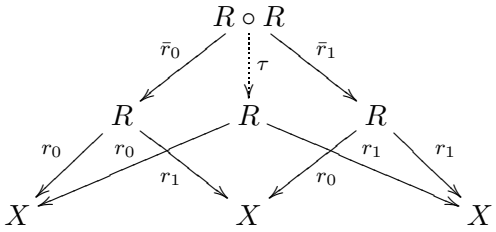
*υπάρχει μορφισμός* $\tau : T \longrightarrow R$ *τέτοιος ώστε:*

$$r_0 \circ \bar{r}_0 = r_0 \circ \tau$$
$$r_1 \circ \bar{r}_1 = r_1 \circ \tau$$

(Αν είμαστε στην κατηγορία των συνόλων σκεφτόμαστε τη συνάρτηση $\tau$ ως εκείνη που αντιστοιχίζει κάθε ζεύγος διαδοχικών ακμκών σε μια ακμή που ξεκινάει από την αρχή της πρώτης και καταλήγει στο πέρας της δεύτερης.)

Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι $\mathcal{C}$ είναι μια κατηγορία που, εκτός από εφελκύσεις, έχει κανονικές παραγοντοποιήσεις.

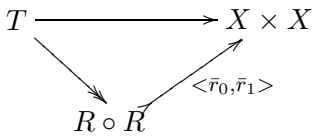
**Ορισμός 2.6** *Μεταβατική σχέση*
*Μια σχέση είναι μεταβατική, αν στο διάγραμμα:*




*υπάρχει μορφισμός* $\tau : R \circ R \longrightarrow R$ *τέτοιος ώστε:*

$$r_0 \circ \bar{r}_0 = r_0 \circ \tau$$
$$r_1 \circ \bar{r}_1 = r_1 \circ \tau,$$

*όπου ως σύνθεση της σχέσης* $R$ *με τον εαυτό της ορίζουμε το αντικείμενο που προκύπτει από την κανονική παραγοντοποίηση*




*μαζί με τους μορφισμούς* $< \bar{r}_0, \bar{r}_1 >$

**Ορισμός 2.7** *Σχέση ισοδυναμίας σε μία κατηγορία με εφελκύσεις και κανονικές παραγοντοποιήσεις λέμε μια ανακλαστική, συμμετρική, μεταβατική σχέση.*

## 2.3 ΟΜΑΛΗ ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ - ΑΚΡΙΒΗΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ

Στην βιβλιογραφία υπάρχουν αρκετοί διαφορετικοί ορισμοί της ομαλής κατηγορίας οι οποίοι αποδεικνύονται (ενίοτε κατά μη - τετριμμένο τρόπο) ισοδύναμοι. Για τους σκοπούς μας θα λέμε:

**Ορισμός 2.8** *Μια κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι ομαλή όταν ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:*

- *Εχει πεπερασμένα όρια*
- *Κάθε ζεύγος πυρήνα έχει συν-εξισωτή*
- *Η εφέλκυση ομαλού επιμορφισμού είναι ομαλός επιμορφισμός, δηλ.*

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{g} & B \\ \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

*αν έχουμε τους μορφισμούς $f, p$ με $p$ ομαλό επιμορφισμό και $(q, g)$ είναι η εφέλκυση των $(f, p)$ τότε ο $q$ είναι ομαλός επιμορφισμός*

**Παρατηρήσεις:**

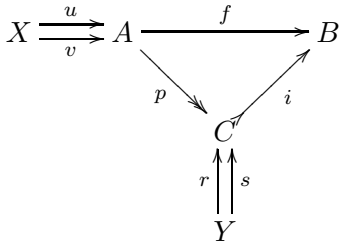
Θυμίζουμε, ότι το ζεύγος πυρήνα, που αναφέραμε στον ορισμό της ομαλούς κατηγορίας, ενός μορφισμού $f : A \longrightarrow B$ είναι η εφέλκυση του $C \longrightarrow A$ κατα μήκος του εαυτού του δηλ. για κάποιο αντικείμενο D και ζεύγος μορφισμών $p, q : D \longrightarrow C$ ορίζεται η εφέλκυση:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{p} & C \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ C & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

**Θεώρημα 2.1** *Σε μια ομαλή κατηγορία, κάθε μορφισμός παραγοντοποιείται από ένα ομαλό επιμορφισμό ακολουθούμενο απο μονομορφισμό. Αυτή η παραγοντοποίηση είναι μοναδική μέχρις ισομορφισμού.*

**Απόδειξη:** Εστω $(u, v)$ το ζεύγος πυρήνα του $f$ και $p$ ο συν-εξισωτής των $u$ και $v$ επειδή $f \circ u = f \circ v$ και $p$ συν-εξισωτής άρα υπάρχει μοναδικός μορφισμός $i : C \longrightarrow B$ τέτοιος ώστε

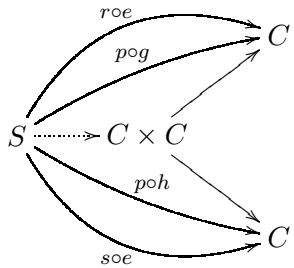
$f = i \circ p$



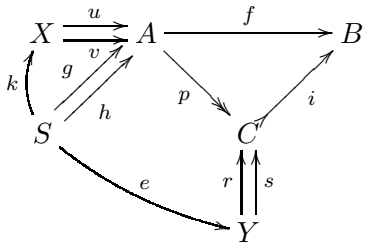

Ο $p$ είναι ομαλός επιμορφισμός, άρα μένει να δείξουμε οτι ο $i$ είναι μονομορφισμός:
Εστω $(r, s)$ το ζεύγος πυρήνα του $i$ δηλ. $i \circ r = i \circ s$ και $(g, h)$ ζεύγος βελών του $A$. Εχουμε τότε τους μορφισμούς $p \times p : A \times A \longrightarrow C \times C$ , $< r, s >: Y \longrightarrow C \times C$ και ορίζουμε την εφέλκυση τους:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{e} & Y \\ {\scriptstyle <g,h>}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle <r,s>} \\ A \times A & \xrightarrow{f} & C \times C \end{array}$$

Ισχύει οτι $r \circ e = p \circ g$ και $s \circ e = p \circ h$ λόγω της καθολικής ιδιότητας του καρτεσιανού γινομένου $C \times C$ δηλαδή έχουμε :




επειδή υπάρχει μοναδικό βέλος απο το $S$ στο $C \times C$ , τα δύο βέλη $< p \circ g, p \circ h >$, $< r \circ e, s \circ e >$ θα ταυτίζονται άρα προκύπτει το ζητούμενο.
Εχουμε το διάγραμμα



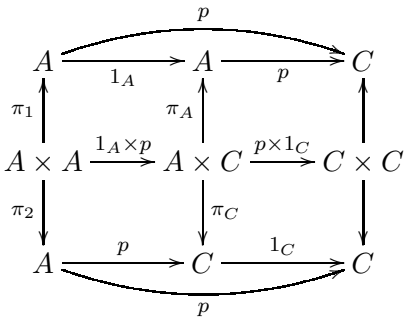

Ομως

$$f \circ g = i \circ p \circ g = (i \circ r) \circ e = i \circ (s \circ e) = i \circ p \circ h = f \circ h$$

άρα υπάρχει μοναδικός μορφισμός $k : S \longrightarrow X$ με $u \circ k = g$ και $v \circ k = h$.
Επίσης

$$r \circ e = p \circ g = (p \circ u) \circ k = p \circ (v \circ k) = p \circ h = s \circ e$$

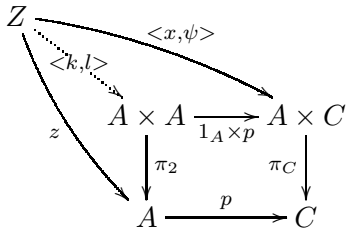
Για να είναι λοιπόν ο $i$ μονομορφισμός αρκεί να δείξουμε οτι ο $e$ είναι ομαλός επιμορφισμός. Πρώτα όμως πρέπει να αποδείξουμε οτι ο μορφισμός $p \times p$ είναι ομαλός.
Εχουμε το διάγραμμα:




Απο τις καθολικές ιδιότητες πρέπει:

$$p \times p = (p \times 1_C) \circ (1_A \times p)$$

Θα δείξουμε οτι το ακόλουθο διάγραμμα είναι εφέλκυση:




Προφανώς ισχύει οτι $\pi_C \circ (1_A \times p) = p \circ \pi_2$. Αρα θέλουμε για τυχαίο $Z$ να υπάρχει μοναδικός μορφισμός $< k, l >: Z \longrightarrow A \times A$ που να κάνει τα πλευρικά τρίγωνα να αντιμετατίθενται. Υπάρχει τέτοιος μορφισμός λόγω της καθολικής ιδιότητας του γινομένου $A \times A$ και πράγματι:

$$(1_A \times p) \circ < k, l > = < k, p \circ l > = < x, \psi >$$

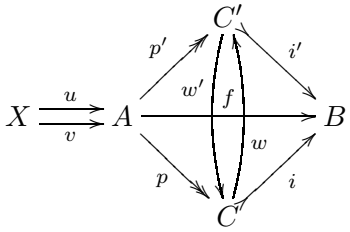
$$\text{άρα } x = k$$

$$\pi_2 \circ < k, l > = z$$

$$\text{άρα } l = z$$

υπάρχει μοναδικός μορφισμός $< x, z >: Z \longrightarrow A \times A$. Αρα ο μορφισμός $1_A \times p$ είναι ομαλός ως εφέλκυση του ομαλού επιμορφισμού $p$.
Ομοια και ο $p \times 1_C$ είναι ομαλός επιμορφισμός, άρα και η σύνθεση τους $p \times p$.
Τελικά, ο $e$ είναι ομαλός επιμορφισμός ως εφέλκυση του ομαλού επιμορφισμού $p \times p$ που ήταν και το ζητούμενο.

Μοναδικότητα: Εστω οτι ο μορφισμός f έχει δύο παραγοντοποιήσεις τότε:




οπου $f = i \circ p = i' \circ p'$

οι μορφισμοί $p$, $p'$ είναι ομαλοί αρα και ισχυροί και επειδή $i$, $i'$ μονομορφισμοί υπάρχουν μοναδικά $w : C \longrightarrow C'$, $w' : C' \longrightarrow C$ ώστε:

1. $w \circ p = p'$
2. $i' \circ w = i$
3. $w' \circ p' = p$
4. $i \circ w' = i'$

απο τις σχέσεις (1),(3) έχουμε: $(w \circ w') \circ p' = p'$ άρα $w \circ w' = id_{C'}$
απο τις σχέσεις (2),(4) έχουμε: $i \circ (w' \circ w) = i$ άρα $w' \circ w = id_C$

καταλήξαμε οτι $C \cong C'$ δηλ. η παραγοντοποίηση είναι μοναδική!

■

**Πρόταση 2.7** *Σε μια ομαλή κατηγορία οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

1. *Ο f είναι ομαλός επιμορφισμός*
2. *Ο f είναι ισχυρός επιμορφισμός*

**Πρόταση 2.8** *Σε μια ομαλή κατηγορία,*

1. *Η σύνθεση δύο ομαλών επιμορφισμών είναι ομαλός επιμορφισμός*
2. *Αν η σύνθεση $f \circ g$ είναι ομαλός επιμορφισμός, τότε ο $f$ είναι ομαλός επιμορφισμός*
3. *Ενας μορφισμός που είναι ομαλός επιμορφισμός και μονομορφισμός είναι ισομορφισμός*

Οι δύο επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμοι ορισμοί της ομαλούς κατηγορίας.

**Πρόταση 2.9** *Μια κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι ομαλή όταν ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:*

1. *Κάθε βέλος έχει ζεύγος πυρήνα*
2. *Κάθε βέλος $f$ παραγοντοποιείται $f = i \circ p$, όπου $i$ μονομορφισμός και $p$ επιμορφισμός*
3. *Η εφέλκυση ομαλού επιμορφισμού κατα μήκος οποιουδήποτε μορφισμού υπάρχει και είναι ομαλός επιμορφισμός*

**Πρόταση 2.10** *Εστω $\mathcal{C}$ κατηγορία με πεπερασμένα όρια. Η κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι ομαλή αν και μόνο αν ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:*

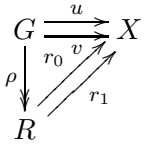
1. *Κάθε βέλος $f$ παραγοντοποιείται $f = i \circ p$, όπου $i$ μονομορφισμός και $p$ ισχυρός επιμορφισμός*
2. *Η εφέλκυση ισχυρού επιμορφισμού κατα μήκος οποιουδήποτε μορφισμού είναι ισχυρός επιμορφισμός*

**Πρόταση 2.11** *Κάθε ζεύγος πυρήνα σε μια ομαλή κατηγορία είναι σχέση ισοδυναμίας.*

**Ορισμός 2.9 Ακριβής Κατηγορία**
*Μια ομαλή κατηγορία όπου κάθε σχέση ισοδυναμίας είναι ζεύγος πυρήνα ονομάζεται ακριβής κατηγορία (exact category)*

Κλείνουμε με ένα τεχνικού χαρακτήρα Λήμμα που θα χρησιμοποιήσουμε στο Κεφάλαιο 4:

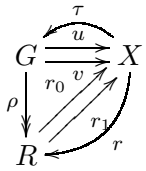
**Λήμμα 2.1** *Αν η* $\mathcal{D}$ *είναι ακριβής κατηγορία και* $G \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} X$ *είναι ανακλαστικό, συμμετρικό, μεταβατικό γράφημα και έχοντας την επι-μονο παραγοντοποίησει*




*τότε η* $R$ *είναι σχέση ισοδυναμίας.*

**Απόδειξη:** (i) Ανακλαστική:

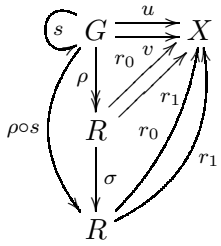
Θέλω να δείξω οτι υπάρχει μορφισμός $r : X \longrightarrow R$ τέτοιος ώστε $r_0 \circ r = r_1 \circ r = id_X$ .
Γνωρίζω όμως οτι υπάρχει $\tau : X \longrightarrow G$ τέτοιος ώστε $u \circ \tau = v \circ \tau = id_X$ .




άρα: $r_0 \circ (\rho \circ \tau) = u \circ \tau = v \circ \tau = r_1 \circ (\rho \circ \tau) = id_X$ .
Ο ζητούμενος μορφισμός είναι ο $r = \rho \circ \tau$.

(ii) Συμμετρική:

Αντίστοιχα, για την συμμετρικότητα θέλω να δείξω οτι υπάρχει μορφισμός $\sigma : R \longrightarrow R$ τέτοιος ώστε $r_0 \circ \sigma = r_1$ και $r_1 \circ \sigma = r_0$ . Υπάρχει, λόγω συμμετρικότητας του γραφήματος $G \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} X$ $s : G \longrightarrow G$ με $u \circ s = v$ και $v \circ s = u$ . Εχουμε το εξής διάγραμμα:




$$r_0 \circ (p \circ s) = (r_0 \circ p) \circ s = u \circ s = v (= r_1 \circ p)$$

$$r_1 \circ (p \circ s) = (r_1 \circ p) \circ s = v \circ s = u (= r_0 \circ p)$$

Αρα υπάρχει $\sigma : R \longrightarrow R$ τέτοιος ώστε $\sigma \circ \rho = \rho \circ s$ , γιατί η επί-μόνο παραγοντοποίησει είναι μοναδική.
Οπότε έχουμε:

$$(r_0 \circ \sigma) \circ \rho = r_0 \circ \rho \circ s = u \circ s = v = r_1 \circ \rho$$

$$(r_1 \circ \sigma) \circ \rho = r_1 \circ \rho \circ s = v \circ s = u = r_0 \circ \rho$$

επειδή $\rho$ ομαλός επιμορφισμός:

$$r_0 \circ \sigma = r_1$$

$$r_1 \circ \sigma = r_0$$

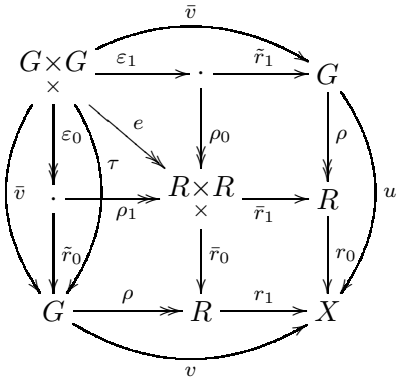
(iii) Μεταβατική:

Τέλος, για την μεταβατικότητα θέλουμε να υπάρχει μορφισμός $t : R \underset{\times}{\times} R \longrightarrow R$ έτσι ώστε να ισχύει:

$$r_0 \circ t = r_0 \circ \bar{r}_0$$

$$r_1 \circ t = r_1 \circ \bar{r}_1$$

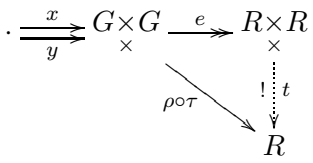
Εχουμε το διάγραμμα:




Υπάρχει όμως μορφισμός $\tau : G \underset{\times}{\times} G \longrightarrow G$ τέτοιος ώστε $u \circ \bar{u} = u \circ \tau$ και $v \circ \bar{v} = v \circ \tau$.

Επειδή η κατηγορία είναι ακριβής, η σύνθεση ομαλών επιμορφισμών είναι ομαλός επιμορφισμός, ο $e = \rho_1 \circ \varepsilon_0 = \rho_0 \circ \varepsilon_1 : G \underset{\times}{\times} G \longrightarrow R \underset{\times}{\times} R$ είναι ομαλός επιμορφισμός.

Παίρνω το ζεύγος πυρήνα του $e$




Αν δείξω ότι, $(\rho \circ \tau) \circ x = (\rho \circ \tau) \circ y$ τότε θα υπάρχει μοναδικός μορφισμός $R \underset{\times}{\times} R \longrightarrow R$ που θα είναι και ο ζητούμενος.

Πράγματι:

$r_1 \circ (\rho \circ \tau \circ x) = v \circ \tau \circ x = v \circ \bar{v} \circ x = r_1 \circ \rho \circ \tilde{r}_1 \circ \varepsilon_1 \circ x = r_1 \circ \bar{r}_1 \circ (\rho_1 \circ \varepsilon_0 \circ x) = r_1 \circ (\bar{r}_1 \circ \rho_1 \circ \varepsilon_0) \circ y = r_1 \circ (\rho \circ \tau \circ y)$.

Ομοίως: $r_0 \circ (\rho \circ \tau \circ x) = r_0 \circ (\rho \circ \tau \circ y)$.

Επειδή τα $r_0, r_1$ είναι απο κοινού μονομορφικά έχουμε: $(\rho \circ \tau) \circ x = (\rho \circ \tau) \circ y$.

Αρα, υπάρχει $t : R \underset{\times}{\times} R \longrightarrow R$ τέτοιος ώστε $t \circ e = \rho \circ \tau$ .

Εχουμε:

$$r_0 \circ t \circ e = r_0 \circ (\rho \circ \tau) = r_0 \circ \bar{r}_0 \circ e$$

$$r_1 \circ t \circ e = r_1 \circ (\rho \circ \tau) = r_1 \circ \bar{r}_1 \circ e$$

Επειδή $e$ ομαλός επιμορφισμός:

$$r_0 \circ t = r_0 \circ \bar{r}_0$$

$$r_1 \circ t = r_1 \circ \bar{r}_1$$

■

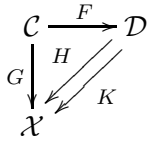
# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

# ΠΛΗΡΩΣΗ ΩΣ ΠΡΟΣ ΣΥΝΟΡΙΑ

## 3.1 ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ KAN

**Ορισμός 3.1** *Εστω δύο συναρτητές* $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *και* $G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{X}$. *Η αριστερή Kan επέκταση της* $G$ *κατα μήκος του* $F$, *εάν υπάρχει, είναι το ζεύγος* $(K, \alpha)$, *όπου:*

- $K : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{X}$ *συναρτητής.*
- $\alpha : G \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} K \circ F$ *φυσικός ισομορφισμός που ικανοποιεί την ακόλουθη καθολική ιδιότητα:*




*Αν* $(H, \beta)$ *είναι ένα άλλο ζεύγος με* $H : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{X}$ *συναρτητής και* $\beta : G \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} H \circ F$ *φυσικός ισομορφισμός τότε υπάρχει μοναδικός φυσικός μετασχηματισμός* $\gamma : \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} H$ *τέτοιος ώστε:* $(\gamma * F) \circ \alpha = \beta$.

Θα συμβολίζουμε με $Lan_F G$ την αριστερή Kan επέκταση του $G$ κατα μήκος του $F$. Δυικά την δεξιά Kan επέκταση θα την συμβολίζουμε $Ran_F G$.

Με άλλα λόγια, η αριστερή Kan επέκταση $Lan_F G$, αντίστοιχα δεξιά $Ran_F G$, είναι η αριστερή, δεξιά, προσάρτηση του συναρτητή:

$$T : \mathcal{X}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathcal{X}^{\mathcal{C}}$$

Οπως έχουμε αναφέρει οι επεκτάσεις Kan δεν υπάρχουν πάντα, ιδιαίτερα η αριστερή. Θα αναφέρουμε στη συνέχεια ένα θεώρημα χωρίς απόδειξη σχετικά με την ύπαρξη της αριστερής Kan επέκτασης.

**Θεώρημα 3.1** *Εστω δύο συναρτητές $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ και $G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{X}$, αν η $\mathcal{C}$ είναι μικρή κατηγορία και η $\mathcal{X}$ συν-πλήρης, τότε η αριστερή Kan επέκταση $Lan_F G$ υπάρχει.*

**Πρόταση 3.1** *Εστω $\mathcal{C}$ μικρή κατηγορία και $y : \mathcal{C} \longrightarrow [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ η εμφύτευση Yoneda και $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{X}$, όπου $\mathcal{X}$ συν-πλήρης. Τότε η αριστερή Kan επέκταση του $F$ κατα μήκος του $y$ υπάρχει και υπολογίζεται ως εξής:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{y} & [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}] \\ {\scriptstyle F}\downarrow & \swarrow_{Lan_y F} & \\ \mathcal{X} & & \end{array}$$

$$(Lan_y F)(G) = colim(y \downarrow G \xrightarrow{\pi} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{X})$$

*Οπου $y \downarrow G$ είναι η κατηγορία των στοιχείων του $G$ $(el(G))$.*

Στο σημείο αυτό θα αναφερθούμε σ'ένα παράδειγμα ύπαρξης της αριστερής Kan επέκτασης η ιδιαιτερότητα του οποίου βρίσκεται στην κατηγορία $\mathbf{\Delta}$ την οποία ονομάζουμε μονόπλοκη κατηγορία (simplicial category).
Πιο συγκεκριμένα, έστω $y : \mathbf{\Delta} \longrightarrow [\mathbf{\Delta}^{op}, \mathrm{Set}]$ η εμφύτευση του Yoneda απο την κατηγορία $\mathbf{\Delta}$ στην κατηγορία $[\mathbf{\Delta}^{op}, \mathrm{Set}]$ κατηγορία των μονόπλοκων συνόλων (simplicial sets) και $\Delta : \mathbf{\Delta} \longrightarrow \mathrm{Top}$ ο συναρτητής απο την $\mathbf{\Delta}$ στην κατηγορία των τοπολογικών χώρων $\mathrm{Top}$, τότε υπάρχει η αριστερή Kan επέκταση του $\Delta$ κατα μήκος της εμφύτευσης Yoneda:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{\Delta} & \xrightarrow{y} & [\mathbf{\Delta}^{op}, \mathrm{Set}] \\ {\scriptstyle \Delta}\downarrow & \swarrow_{Lan_y \Delta} & \\ \mathrm{Top} & & \end{array}$$

Τα αντικείμενα της κατηγορίας $\mathbf{\Delta}$ είναι πεπερασμένα μη-κενά διατεταγμένα σύνολα της μορφής $: n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, $n \geq 0$ και τα βέλη $f : n \longrightarrow n'$ είναι μονότονες συναρτήσεις τέτοιες ώστε αν $0 \leq i \leq j < n$ τότε $f(i) \leq f(j)$.

Χαρακτηριστικό της κατηγορίας $\mathbf{\Delta}$ είναι οτι έχει άμεση γεωμετρική ερμηνεία, η οποία δίνεται απο τον συναρτητή $\Delta : \mathbf{\Delta} \longrightarrow \mathrm{Top}$. Ο συναρτητής αυτός αναπαριστά την κατηγορία $\mathbf{\Delta}$ μέσα στην κατηγορία των τοπολογικών χώρων με τον εξής τρόπο:
Εστω $n+1 = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ ένα στοιχείο της $\mathbf{\Delta}$ τότε $\mathbf{\Delta}_{n+1} := \{(t_0, t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_i \geq 0\,,\, \sum t_i = 1\}$. Δηλαδή, το $\mathbf{\Delta}_{n+1}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^{n+1}$. Για $n = 1$ το $\mathbf{\Delta}_1$ είναι ένα σημείο, για $n = 2$ το $\mathbf{\Delta}_2$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα και για $n = 3$ το $\mathbf{\Delta}_3$ είναι επιφάνεια.
Εστω τώρα οτι έχουμε τον μορφισμό $f : n+1 \longrightarrow m+1$ τότε μέσω του $\mathbf{\Delta}$ απεικονίζεται στο $\mathbf{\Delta}_f : \mathbf{\Delta}_{n+1} \longrightarrow \mathbf{\Delta}_{m+1}$, όπου $\mathbf{\Delta}_{n+1} := \{(t_0, t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_i \geq 0\,,\, \sum t_i = 1\}$ και $\mathbf{\Delta}_{m+1} := \{(s_0, s_1, \ldots, s_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid t_i \geq 0\,,\, \sum s_i = 1\}$.
Η απεικόνιση $\mathbf{\Delta}_f$ ορίζεται ως εξής:

$\mathbf{\Delta}_f(t_0,\ldots,t_n)=(s_0,\ldots,s_m)$, όπου $s_j=\sum_{f(i)=j} t_i$, δηλ. κάθε $s_j$ είναι το άθροισμα όλων εκείνων των $t_i$ για τα οποία ισχύει ότι $f(i)=j$.
Αν υπολογίσουμε το άθροισμα των $s_j$ έχουμε: $\sum_j s_j=\sum_j\sum_{f(i)=j} t_i=\sum_i t_i=1$. Στο διπλό άθροισμα $\sum_j\sum_{f(i)=j} t_i$ τα $t_i$ εμφανίζονται όλα και μόνο μια φορά επειδή $f$ συνάρτηση, δηλ. ένα $t_i$ δεν μπορεί να εμφανιστεί δύο φορές σε δύο διαφορετικά $s_j$, γιατί τότε ο δείκτης $i$ μέσω της συνάρτησης $f$ θα απεικονίζεται σε δύο διαφορετικά $j$ πράγμα άτοπο.

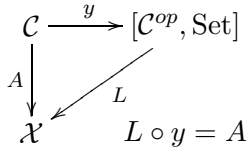
Πρωτού αναφερθούμε στην κατηγορία των μονόπλοκων συνόλων (simplical sets), πρέπει να επισημάνουμε οτι η κατηγορία αυτή είναι μια περίπτωση μιας γενικότερης κατηγορίας αυτής των μονόπλοκων αντικειμένων $[\mathbf{\Delta}^{op},X]$ (simplicial objects). Τα αντικείμενα της κατηγορίας είναι ανταλλοίωτοι συναρτητές $S:\mathbf{\Delta}^{op}\longrightarrow X$, όπου $X$ κατηγορία, στην περίπτωση που στη θέση της κατηγορίας $X$ είναι η κατηγορία των συνόλων Set έχουμε την κατηγορία $[\mathbf{\Delta}^{op},\mathrm{Set}]$.
Εστω $S:\mathbf{\Delta}^{op}\longrightarrow\mathrm{Set}$ ένα αντικείμενο της κατηγορίας αυτής και $n$ αντικείμενο της $\mathbf{\Delta}$ τότε το $S(n)$, το οποίο συμβολίζουμε $S_n$, είναι ένα σύνολο στην κατηγορία Set. Επίσης, αν $\alpha:m\longrightarrow n$ ένας μορφισμός της $\mathbf{\Delta}$ με την δράση του συναρτητή $S$ προκύπτει η συνάρτηση $S(\alpha):=S_\alpha:S_n\longrightarrow S_m$.

Οπότε η αριστερή Kan επέκταση του $\Delta$ κατα μήκος της εμφύτευσης Yoneda και σύμφωνα με την Πρόταση 3.1 είναι: $(Lan_y\Delta)(S)=colim(y\downarrow S\longrightarrow\mathbf{\Delta}\xrightarrow{\Delta}\mathrm{Top})=colim(\Delta_m)$ όπου $(m,x)\in el(S)$.

## 3.2 ΠΛΗΡΩΣΗ ΩΣ ΠΡΟΣ ΣΥΝΟΡΙΑ

Η εμφύτευση Yoneda μιας (μικρής) κατηγορίας $\mathcal{C}$ στην κατηγορία των προδραγμάτων $[\mathcal{C}^{op},\mathrm{Set}]$ είναι "μοναδικός" τρόπος για να κάνουμε την κατηγορία, $\mathcal{C}$, συν-πλήρης με την έννοια οτι, κάθε συναρτητής $A:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{X}$, όπου $\mathcal{X}$ συν-πλήρης, παραγοντοποιείται διαμέσου της εμφύτευσης Yoneda και ενός μοναδικού συναρτητή που διατηρεί συν-όρια, απο την κατηγορία των προδραγμάτων $[\mathcal{C}^{op},\mathrm{Set}]$ στην κατηγορία $\mathcal{X}$.

**Πρόταση 3.2** *Για κάθε συναρτητή $A:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{X}$, απο μια μικρή κατηγορία $\mathcal{C}$ στην τοπικά μικρή και συν-πλήρη κατηγορία $\mathcal{X}$ υπάρχει συναρτητής $L:[\mathcal{C}^{op},\mathrm{Set}]\longrightarrow\mathcal{X}$, ο οποίος διατηρεί συνόρια, κάνοντας αντιμεταθετικό το ακόλουθο διάγραμμα:*




*Ο συναρτητής $L$ μ'αυτήν την ιδιότητα είναι μοναδικός μέχρις ισομορφισμού και ορίζεται ως το συν-όριο $L(P)=colim(y\downarrow P\xrightarrow{\pi}\mathcal{C}\xrightarrow{A}\mathcal{X})$.*

Ο $L$ διατηρεί συνόρια γιατί έχει δεξιά προσαρτημένο το συναρτητή $L_* : \mathcal{X} \longrightarrow [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$, όπου $L_*(X) = \hom_{\mathcal{X}}(A(-), X)$.

**Απόδειξη:** Θα δείξουμε οτι $L \dashv L_*$, $L_* : \mathcal{X} \leftrightarrows [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}] : L$.
Αρκεί να δείξουμε οτι υπάρχει μια φυσική αντιστοιχία:

$$\frac{L(P) \longrightarrow X}{P \longrightarrow \hom_{\mathcal{X}}(A(-), X)}$$

δηλ.

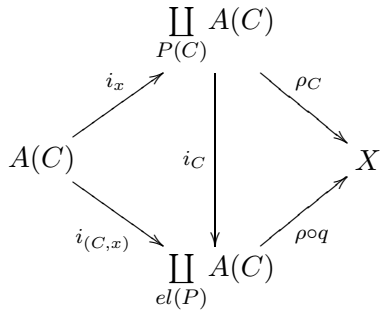
$$\frac{\mathrm{colim}(y \downarrow P \xrightarrow{\pi} \mathcal{C} \xrightarrow{A} \mathcal{X}) \longrightarrow X}{P \longrightarrow \hom_{\mathcal{X}}(A(-), X)}$$

Το συνόριο παραμετρικοποιείται απο την κατηγορία $y \downarrow P$ που είναι η κατηγορία των στοιχείων $el(P)$, την οποία είχαμε ορίσει στην προηγούμενη ενότητα, έχει αντικείμενα της μορφής $(C, x)$ με $x : y(C) \longrightarrow P$ και μορφισμούς $\alpha : (C, x) \longrightarrow (C', \psi)$ με $P_\alpha(\psi) = x$.

Η κατηγορία $\mathcal{X}$ είναι συν-πλήρης, άρα έχει συν-γινόμενα. Υπάρχουν τα συν-γινόμενα $\coprod_{(C,x)\in el(P)} A(C)$ των $A(C)$ ως προς όλα τα αντικείμενα της δείκτριας κατηγορίας $el(P)$ και τα συν-γινόμενα $\coprod_{x\in P(C)} A(C)$ των $A(C)$ ως προς όλα τα στοιχεία του $P(C)$.

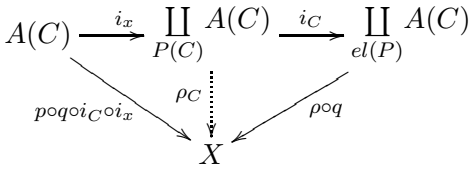
Για κάθε εμφάνιση ενός $A(C)$ υπάρχει και ένας κανονικός μορφισμός $A(C) \xrightarrow{i_{(C,x)}} \coprod_{el(P)} A(C)$ και $A(C) \xrightarrow{i_x} \coprod_{P(C)} A(C)$.

Κάθε μορφισμός $\mathrm{colim}_{el(P)} A(C) \xrightarrow{\rho} X$ επάγει μορφισμούς $\coprod_{P(C)} A(C) \xrightarrow{\rho_C} X$ ως εξής:

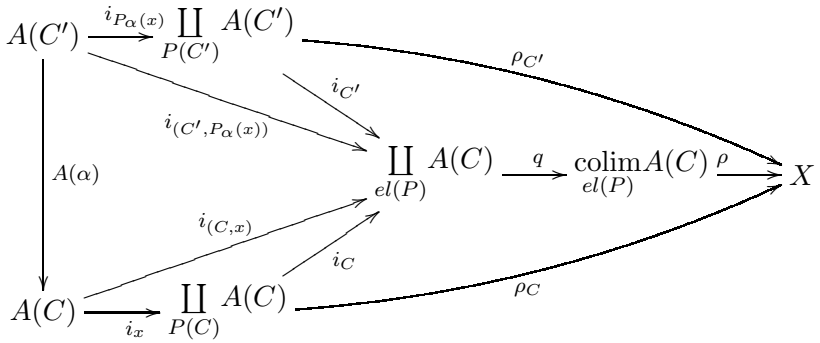



όπου $q : \coprod_{el(P)} A(C) \longrightarrow \mathrm{colim}_{el(P)} A(C)$.
Το αριστερό τρίγωνο είναι αντιμεταθετικό λόγω κατασκευής των εμφανιζόμενων μορφισμών. Για

κάθε $(C, x)$ η σύνθεση $(\rho \circ q) \circ i_{(C,x)} = (\rho \circ q) \circ i_C \circ i_x$ δημιουργεί ένα συν-κώνο για τα $A(C)$ παραμετρικοποιημένα απο τα στοιχεία του $P(C)$, δηλ.



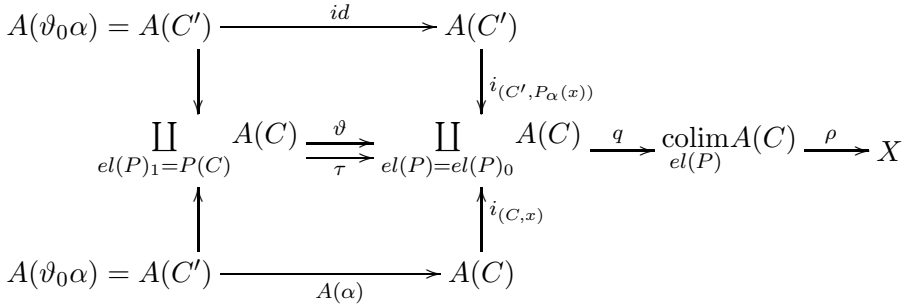

Εστω $\alpha : C' \longrightarrow C$ ένας μορφισμός της $\mathcal{C}$, έχουμε τότε το εξής διάγραμμα:




Εχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\rho_C \circ i_x \circ A(\alpha) &= (\rho \circ q) \circ i_C \circ i_x \circ A(\alpha) \\
&= (\rho \circ q) \circ i_{(C,x)} \circ A(\alpha) \qquad (i) \\
&= (\rho \circ q) \circ i_{(C',P_\alpha(x))} \qquad (ii) \\
&= (\rho \circ q) \circ i_{C'} \circ i_{P_\alpha(x)} \\
&= \rho_{C'} \circ i_{P_\alpha(x)} \qquad (*)
\end{aligned}$$

Η μετάβαση απο το $(i)$ στο $(ii)$ αιτιολογείται ως εξής:
Απο την κατασκευή των συνορίων έχουμε οτι το διάγραμμα:




Το διάγραμμα αυτό προκύπτει απο το ότι το συνόριο ενός διαγράμματος σε μια κατηγορία δίνεται ως ένας συν-εξισωτής ανάμεσα σε συν-γινόμενα.
Εχουμε τώρα την εξής ακολουθία απο (1-1) αντιστοιχίες μορφισμών:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\underset{el(P)}{\mathrm{colim}} A(C) \xrightarrow{\rho} X}{\forall C\,,\ \coprod_{P(C)} A(C) \xrightarrow{\rho_C} X}}{\forall C\,,\ P(C) \xrightarrow{\hat{\rho}_C} \hom_{\mathcal{X}}(A(C), X)}}{P \longrightarrow \hom_{\mathcal{X}}(A(-), X)}$$

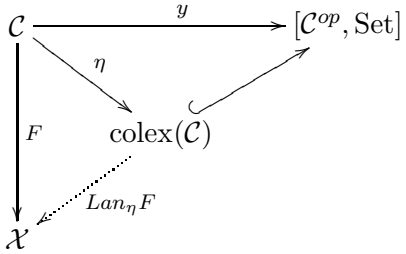
όπου $\hat{\rho}_C(x) = \rho_C \circ i_x$ .
Πρέπει να αιτιολογήσουμε δύο πράγματα. Το πρώτο είναι οτι πηγαίνοντας απο πάνω προς κάτω, η οικογένεια των μορφισμών $\hat{\rho}_C : A(C) \longrightarrow \hom_{\mathcal{X}}(A(C), X)$, για όλα τα $C$ είναι συντεταγμένες ενός φυσικού μετασχηματισμού, δηλ. οτι αντιμετατίθεται το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} P(C) & \xrightarrow{\hat{\rho}_C} & \hom_{\mathcal{X}}(A(C), X) \\ {\scriptstyle P(\alpha)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle -\circ A(\alpha)} \\ P(C') & \xrightarrow[\hat{\rho}_{C'}]{} & \hom_{\mathcal{X}}(A(C'), X) \end{array}$$

Το οποίο αληθεύει λόγω της $(*)$ .
Δεύτερον, πρέπει να αιτιολογήσουμε το πώς ξεκινώντας απο ένα φυσικό μετασχηματισμό $\varphi : P \longrightarrow \hom_{\mathcal{X}}(A(-), X)$ παίρνουμε μορφισμούς $\tilde{\varphi}_C : \coprod_{P(C)} A(C) \longrightarrow X$ , οι οποίοι παραγοντοποιούνται μέσα απο το συνόριο $\underset{el(P)}{\mathrm{colim}} P(C)$ . Δηλαδή, οι επαγώμενοι μορφισμοί $\tilde{\varphi} : \coprod_{el(P)} A(C) \longrightarrow X$ έχουν την ιδιότητα να συν-εξισώνουν τους μορφισμούς $\vartheta, \tau$ που υπεισέρχονται στην κατασκευή του συνορίου απο συν-γινόμενα και συν-εξισωτές.
Πράγματι:
$\tilde{\varphi} \circ \tau \circ i_{C'} = \tilde{\varphi} \circ i_{(C,x)} \circ A(\alpha) = \tilde{\varphi} \circ i_C \circ i_x \circ A(\alpha) = \tilde{\varphi}_C \circ i_x \circ A(\alpha) = \varphi_C(x) \circ A(\alpha) = \varphi_{C'}(x) \circ A(\alpha) = \tilde{\varphi}_{C'} \circ i_{P_\alpha(x)} = \tilde{\varphi} \circ i_{(C', P_\alpha(x))} = \tilde{\varphi} \circ \vartheta \circ i_{C'}$ ■

Ο συναρτητής $L$ είναι η γνωστή αριστερή Kan επέκταση του συναρτητή $A$ κατα μήκος της εμφύτευσης Yoneda $y$ .

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στην πλήρωση της κατηγορίας $\mathcal{C}$ ως προς πεπερασμένα συνόρια. Ορίζουμε την κατηγορία $\mathrm{colex}(\mathcal{C})$ , τα αντικείμενα της οποίας είναι πεπερασμένα συνόρια απο αναπαραστάσιμους συναρτητές, η οποία είναι υποκατηγορία της $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ .
Εχουμε το διάγραμμα:



όπου $X$ συν-πλήρης κατηγορία. Υπάρχει η αριστερή Kan επέκταση κατα μήκος του $\eta$ η οποία διατηρεί συνόρια.
Η αριστερή αυτή Kan επέκταση ορίζεται κατα σημείο ως το coend:

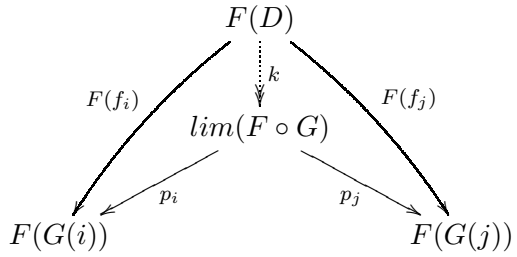
$$(Lan_\eta F)(X) = \int^C \hom_{\mathrm{colex}(\mathcal{C})}(y(C), X) \cdot F(C)$$

Διατηρεί συνόρια:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Lan}_\eta F)(\mathrm{colim} X_i) &\cong \int^C \hom_{\mathrm{colex}(\mathcal{C})}(y(C), \mathrm{colim} X_i) \cdot F(C) \\
&\cong \int^C (\mathrm{colim}(\hom_{\mathrm{colex}(\mathcal{C})}(y(C), X_i)) \cdot F(C) \\
&\cong \int^C \operatorname*{colim}_i (\hom_{\mathrm{colex}(\mathcal{C})}(y(C), X_i)) \cdot F(C)) \\
&\cong \operatorname*{colim}_i \int^C (\hom_{\mathrm{colex}(\mathcal{C})}(y(C), X_i)) \cdot F(C)) \\
&\cong \operatorname*{colim}_i (\mathrm{Lan}_\eta F)(X_i)
\end{aligned}$$

## 3.3 ΕΠΙΠΕΔΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΤΗΣ

**Ορισμός 3.2** *Εστω $\mathcal{C}$ κατηγορία με ασθενή πεπερασμένα όρια και $\mathcal{D}$ μια κατηγορία που έχει όρια. Ενας συναρτητής $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ καλείται* **επίπεδος** *αν για κάθε διάγραμμα $G : \mathbb{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ και για κάθε "ασθενή" κώνο $(f_i : D \longrightarrow G(i))_{i \in I}$ στον G, ο μορφισμός $k : F(D) \longrightarrow lim(F \circ G)$ με $F(f_i) = p_i \circ k \quad \forall i \in I$ είναι ομαλός επιμορφισμός.*




*Εδώ θα πρέπει να σημειώσουμε οτι στην βιβλιογραφία χρησιμοποιείται συχνά ο όρος "αριστερά καλύπτων" (left covering) συναρτητής, αντί του όρου επίπεδος συναρτητής.*

**Πρόταση 3.3** *Εστω $\mathcal{C}$ τοπικά μικρή κατηγορία και $y : \mathcal{C} \longrightarrow [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ η εμφύτευση Yoneda. Αν η $\mathcal{C}$ έχει ασθενή πεπερασμένα όρια τότε ο $y$ είναι επίπεδος.*

**Πρόταση 3.4** *Εστω $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ένας συναρτητής. Αν οι κατηγορίες $\mathcal{C}$ , $\mathcal{D}$ έχουν όρια τοτε ο $F$ είναι επίπεδος αν και μόνο αν διατηρεί όρια.*

## 3.4 ΕΝΝΟΙΕΣ ΕΠΙΠΕΔΟΤΗΤΑΣ ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΜΕ ΜΙΑ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ GROTHENDIECK

Στη βιβλιογραφία, όταν λέμε οτι ένας συναρτητής απο μια μικρή κατηγορία, στην κατηγορία των συνόλων $(\mathrm{Set})$ είναι επίπεδος εννοούμε οτι η αριστερή Kan επέκταση του κατα μήκος της εμφύτευσης Yoneda διατηρεί πεπερασμένα όρια, είναι δηλαδή ''αριστερά ακριβής'' (left exact). Ισοδύναμα, οτι η (δυική) κατηγορία των στοιχείων του είναι φιλτραρισμένη. Ο ισοδύ ναμος αυτός τρόπος για να δούμε την επιπεδότητα μπορεί να οριστεί ως μια ιδιότητα η οποία είναι εκφρασμένη στην γεωμετρική λογική με την γλώσσα των συναρτητών στην δοσμένη κατηγορία. Πιο συγκεκριμένα η επιπεδότητα είναι ισοδύναμη με τις ακόλουθες τρείς προτάσεις

(i) $\bigvee_{C \in \mathcal{C}} \exists x{:}\, C \;\; (x = x)$

(ii) $\forall x'{:}\, C' \;\; \forall x''{:}\, C'' \bigvee_{C} \bigvee_{\substack{u' : C \to C' \\ u'' : C \to C''}} \exists x{:}\, C \;\; (u'(x) = x' \wedge u''(x) = x'')$

(iii) $\forall x{:}\, C' \;\; (u(x) = v(x) \rightarrow \bigvee_{C} \bigvee_{\substack{w : C \to C' \\ u \circ w = v \circ w}} \exists y{:}\, C \;\; (w(y) = x))$

Αποδεικνύεται, με τον τρόπο αυτό οτι η επιπεδότητα είναι σχετική με την εσωτερική λογική μιας κατηγορίας οπου η γεωμετρική λογική μπορεί να ερμηνευτεί. Η έννοια αυτή της επιπεδότητας μπορεί να αποδοθεί σε συναρτητές με τιμές σε μικρές κυρίως κατηγορίες όταν αυτές είναι εφοδιασμέ νες με μια τοπολογία Grothendieck. Ετσι για παράδειγμα, όταν μελετάμε την ακριβή πλήρωση η κατηγορία στόχος, που είναι ακριβής κατηγορία, είναι εφοδιασμένη με μια τοπολογία Grothendieck που παράγεται απο τα καλύμματα που αποτελούνται απο ομαλούς επιμορφισμούς.

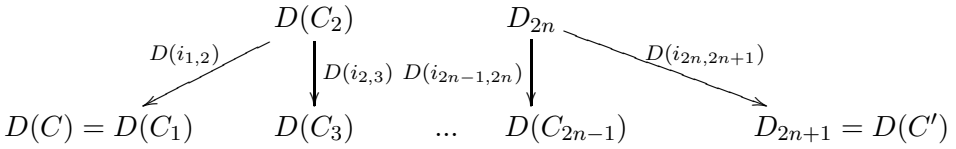
Η έννοια του ''αριστερά καλύπτωντος'' συναρτητή απο μια κατηγορία με ασθενή πεπερασμένα όρια σε μια ακριβή κατηγορία αποδεικνύεται οτι είναι η έννοια του επίπεδου συναρτητή σε σχέση με μια τοπολογία Grothendieck (όπως ειπώθηκε πριν).
Επιπλέον, αν ξεκινήσουμε με ένα κατάλληλο είδος συναρτητή απο μια κατηγορία με κάποια ασθενή πεπερασμένα όρια, ο συναρτητής που προκύπτει απο την καθολικότητα παίρνεται ως η αριστερή

Kan επέκταση. Η κατηγορία στόχος έχει κάποια είδη συν-ορίων τα οποία μας επιτρέπουν να υπολογίσουμε την αριστερή Kan επέκταση. Το ερώτημα τώρα που τίθεται είναι πότε αυτή η επέκταση είναι αριστερά ακριβής;
Σε κάποια αδημοσίευτη δουλειά του ο A.Kock καταπιάνεται με την εξής ερώτηση: Θεωρούμε ένα συναρτητή απο μια μικρή κατηγορία σε μια συν-πλήρη κατηγορία η οποία είναι εφοδιασμένη με μια τοπολογία Grothendieck. Υποθέτουμε οτι ο συναρτητής είναι επίπεδος σε σχέση με την εσωτερική λογική της κατηγορίας στόχο. Υπάρχει η αριστερή Kan επέκταση κατα μήκος της εμφύτευσης Yoneda στην (πλήρη) κατηγορία των προ-δραγμάτων (presheaf);
Η απάντηση είναι ναι, αρκεί τα συν-όρια που χρησιμοποιούνται στον ορισμό της Kan επέκτασης να είναι, όπως τα λέει ο A.Kock, "postulated" (καθορισμένα). Αυτό σημαίνει οτι στην εσωτερική λογική της κατηγορίας στόχος, τα συν-όρια υπολογίζονται όπως στα σύνολα: Κάθε (γενικευμένο) στοιχείο του συν-ορίου προέρχεται απο ένα στοιχείο των συνιστωσών του συν-ορίου και δύο τέτοια στοιχεία απο συνιστώσες ταυτίζονται στο συν-όριο αν είναι συνδεδεμένα με ένα κατάλληλο "ζιγκ-ζαγκ" (η περιγραφή αυτή είναι εκφρασμένη στη γεωμετρική λογική).
Πιο συγκεκριμένα έχοντας ένα διάγραμμα $D : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ στο $(\mathcal{D}, j)$ με ένα συν-κώνο $(L, l : D \Rightarrow L)$, λέμε οτι ο συν-κώνος είναι "καθορισμένος" αν οι ακόλουθες δύο συνθήκες ισχύουν στην εσωτερική λογική του $(\mathcal{D}, j)$ .

(1) $\forall x : L \bigvee_{C \in \mathcal{C}} \exists y : D(C) \ \ (l_C(y) = x)$

(2) $\forall x : D(C)\ \forall y : D(C') \ \ (l_C(x) = l_{C'}(y) \rightarrow \bigvee_{\mathcal{Z}(D(C), D(C'))} \exists z_1 : D(C_2)\ ...\ \exists z_n : D(C_{2n})\ (D(i_{1,2})(z_1) = x\ \wedge D(i_{2,3})(z_1) = D(i_{4,3})(z_2)\ \wedge ...\wedge\ D(i_{2n+1,2n})(z_n) = y))$

όπου

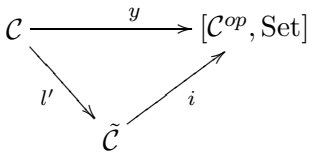



Αν η τοπολογία $j$ είναι υποκανονική τότε κάθε καθορισμένος συν-κώνος θα είναι ακριβώς ένα συν-όριο συν-κώνου. Το κύριο αποτέλεσμα που προκύπτει απ'όλα τα παραπάνω είναι το ακόλουθο θεώρημα:

**Θεώρημα 3.2** *Εστω $\mathcal{D}$ μια συν-πλήρης κατηγορία με πεπερασμένα όρια, $j$ μια υποκανονική τοπολογία Grothendieck επι της $\mathcal{D}$, $(\mathcal{D}, j)$, και $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ένας επίπεδος συναρτητής. Εστω $D : \mathbb{I} \longrightarrow [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ ένα πεπερασμένο διάγραμμα. Αν τα συν-όρια που χρησιμοποιούνται για την κατασκευή της $(Lan_y F)(D_i)$ είναι "καθορισμένα", για όλα τα $i \in \mathbb{I}$, τότε η $Lan_y F$ διατηρεί τα όρια του διαγράμματος $D$.*

Στην περίπτωση που θα μας απασχολήσει δηλαδή, σε μια ομαλή (πιο συγκεκριμένα ακριβή) κατηγορία οι ομαλοί επιμορφισμοί είναι ευσταθείς ως προς εφελκύσεις έτσι υπάρχει τοπολογία Grothendieck η οποία παράγεται απο απλούς ομαλούς επιμορφισμούς (τέτοιοι μορφισμοί ορίζουν μια βάση για την τοπολογία). Θα συμβολίζουμε με $j_{reg}$ αυτή την τοπολογία, η οποία είναι υποκανονική.

**Λήμμα 3.1** *Εστω $l' : \mathcal{C} \longrightarrow \tilde{\mathcal{C}}$ η αριστερά ακριβής εμφύτευση της μικρής κατηγορίας $\mathcal{C}$ στην πλήρη υποκατηγορία της $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ την $\tilde{\mathcal{C}}$. Μέσω της εμφύτευσης Yoneda έχουμε:*

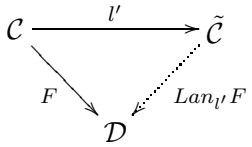



*με $y = i \circ l'$.*
*Επίσης έστω $\mathcal{D}$ μια κατηγορία εφοδιασμένη με μια υποκανονική τοπολογία Grothendieck $j$ και $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ένας $j$-επίπεδος συναρτητής. Υποθέτουμε επίσης οτι για όλα τα $X \in \tilde{\mathcal{C}}$ η κατηγορία $l' \downarrow X$ έχει μια τελική υποκατηγορία $L_X$ με την ιδιότητα οτι τα συν-όρια της μορφής $L_X$ υπάρχουν στη $\mathcal{D}$ και είναι $j$-"καθορισμένα". Τότε η αριστερή Kan επέκταση του $F$ κατα μήκος του $l'$ $(Lan_{l'}F)$ υπάρχει και είναι αριστερά ακριβής.*

**Απόδειξη:** Η αριστερή Kan επέκταση υπάρχει και υπολογίζεται, όπως έχουμε αναφέρει, ως εξής:

$$Lan_{l'}F(X) = \mathrm{colim}(l' \downarrow X \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}) = \mathrm{colim}(L_X \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D})$$

Αρα έχουμε το διάγραμμα:




Για να δείξουμε οτι είναι αριστερά ακριβής, υποθέτουμε οτι έχουμε ένα πεπερασμένο διάγραμμα $D : \mathcal{J} \longrightarrow \tilde{\mathcal{C}}$, τότε σύμφωνα με το θεώρημα του A.Kock (θεώρημα 3.2) και έχοντας οτι για όλα τα $X \in \tilde{\mathcal{C}}$, $l' \downarrow X \cong y \downarrow iX$, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Lan}_{l'}F)(\mathrm{lim}D) &\cong \mathrm{colim}(l' \downarrow \mathrm{lim}D \to \mathcal{C} \to \mathcal{D}) \\
&\cong \mathrm{colim}(y \downarrow i(\mathrm{lim}D) \to \mathcal{C} \to \mathcal{D}) \\
&\cong \mathrm{colim}(y \downarrow \mathrm{lim}(iD) \to \mathcal{C} \to \mathcal{D}) \\
&\cong \mathrm{lim}_{\mathcal{J}}\mathrm{colim}(y \downarrow iD_j) \to \mathcal{C} \to \mathcal{D}) \\
&\cong \mathrm{lim}_{\mathcal{J}}\mathrm{colim}(l' \downarrow D_j) \to \mathcal{C} \to \mathcal{D}) \\
&\cong \mathrm{lim}_{\mathcal{J}}(\mathrm{Lan}_k F)(D_j)
\end{aligned}$$

■

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

# ΠΛΗΡΩΣΗ ΩΣ ΠΡΟΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΑΚΡΙΒΕΙΑΣ

## 4.1 ΟΜΑΛΗ ΠΛΗΡΩΣΗ - ΑΚΡΙΒΗΣ ΠΛΗΡΩΣΗ

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε την ομαλή και ακριβής πλήρωση μιας ''ασθενούς'' πλήρους κατηγορίας και θα αποδείξουμε οτι κάθε επίπεδος συναρτητής απο μια ''ασθενή'' πλήρη κατηγορία σε μια ομαλή (αντίστοιχα, ακριβής) κατηγορία έχει αριστερή Kan επέκταση.

**Ορισμός 4.1** *Εστω* $y : \mathcal{C} \longrightarrow [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ *η εμφύτευση Yoneda. Ενας συναρτητής* $F : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathrm{Set}$ *είναι ''ασθενώς'' αναπαραστάσιμος αν υπάρχει ομαλός επιμορφισμός* $y(C) \longrightarrow F$, *όπου* $C \in \mathcal{C}$. *Επίσης λέμε οτι ο F είναι ομαλά καλυμμένος απο το C*

Ορίζουμε τώρα τις επεκτάσεις $\mathcal{C}_{reg}$ (ομαλή πλήρωση) και $\mathcal{C}_{ex}$ (ακριβής πλήρωση) της $\mathcal{C}$ :

- $\mathcal{C}_{reg}$ είναι η πλήρης υποκατηγορία της $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ τα αντικείμενα της οποίας είναι αυτοί οι ''ασθενείς'' αναπαραστάσιμοι συναρτητές που είναι υποσυναρτητές των γινομένων απο αναπαραστάσιμους συναρτητές
- $\mathcal{C}_{ex}$ είναι η πλήρης υποκατηγορία της $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$, απο συναρτητές F τέτοιους ώστε να υπάρχει ένας ομαλός επιμορφισμός $e : y(C) \longrightarrow F$ του οποίου το ζεύγος πυρήνα $(m, n : G \longrightarrow y(C))$ να έχει την ιδιότητα οτι ο G είναι ξανά ''ασθενώς'' αναπαραστάσιμος

Το επόμενο θεώρημα είναι το βασικότερο του κεφαλαίου στη απόδειξη του οποίου αναλύεται ο τρόπος με τον οποίο δείχνουμε οτι οι επεκτάσεις που ορίσαμε πιο πάνω είναι αντίστοιχα ομαλή-ακριβής.

**Θεώρημα 4.1** *Αν $\mathcal{C}$ είναι "ασθενής" πλήρης κατηγορία, τότε η $\mathcal{C}_{reg}$ είναι ομαλή κατηγορία και η $\mathcal{C}_{ex}$ ακριβής. Επιπλέον οι εγκλισμοί απο την $\mathcal{C}_{reg}$ και την $\mathcal{C}_{ex}$ στην $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ είναι ομαλοί.*

**Απόδειξη:** .
**Βήμα 1** Η $\mathcal{C}_{reg}$ έχει γινόμενα:

Εστω $(F_i)_{i\in I}$ αντικείμενα της $\mathcal{C}_{reg}$ όπου $F_i : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathrm{Set}$ "ασθενείς" αναπαραστάσιμοι συναρτητές. Αν, στην κατηγορία $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$, $F_i$ υποαντικείμενο του γινομένου $\prod_{j\in I_i} y(C_j)$ (δηλ. υπάρχει μονομορφισμός $F_i \rightarrowtail \prod_{j\in I_i} y(C_j)$ ), τότε και το "γινόμενο" των συναρτητών $\prod F_i$ είναι υποαντικείμενο του $\prod_{j\in I_i} y(C_j)$ δηλ. ($\prod F_i \rightarrowtail \prod_{j\in I_i} y(C_j)$ , με $i \in I$ .

Αν οι μορφισμοί $p_i : y(D_i) \longrightarrow F_i$ είναι ομαλοί επιμορφισμοί τότε και ο μορφισμός $\prod p_i : \prod y(D_i) \longrightarrow \prod F_i$ (1) είναι ομαλός επιμορφισμός, γιατί:
Στην κατηγορία $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ μια απεικόνιση είναι ομαλός επιμορφισμός ανν είναι επί κατα σημείο, άρα αρκεί να δείξουμε οτι η απεικόνιση $\prod p_i : \prod y(D_i) \longrightarrow \prod F_i$ είναι κατα σημείο επί.
Για κάθε $C \in \mathcal{C}$ έχουμε:

$$(\prod p_i)(C) : (\prod y(D_i))(C) \longrightarrow (\prod F_i)(C)$$

κάθε στοιχείο του $(\prod y(D_i))(C)$ είναι της μορφής $(x_1 \in y(D_1)(C), \ldots, x_n \in y(D_n)(C))$ και απεικονίζεται σε στοιχείο της μορφής $(p_1(x_1) \in F_1(C), \ldots, p_n(x_n) \in F_n(C))$ του $(\prod F_i)(C)$. Εστω $(b_1, \ldots, b_n) \in (\prod F_i)(C) = \prod F_i(C)$ με $b_i \in F_i(C)$ θα δείξουμε οτι $b_i = p_i(\alpha_i)$ με $\alpha_i \in y(D_i)(C)$ για κάθε $i \in I$ .
Γενικά: Εστω $p_i : X_i \longrightarrow Y_i$ ομαλός επιμορφισμός, όπου $X_i, Y_i \in \mathcal{C}_{reg}$ , δηλ. $p_i(C) : X_i(C) \longrightarrow Y_i(C)$ επί. Αρα για κάθε $b \in Y_i(C)$ υπάρχει $\alpha \in X_i(C)$ τέτοιο ώστε $p_i(\alpha) = b$ .
$\prod p_i : \prod X_i \longrightarrow \prod Y_i$ και $(\prod p_i)(C) : (\prod X_i)(C) \longrightarrow (\prod Y_i)(C)$ , όμως $(\prod X_i)(C) \cong \prod X_i(C)$ και $(\prod Y_i)(C) \cong \prod Y_i(C)$ . Κάθε απεικόνιση $p_i(C) : X_i(C) \longrightarrow Y_i(C)$ είναι επί άρα και για κάθε $(b_1, \ldots, b_n) \in \prod Y_i(C)$ υπάρχει $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ τέτοιο ώστε $p_i(\alpha_i) = b_i$ . Κατα συνέπεια η απεικόνιση $\prod p_i : \prod X_i \longrightarrow \prod Y_i$ είναι κατα σημείο επι άρα ομαλός επιμορφισμός, άρα και στην περίπτωση που μας ενδιαφέρει η απεικόνιση $\prod p_i : \prod y(D_i) \longrightarrow \prod F_i$ είναι ομαλός επιμορφισμός.

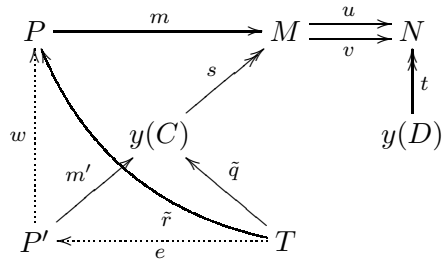
Εστω $Q$ το "ασθενές" γινόμενο όλων των $D_i \in \mathcal{C}$ τότε το μοναδικό βέλος $y(Q) \longrightarrow \prod y(D_i)$ (2) είναι ομαλός επιμορφισμός.

Απο τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε οτι $y(Q) \longrightarrow \prod F_i$ ομαλός επιμορφισμός, αρα $\prod F_i \in \mathcal{C}_{reg}$.

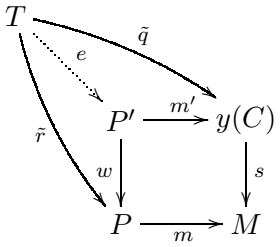
**Βήμα 2** Η $\mathcal{C}_{reg}$ έχει εξισωτές:

Εστω $(u, v : M \longrightarrow N)$ ζεύγος βελών της $\mathcal{C}_{reg}$ και $m : P \longrightarrow M$ εξισωτής των $u$ και $v$ στην κατηγορία $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$. $P$ υποαντικείμενο του $M$ και το $M$ είναι υποαντικείμενο του γινομένου αναπαραστάσιμων συναρτητών, άρα και το $P$ είναι υποαντικείμενο του ίδιου γινομένου.

Για να δείξουμε οτι το $P$ μπορεί να καλυφθεί ομαλά απο αναπαραστάσιμο συναρτητή παίρνουμε, έστω $s : y(C) \longrightarrow M$ , $t : y(D) \longrightarrow N$ ομαλοί επιμορφισμοί, τότε:




οπου $m$ εξισωτής των $u, v$ και $m'$ εξισωτής των $u \circ s, v \circ s$, άρα:
$(u \circ s) \circ m' = (v \circ s) \circ m' \Rightarrow u \circ (s \circ m') = v \circ (s \circ m')$, επειδή $m$ εξισωτής των $u, v$ άρα υπάρχει μοναδικό $w : P' \longrightarrow P$. Το $w$ ομαλός επιμορφισμός γιατί είναι η εφέλκυση του ομαλού επιμορφισμού $s$ και η κατηγορία $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ είναι ομαλή.
Το ακόλουθο διάγραμμα είναι εφέλκυση




$s \circ m' = m \circ w$ ισχύει γιατί $m$ εξισωτής.
Εστω αντικείμενο $T$ και μορφισμοί $\tilde{q}, \tilde{r}$ τέτοιοιω ώστε $s \circ \tilde{q} = m \circ \tilde{r}$
Ομως $u \circ m = v \circ m \Rightarrow u \circ m \circ \tilde{r} = v \circ m \circ \tilde{r} \Rightarrow u \circ (s \circ \tilde{q}) = v \circ (s \circ \tilde{q}) \Rightarrow (u \circ s) \circ \tilde{q} = (v \circ s) \circ \tilde{q}$.
Επειδή $m'$ εξίσωτης των $u \circ s, v \circ s$ υπάρχει μοναδικό βέλος $e : T \longrightarrow P'$ ώστε $\tilde{q} = m \circ e$.
Ομως και το άλλο πλευρικό τρίγωνο αντιμετατίθεται γιατί:

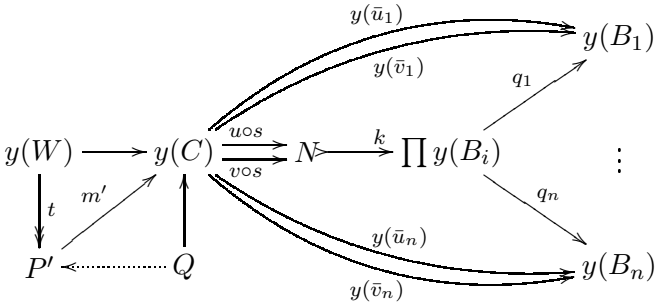
$$m \circ \tilde{r} = s \circ \tilde{q} = s \circ m' \circ e = m \circ w \circ e \Rightarrow \tilde{r} = w \circ e$$

Επίσης το $P'$ μπορεί να καλυφθεί ομαλά απο αναπαραστάσιμο συναρτητή. Πράγματι, έστω $k : N \longrightarrow \prod y(B_i)$ μονομορφισμός και $q_i : \prod y(B_i) \longrightarrow y(B_i)$ προβολές γινομένου. Τότε το $P'$ είναι ο απο κοινού εξισωτής της οικογένειας $(q_i \circ k \circ u \circ s, q_i \circ k \circ v \circ s : y(C) \longrightarrow y(B_i))_{i \in I}$.

$$y(C) \underset{v \circ s}{\overset{u \circ s}{\rightrightarrows}} N \xrightarrow{k} \prod y(B_i) \xrightarrow{q_i} y(B_i)$$

Εφόσον τα $C, B_i$ ανήκουν στην κατηγορία $\mathcal{C}$ και ο $y$ είναι πλήρης και πιστός, μπορούμε να

γράψουμε οτι $y(\bar{u}_i) = q_i \circ k \circ u \circ s$ και $y(\bar{v}_i) = q_i \circ k \circ v \circ s$. Δηλαδή έχουμε οτι:




Το $P'$ είναι όριο στην κατηγορία $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ είναι ο κώνος του διαγράμματος της οικογένειας των εξισωτών. Πράγματι, έστω $Q$ ένας άλλος κώνος για κάθε $i$ $(i = 1, \ldots, n)$ το $Q$ εξισώνει τους δύο "δρόμους" ως το $\prod y(B_i)$ ακολουθούμενο κάθε φορά απο τις προβολές στα $y(B_i)$. Αφού αυτό γίνεται για κάθε $i$, θα εξισώνει τους δύο "δρόμους" ως το $\prod y(B_i)$, επειδή η απεικόνιση $N \longrightarrow \prod y(B_i)$ είναι μονομορφισμός θα εξισώνει τους δύο "δρόμους" ως το $N$, απο τα δεδομένα εχουμε οτι το $P'$ είναι εξισωτής των $u \circ s$, $v \circ s$, άρα θα υπάρχει μοναδικός μορφισμός απο το $Q$ στο $P'$.
Εστω $W$ ο "ασθενές" απο κοινού εξισωτής της οικογένειας $(u_i, v_i : C \longrightarrow B_i)_{i \in I}$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$, άρα στην κατηγορία $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ ο $y(W)$ θα είναι κώνος θα υπάρχει δηλαδή μοναδικός μορφισμός απο το $y(W)$ στο $P'$ και επειδή ο $y$ είναι "επίπεδος" συναρτητής ο μορφισμός αυτός θα είναι ομαλός. Επειδη η κατηγορία $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ είναι ομαλή, η σύνθεση των δύο ομαλών επιμορφισμών $w$ και $t$ θα είναι ομαλός επιμορφισμός $(y(W) \longrightarrow P)$, άρα το $P$ είναι ασθενώς αναπαραστάσιμο.

Αυτό συμπληρώνει την απόδειξη οτι η $\mathcal{C}_{reg}$ έχει όρια.

**Βήμα 3** Η $\mathcal{C}_{ex}$ έχει γινόμενα:

Εστω $(F_i)_{i \in I}$ αντικείμενα της $\mathcal{C}_{ex}$, υπάρχουν ομαλοί επιμορφισμοί $p_i : y(D_i) \longrightarrow F_i$ τέτοιοι ώστε το ζεύγος πυρήνα

$$M_i \underset{g_i}{\overset{f_i}{\rightrightarrows}} y(D_i) \xrightarrow{p_i} F_i$$

μπορεί να καλυφθεί ομαλά απο κάποια $y(B_i)$.
Παίρνωντας τους ομαλούς επιμορφισμούς $q_i : y(B_i) \longrightarrow M_i$ (για όλα τα $i \in I$), τότε και το $\prod q_i : \prod y(B_i) \longrightarrow \prod M_i$ είναι ομαλός επιμορφισμός. Ετσι το $\prod M_i$ καλύπτεται ομαλά απο το $y(W)$, όπου $W$ είναι το ασθενές γινόμενο της οικογένειας των $B_i$.
Το $M_i$ είναι υποαντικείμενο του γινομένου $y(D_i) \times y(D_i)$, έτσι το $\prod M_i$ είναι υποαντικείμενο του γινομένου όλων των $y(D_i) \times y(D_i)$.
Αυτό δείχνει οτι ο $\prod M_i$ ανήκει στη $\mathcal{C}_{reg}$, γιατί:

- Ο $\prod M_i$ είναι αναπαραστάσιμος $(y(W) \longrightarrow \prod M_i)$

- Ο $\prod M_i$ είναι υποαντικείμενο του $y(D_i)\times y(D_i)$ (όπου $y(D_i)$ αναπαραστάσιμος συναρτητής)

Εστω $s : y(Z) \longrightarrow \prod y(D_i)$ ομαλός επιμορφισμός, όπου $Z$ είναι το "ασθενές" γινόμενο των $D_i$ . Επειδή και $\prod p_i : \prod y(D_i) \longrightarrow \prod F_i$ είναι ομαλός επιμορφισμός άρα και η συνθεσή τους $\prod p_i \circ s : y(Z) \longrightarrow \prod F_i$ είναι ομαλός επιμορφισμός.

Ορίζουμε τις εφελκύσεις:

$$\begin{array}{ccccc} H & \xrightarrow{b'} & G' & \xrightarrow{g} & y(Z) \\ {\scriptstyle\alpha'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle s} \\ G & \xrightarrow{b} & \prod M_i & \xrightarrow{\prod f_i} & \prod y(D_i) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle\prod g_i}\downarrow & & {\scriptstyle\prod p_i}\downarrow \\ y(Z) & \xrightarrow{s} & \prod y(D_i) & \xrightarrow{\prod p_i} & \prod F_i \end{array}$$

Τα $y(Z), \prod M_i, \prod y(D_i)$ ανήκουν στη $\mathcal{C}_{reg}$ , άρα και το $H \in \mathcal{C}_{reg}$ και μπορεί να καλυφθεί ομαλά απο αναπαραστάσιμο συναρτητή. Ομως το $H$ είναι το πεδίο ορισμού του ζεύγους πυρήνα του ομαλού επιμορφισμού $\prod p_i \circ s : y(Z) \longrightarrow \prod F_i$

$$y(C) \underset{f\circ\alpha'}{\overset{g\circ b'}{\rightrightarrows}} y(Z) \xrightarrow{s} \prod y(D_i) \xrightarrow{\prod p_i} \prod F_i$$

Δηλ.

$$(\prod p_i \circ s) \circ (g \circ b'), (\prod p_i \circ s) \circ (f \circ \alpha') : H \longrightarrow \prod F_i$$

όπου

$$\prod p_i \circ s : y(Z) \longrightarrow \prod F_i$$

ομαλός επιμορφισμός και επειδή $H \in \mathcal{C}_{reg}$ δηλ. είναι "ασθενώς" αναπαραστάσιμος, άρα $\prod F_i \in \mathcal{C}_{ex}$

**Βήμα 4** Η $\mathcal{C}_{ex}$ έχει εφελκύσεις (pullbacks)

Περίπτωση 1:

Εχουμε το ζεύγος πυρήνα

$$M \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} y(C) \xrightarrow{p} G$$

του ομαλού επιμορφισμού $p : y(C) \longrightarrow G$ , με $G \in \mathcal{C}_{ex}$ , τέτοιο ώστε το $M$ να είναι ομαλά καλυμένο απο ένα αναπαραστάσιμο συναρτητή. Επίσης το $M$ είναι υποαντικείμενο του γινομένου

$y(C) \times y(C)$ άρα το $M \in \mathcal{C}_{reg}$, όμως η $\mathcal{C}_{reg}$ είναι πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{C}_{ex}$, άρα έχουμε οτι $M \in \mathcal{C}_{ex}$

Περίπτωση 2:

Εχουμε τα βέλη $s : y(A) \longrightarrow G$ και $t : y(B) \longrightarrow G$ με $G \in \mathcal{C}_{ex}$, τότε $s = p \circ s'$ και $t = p \circ t'$, όπου $p : y(C) \longrightarrow G$ ομαλός επιμορφισμός και $s' : y(A) \longrightarrow y(C), t' : y(B) \longrightarrow y(C)$. Ορίζουμε το ακόλουθο διάγραμμα απο εφελκύσεις:

$$\begin{array}{ccccc} H & \longrightarrow & M & \longrightarrow & y(B) \\ \downarrow & & \downarrow & & t' \downarrow \\ N & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & y(C) \\ \downarrow & & \downarrow & & p \downarrow \\ y(A) & \xrightarrow{s'} & y(C) & \xrightarrow{p} & G \end{array}$$

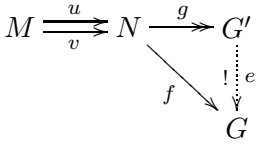
Εφόσον τα $G', y(A), y(B)$ ανήκουν στη $\mathcal{C}_{reg}$ άρα και το $H \in \mathcal{C}_{reg}$ και το $y(C) \in \mathcal{C}_{reg}$, με συνέπεια όπως και πριν $H \in \mathcal{C}_{ex}$. Δηλαδή, η εφέλκυση των $s, t$ ανήκει στη $\mathcal{C}_{ex}$!

Περίπτωση 3:

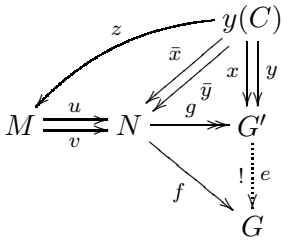
Για κάθε δύο βέλη $f : F \longrightarrow H$ και $g : G \longrightarrow H$ της $\mathcal{C}_{ex}$, θα αποδείξουμε οτι η εφέλκυση τους ανήκει και αυτή στη $\mathcal{C}_{ex}$, επειδή όμως η απόδειξη είναι αρκετά μακροσκελής την δίνουμε στο παράρτημα.

**Βήμα 5** Κάθε ζεύγος πυρήνα οποιουδήποτε μορφισμού στη $\mathcal{C}_{reg}$ έχει συν-εξισωτή:

Εστω $(u, v : M \longrightarrow N)$ το ζεύγος πυρήνα του $f : N \longrightarrow G$ που ανήκει στη $\mathcal{C}_{reg}$.
Παίρνουμε τον συν-εξισωτή των $u, v$




Για να ανήκει το $G'$ στη $\mathcal{C}_{reg}$ αρκεί να δείξουμε οτι είναι υποαντικείμενο του $G$, δηλ. ότι το $e$ είναι μονομορφισμός.
Εστω $x, y$ ζεύγος βελών απο το $y(C)$ στο $G'$, τότε έχουμε:



επειδή $y(C)$ προβολικό αντικείμενο έχουμε το ζεύγος βελών $\bar{x}, \bar{y}$ απο το $y(C)$ στο $N$. Εστω τώρα οτι

$$e \circ x = e \circ y \Rightarrow e \circ g \circ \bar{x} = e \circ g \circ \bar{y} \Rightarrow f \circ \bar{x} = f \circ \bar{y}$$

Λόγω του οτι $u, v$ είναι το ζεύγος πυρήνα του $f$, υπάρχει μοναδικό βέλος $z : y(C) \longrightarrow M$, άρα:

$$\bar{x} = u \circ z \quad , \quad \bar{y} = v \circ z$$

Τότε:

$$x = g \circ \bar{x} = g \circ u \circ z = g \circ v \circ z = g \circ \bar{y} = y$$

**Βήμα 6** Κάθε σχέση ισοδυναμίας στη $\mathcal{C}_{ex}$ έχει συν-εξισωτή:

Εστω $(u, v : M \longrightarrow N)$ σχέση ισοδυναμίας αντικειμένων της $\mathcal{C}_{ex}$, και $g : N \longrightarrow G$ ο συν-εξισωτής των $u$ και $v$ στη $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$. Θα δείξουμε οτι το $G \in \mathcal{C}_{ex}$.

Παίρνωντας τον ομαλό επιμορφισμό $y(A) \longrightarrow N$ ορίζουμε το ακόλουθο διάγραμμα απο εφελκύσεις:

$$\begin{array}{ccccc} H & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & y(A) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s} \\ M' & \longrightarrow & M & \xrightarrow{u} & N \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ y(A) & \xrightarrow{s} & N & \xrightarrow{g} & G \end{array}$$

Εφόσον τα $y(A), N$ και $M$ ανήκουν στην $\mathcal{C}_{ex}$ άρα και το $H \in \mathcal{C}_{ex}$. Ετσι το ζεύγος πυρήνα του ομαλού επιμορφισμού $g \circ s$

$$H \rightrightarrows y(A) \xrightarrow{g \circ s} G$$

καλύπτεται ομαλά απο αναπαραστάσιμο συναρτητή, άρα το $G \in \mathcal{C}_{ex}$

Τέλος, οι ομαλοί επιμορφισμοί στις κατηγορίες $\mathcal{C}_{reg}$ και $\mathcal{C}_{ex}$ είναι ευσταθείς ως προς εφελκύσεις και γινόμενα, έχοντας τις αντίστοιχες ιδιότητες της κατηγορίας $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$

■

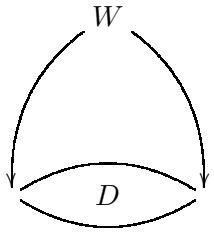
**Πόρισμα 4.1** *Εστω $k : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_{reg}$ και $l : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_{ex}$ οι περιορισμοί της εμφύτευσης Yoneda. Αν η $\mathcal{C}$ έχει ασθενή πεπερασμένα όρια τότε:*

*(i) $k$ και $l$ επίπεδοι συναρτητές.*

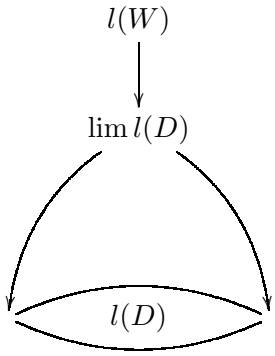
*(ii) Για κάθε $C \in \mathcal{C}$, τα $k(C)$ και $l(C)$ είναι ομαλά προβολικά στη $\mathcal{C}_{reg}$ και $\mathcal{C}_{ex}$ αντίστοιχα.*

*(iii) Για κάθε* $A \in \mathcal{C}_{ex}$, *υπάρχουν* $C \in \mathcal{C}$ *και ομαλοί επιμορφισμοί* $l(C) \longrightarrow A$ *στη* $\mathcal{C}_{ex}$.
*Επιπλέον* $A \in \mathcal{C}_{reg}$ *ανν είναι υποαντικείμενο ενός γινομένου απο αντικείμενα της* $\mathcal{C}$.

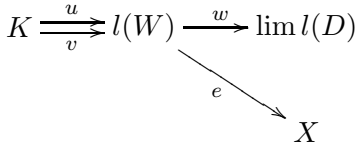
**Απόδειξη:** (i): Θα δείξουμε οτι ο $l : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_{ex}$ είναι επίπεδος, όμοια αποδεικνύεται και για τον $k$.
Εστω $W$ ασθενές όριο στη στη $\mathcal{C}$:



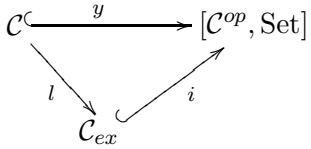

τότε μέσω του $l$ έχουμε το διάγραμμα:



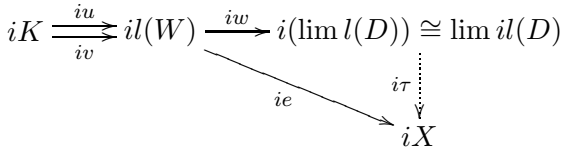

στη $\mathcal{C}_{ex}$, όπου το $\lim l(D)$ είναι το όριο των $l(D)$.
Θα δείξουμε οτι ο $l(W) \longrightarrow \lim l(D)$ είναι ομαλός επιμορφισμός:
Παίρνουμε το ζεύγος πυρήνα του



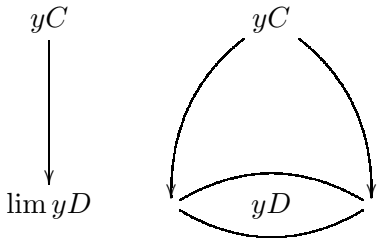

και $X$ τυχαίο με $e \circ u = e \circ v$, αρκεί να δείξουμε οτι $w$ συν-εξισωτής.
Ομως



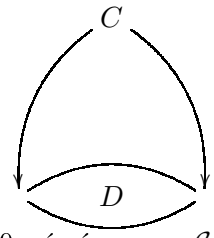

όπου $i : \mathcal{C}_{ex} \longrightarrow [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ εμφύτευση που διατηρεί και ανακλά πεπερασμένα όρια, συνεξισωτές σχέσεων ισοδυναμίας και ομαλούς επιμορφισμούς.
Μέσω λοιπόν της εμφύτευσης αυτής το ζεύγος πυρήνα γίνεται:



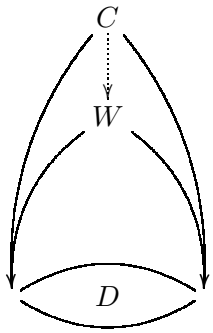

Αρκεί να δείξουμε οτι ο $iw : il(W) \longrightarrow \lim il(D)$ είναι κατα σημείο επί, ισοδύναμα ο $yW \longrightarrow \lim y(D)$ να είναι κατα σημείο επι.
Εστω ένα στοιχείο του $(\lim yD)(C)$, δηλ.



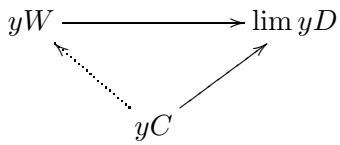

Επειδή $y$ πλήρης και πιστός άρα:




κώνος στην κατηγορία $\mathcal{C}$, όμως $W$ ασθενές όριο στη $\mathcal{C}$



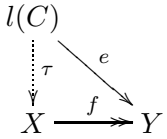

Αρα υπάρχει $yC \longrightarrow yW$ που να κάνει αντιμεταθετικό το τρίγωνο:



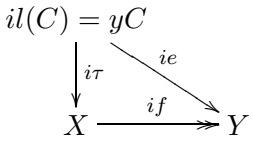

Βρήκαμε δηλαδή, στοιχείο του $(yW)(C)$ που απεικονίζεται στο στοιχείο του $(\lim yD)(C)$. Επομένως η απεικόνιση $iw : il(W) \longrightarrow \lim il(D)$ είναι κατα σημείο επί άρα ομαλός επιμορφισμός.

Συνεπώς σην κατηγορία $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ ο $iw$ είναι συνεξισωτής, άρα υπάρχει μοναδικός μορφισμός $i\tau : \lim ilD \longrightarrow iX$ και επειδή $i$ πλήρης και πιστός θα υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\tau : \lim lD \longrightarrow X$ .
Αποδείχθηκε οτι $w$ συν-εξισωτής άρα ομαλός επιμορφισμός και οτι ο $l$ είναι επίπεδος συναρτητής.

(ii) : Θα δώσουμε την απόδειξη για το $l(C)$ , όμοια είναι και για το $k(C)$ .
Εστω $f : X \longrightarrow Y$ ομαλός επιμορφισμός και $e : l(C) \longrightarrow Y$ , για να είναι το $k(C)$ ομαλά προβολικό θα πρέπει να υπάρχει μορφισμός $\tau : l(C) \longrightarrow X$ που να κάνει το ακόλουθο διάγραμμα αντιμεταθετικό:




Μέσω της $i$ το διάγραμμα γίνεται:




Επειδή το $yC$ είναι προβολικό υπάρχει μορφισμός $i\tau : yC \longrightarrow iX$ που να κάνει αντιμεταθετικό το διάγραμμα. Ομως ο $i$ είναι πλήρης και πιστός άρα υπάρχει $\tau : l(C) \longrightarrow Y$ που αντιμεταθέτει το αρχικό διάγραμμα.

(iii) : Για κάθε $A \in \mathcal{C}_{ex}$ υπάρχει $C \in \mathcal{C}$ και μορφισμός $l(C) \longrightarrow A$ , θέλω να δείξω οτι είναι ομαλός.
Μέσω της εμφύτευσης $i$ έχουμε τον μορφισμό $il(C) \longrightarrow iA$ δηλ. $yC \longrightarrow iA$ ο οποίος είναι ομαλός λόγω του οτι $A \in \mathcal{C}_{ex}$ . Ο $i$ ανακλά τους ομαλούς επιμορφισμούς, δηλ. έχουμε οτι $l(C) \longrightarrow A$ ομαλός επιμορφισμός.
Τέλος, οτι $A \in \mathcal{C}_{reg}$ ανν είναι υποαντικείμενο ενός γινομένου απο αντικείμενα της $\mathcal{C}$ προκύπτει άμεσα απο την κατασκευή της $\mathcal{C}_{reg}$ . ■

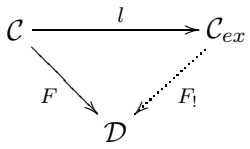
## Καθολικές Ιδιότητες των $\mathcal{C}_{\mathbf{reg}}$ και $\mathcal{C}_{\mathbf{ex}}$

**Πρόταση 4.1** *Εστω $\mathcal{C}$ κατηγορία με ασθενή πεπερασμένα όρια και $k, l$ οι περιορισμοί της εμφύτευσης Yoneda που αναφέραμε στο προηγούμενο πόρισμα.*

*(i) Αν $\mathcal{D}$ ομαλή κατηγορία, τότε κάθε επίπεδος συναρτητής $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ έχει αριστερή Kan επέκταση $F_!$ κατα μήκος της $k$ και η $F_!$ διατηρεί ομαλούς επιμορφισμούς.*

*(ii) Αν $\mathcal{D}$ ακριβής κατηγορία, τότε κάθε επίπεδος συναρτητής $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ έχει αριστερή Kan επέκταση $F_!$ κατα μήκος της $l$ και η $F_!$ διατηρεί ομαλούς επιμορφισμούς.*

**Απόδειξη:** Θα αποδείξουμε το (ii), με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται και το (i). Για την ύπαρξη της αριστερής Kan επέκτασης βασιζόμαστε στο Θεώρημα X.3.1 του S.Mac-Lane, στο βιβλίο Categories for the Working Mathematician.
Εχουμε οτι:



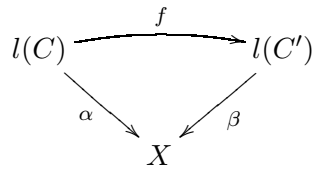

Θέλουμε να ορίσουμε τον $F_!$ ως την αριστερή Kan επέκταση το οποίο είναι ισοδύναμο με το να βρούμε τον αριστερά προσαρτημένο συναρτητή:

$$[\mathcal{C}_{ex}, \mathcal{D}] \underset{-\circ l}{\overset{Lan_l -}{\longleftarrow}} [\mathcal{C}, \mathcal{D}]$$

Δεν ξέρουμε αν η $\mathcal{D}$ έχει όλα τα συνόρια, ούτε καν τα πεπερασμένα, παρολαυτά ορίζουμε τον $F_!$ με τον "τύπο" της αριστερής Kan επέκτασης: $F_!(X) = \operatorname{colim}(l \downarrow X \xrightarrow{\pi} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D})$. Αυτό είναι δυνατό επειδή, κάθε φορά που υπολογίζουμε ένα τέτοιο συνόριο υπολογίζουμε ένα συν-εξισωτή σχέσης ισοδυναμίας που υπάρχει στη $\mathcal{D}$. Σκοπός μας είναι να δείξουμε οτι η σύνθεση $F \circ \pi : l \downarrow X \longrightarrow \mathcal{D}$ έχει συνόριο στη $\mathcal{D}$ για κάθε $X \in \mathcal{C}_{ex}$.
Η στρατηγική λοιπόν της απόδειξης είναι να δείξουμε οτι η $l \downarrow X$ περιέχει μια τελική υποκατηγορία την $e \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} e \circ u$.

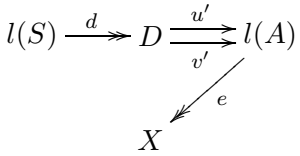
Η κατηγορία $l \downarrow X$ έχει:

- Αντικείμενα της μορφής: $l(C) \longrightarrow X$, όπου $C \in \mathcal{C}$.
- Μορφισμούς: Αν $l(C) \xrightarrow{\alpha} X$, $l(C') \xrightarrow{\beta} X$ δύο αντικείμενα της τότε μορφισμός είναι ένα $f : l(C) \longrightarrow l(C')$ τέτοιο ώστε $\beta \circ f = \alpha$

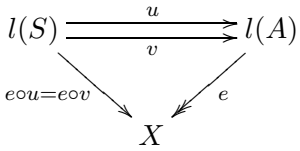



Η προβολή $\pi : l \downarrow X \longrightarrow \mathcal{C}$ απεικονίζει τα στοιχεία της $l \downarrow X$ $(l(C) \xrightarrow{\alpha} X) \mapsto C$

Εστω τώρα $X \in \mathcal{C}_{ex}$, θα υπάρχει ομαλός επιμορφισμός $e : l(A) \longrightarrow X$, όπου $A \in \mathcal{C}$.
Παίρνω το ζεύγος πυρήνα του $e : D \overset{u'}{\underset{v'}{\rightrightarrows}} l(A)$ με $D \in \mathcal{C}_{ex}$, άρα ο $e$ θα είναι ο συν-εξισωτής των $(u', v')$. Επίσης, επειδή $D \in \mathcal{C}_{ex}$ υπάρχει ομαλός επιμορφισμός $d : l(S) \longrightarrow D$.
Εχουμε λοιπόν το εξής διάγραμμα:




Ο $e$ θα είναι και συν-εξισωτής των $(u' \circ d, v' \circ d)$. Εστω $u = u' \circ d$, $v = v' \circ d$, τότε:

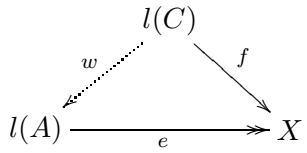



Ορίζουμε την κατηγορία $\mathcal{E}$ με μορφισμούς αυτής της μορφής η οποία είναι υποκατηγορία της $l \downarrow X$. Στη συνέχεια ορίζουμε την εμφύτευση $i : \mathcal{E} \hookrightarrow l \downarrow X$ η οποία θα δείξουμε οτι είναι "τελική".

**Λήμμα 4.1** *Η $i$ είναι "τελική"*

**Απόδειξη:**

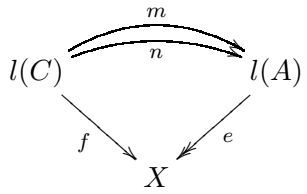
(i) Θα δείξουμε οτι για κάθε $f \in l \downarrow X$ η $f \downarrow i$ είναι μη κενή, δηλ. υπάρχει μορφισμός $f \longrightarrow i(\varepsilon)$, όπου $\varepsilon \in \mathcal{E}$.
Εστω $f : l(C) \longrightarrow X$ αντικείμενο της $l \downarrow X$ έχουμε:



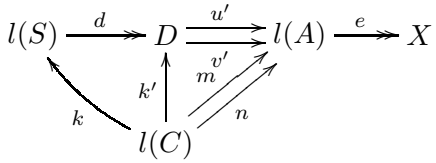

Λόγω προβολικότητας του $l$ υπάρχει μορφισμός $w : l(C) \longrightarrow l(A)$ τέτοιος ώστε $f = e \circ w \in f \downarrow i$.

(ii) Θα δείξουμε οτι η $f \downarrow i$ είναι συνεκτική κατηγορία.
Εστω $m, n$ δύο μορφισμοί της $f \downarrow i$, θέλουμε να βρούμε ενα "ζιγκ-ζαγκ" απο μορφισμούς απο το $m$ στο $n$

Περίπτωση 1:
Τα $m, n : f \longrightarrow e$




δηλ. $e \circ m = e \circ n = f$ .
Εφόσον $(u', v')$ είναι το ζεύγος πυρήνα του $e$ θα υπάρχει μοναδικός μορφισμός $k' : l(C) \longrightarrow D$ με $m = u' \circ k'$ και $n = v' \circ k'$. Λόγω και της προβολικότητας του $l(C)$ υπάρχει μορφισμός $k : l(C) \longrightarrow l(S)$ με $k' = d \circ k$ .

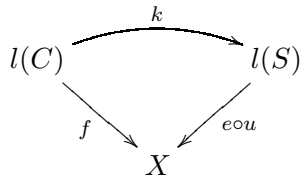



Αρα:

$$m = u' \circ d \circ k = u \circ k$$

$$n = v' \circ d \circ k = v \circ k$$

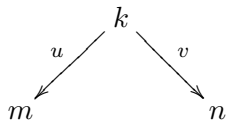
Οπου το $k \in f \downarrow i$ , γιατί: $m = u \circ k \Rightarrow e \circ m = (e \circ u) \circ k \Rightarrow f = (e \circ u) \circ k$



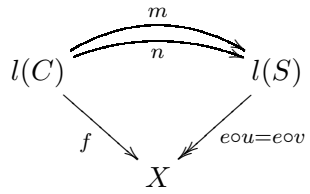

Τα $u, v$ είναι μορφισμοί της κατηγορίας $f \downarrow i$

$u : k \longrightarrow m$ $\qquad$ $v : k \longrightarrow n$

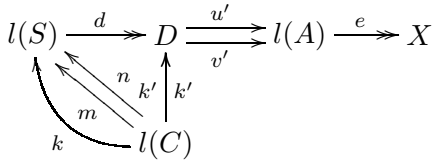
Αρα το ζητούμενο "ζιγκ-ζαγκ" είναι:



Περίπτωση 2:
Εστω $m, n : f \longrightarrow e \circ u$




δηλ. $e \circ u \circ m = e \circ v \circ n = f$

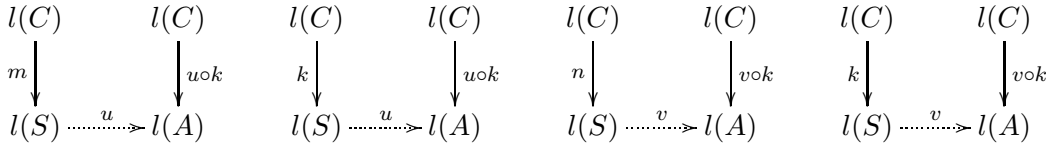



Οπότε έχουμε: $e \circ u \circ m = e \circ v \circ n \Rightarrow e \circ (u' \circ d \circ m) = e \circ (v' \circ d \circ n)$.
Επειδή $(u', v')$ το ζεύγος πυρήνα του $e$, υπάρχει μορφισμός $k' : l(C) \longrightarrow D$ τέτοιος ώστε $u' \circ d \circ m = u' \circ k'$ και $v' \circ d \circ n = v' \circ k'$
Λόγω προβολικότητας του $l(C)$ υπάρχει μορφισμός $k : l(C) \longrightarrow l(S)$ τέτοιος ώστε: $d \circ k = k'$. Προκύπτει τότε οτι:

$$u' \circ d \circ m = u' \circ k' \Rightarrow u \circ m = u' \circ d \circ k \Rightarrow u \circ m = u \circ k$$

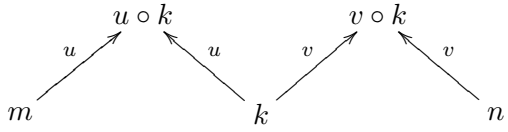
$$v' \circ d \circ n = v' \circ k \Rightarrow v \circ n = v' \circ d \circ k \Rightarrow v \circ n = v \circ k$$

Εχουμε τέσσερις μορφισμούς στην $f \downarrow i$ κατηγορία:

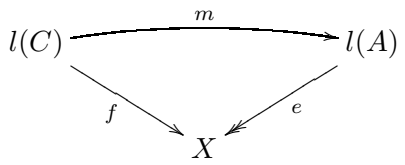


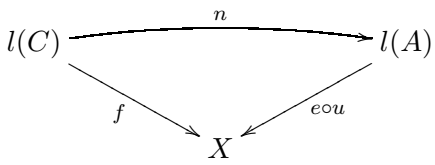

$u : m \longrightarrow u \circ k$ $\quad u : k \longrightarrow u \circ k$ $\quad v : n \longrightarrow v \circ k$ $\quad v : k \longrightarrow v \circ k$

Οι οποίοι δημιουργούν "ζιγκ-ζαγκ" που ενώνει τα $m, n$



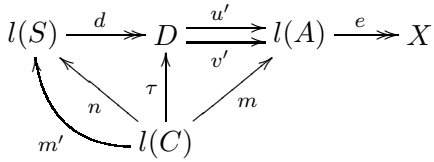
Περίπτωση 3:
Εστω $m : f \longrightarrow e$ και $n : f \longrightarrow e \circ u$

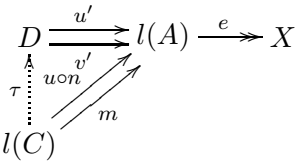


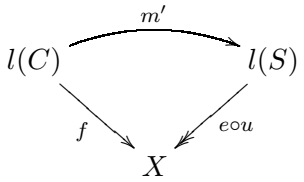

$e \circ m = f$ $\qquad\qquad$ $e \circ u \circ n = f$

Εχουμε τότε τα διαγράμματα:




Επειδή $(u', v')$ το ζεύγος πυρήνα του $e$, υπάρχει μορφισμός $\tau : l(C) \longrightarrow D$ τέτοιος ώστε $u' \circ \tau = m$ και $v' \circ \tau = u \circ n$.
Ομως λόγω προβολικότητας του $l(C)$ υπάρχει μορφισμός $m' : l(C) \longrightarrow l(S)$ τέτοιος ώστε $d \circ m' = \tau$.
Οπότε προκύπτει η σχέση: $u' \circ \tau = m \Rightarrow m = u' \circ d \circ m' = u \circ m' \Rightarrow m = u \circ m'$.
Εχουμε τότε τον μορφισμό $m' : f \longrightarrow e \circ u$




Ισχύει δηλαδη: $e \circ u \circ m' = f$, γιατί:

$$m = u \circ m' \Rightarrow e \circ m = e \circ u \circ m' \Rightarrow f = e \circ u \circ m'$$

Υπάρχουν έτσι δύο μορφισμοί $m', n : f \longrightarrow e \circ u$, απο την Περίπτωση 2 προκύπτει οτι υπάρχει "ζιγκ-ζαγκ" που ενώνει τα $m', n$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε οτι υπάρχει μορφισμός

της κατηγορίας $f \downarrow i$ που να ενώνει τα $m$ και $m'$.
Πράγματι, ο μορφισμός αυτός είναι ο $u : m' \longrightarrow m$

$$\begin{array}{ccc} l(C) & & l(C) \\ {\scriptstyle m'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m} \\ l(S) & \xrightarrow{u} & l(A) \end{array}$$

Υπάρχει λοιπόν το "ζιγκ-ζαγκ"

$$\begin{array}{ccccc} & & m'\ldots & & \\ & {\scriptstyle u}\swarrow & & \searrow & \\ m & & & & n \end{array}$$

Αρα, αποδείχθηκε οτι η κατηγορία $f \downarrow i$ είναι συννεκτική.

■

Επιστρέφουμε τώρα στην αρχική απόδειξη:
Βήμα 1:

Το $D \underset{v'}{\overset{u'}{\rightrightarrows}} l(A)$ είναι σχέση ισοδυναμίας στη κατηγορία $\mathcal{D}$ ως ζεύγος πυρήνα.

Βήμα 2:

Το $l(S) \xrightarrow{d} D \underset{v'}{\overset{u'}{\rightrightarrows}} l(A)$ είναι ανακλαστικό, συμμετρικό, μεταβατικό γράφημα στη $\mathcal{D}$, γιατί συνθέτουμε μια σχέση ισοδυναμίας μ'ένα προβολικό κάλυμμα.

**Απόδειξη:** Ανακλαστικό:
Θέλουμε να υπάρχει μορφισμός $\sigma : l(A) \longrightarrow l(S)$ τέτοιος ώστε $u \circ \sigma = v \circ \sigma = id_{l(A)}$.

$$l(S) \underset{v=v'\circ d}{\overset{\overset{\sigma}{\frown}\ u=u'\circ d}{\rightrightarrows}} l(A)$$

Ξέρουμε όμως οτι υπάρχει $\sigma' : l(A) \longrightarrow D$ με $u' \circ \sigma' = v' \circ \sigma' = id_{l(A)}$.

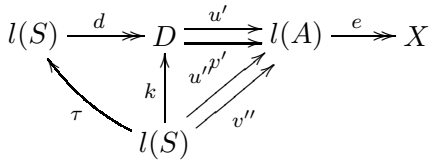
$$\begin{array}{ccccc} l(S) & \xrightarrow{d} & D & \underset{v'}{\overset{u'}{\rightrightarrows}} & l(A) \\ & {\scriptstyle \sigma}\nwarrow & \uparrow{\scriptstyle \sigma'} & & \\ & & l(A) & & \end{array}$$

Λόγω προβολικότητας του $l(A)$ υπάρχει, ο ζητούμενος, μορφισμός $\sigma : l(A) \longrightarrow l(S)$ με $d \circ \sigma = \sigma'$.

Αρα: $u \circ \sigma = u' \circ d \circ \sigma = u' \circ \sigma' = v' \circ \sigma' = v' \circ d \circ \sigma = v \circ \sigma = id_{l(A)}$ .
Συμμετρικό:
Αρκει να υπάρχει μορφισμός $\tau : l(S) \longrightarrow l(S)$ με $u \circ \tau = v$ , $v \circ \tau = u$ .

$$\tau \circlearrowright l(S) \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} l(A)$$

Υπάρχει $\tau' : D \longrightarrow D$ τέτοιος ώστε $u' \circ \tau' = v'$ , $v' \circ \tau' = u'$ . Το $(u', v')$ είναι το ζεύγος πυρήνα του $e : l(A) \longrightarrow X$ , άρα:




όπου $u'' = u' \circ \tau' \circ d$ και $v'' = v' \circ \tau' \circ d$
Επειδή: $e \circ u'' = e \circ v'' \Rightarrow e \circ (u' \circ \tau' \circ d) = e \circ (v' \circ \tau' \circ d)$
υπάρχει $k : l(S) \longrightarrow D$ με:

$$u' \circ k = u' \circ \tau' \circ d$$

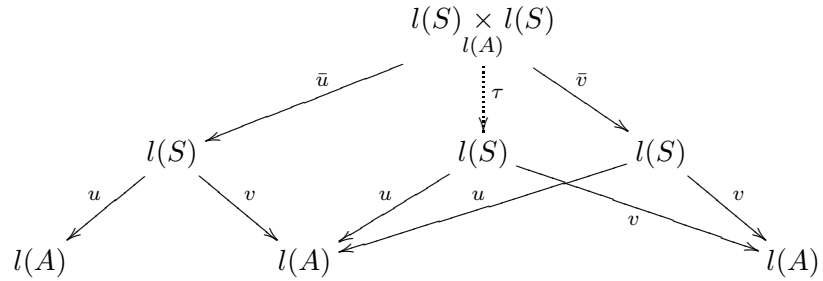
$$v' \circ k = v' \circ \tau' \circ d$$

Λόγω προβολικότητας του $l(S)$ υπάρχει $\tau : l(S) \longrightarrow l(S)$ τέτοιο ώστε $d \circ \tau = k$
Αρα:

$$u \circ \tau = u' \circ d \circ \tau = u' \circ k = u' \circ \tau' \circ d = v' \circ d = v$$

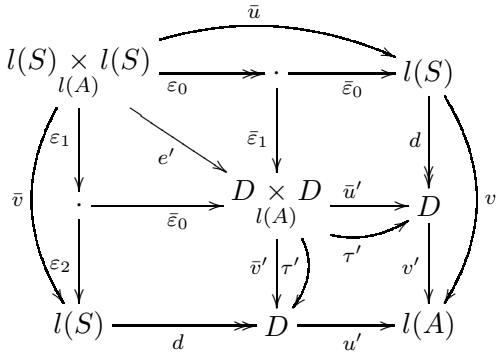
$$v \circ \tau = v' \circ d \circ \tau = v' \circ k = v' \circ \tau' \circ d = u' \circ d = u$$

Μεταβατικό:
Θέλουμε να υπάρχει $\tau : l(S) \underset{l(A)}{\times} l(S) \longrightarrow l(S)$




τέτοιος ώστε: $u \circ \tau = u \circ \bar{u}$ και $v \circ \tau = v \circ \bar{v}$ .
Ξέρουμε οτι υπάρχει μορφισμός $\tau' : D \underset{l(A)}{\times} D \longrightarrow D$

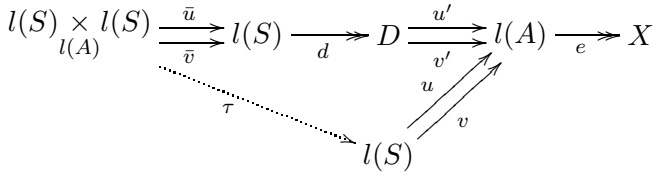
με: $u' \circ \tau' = u' \circ \bar{u}'$ και $v' \circ \tau' = v' \circ \bar{v}'$.
Εχουμε το διάγραμμα:




Το $e$ είναι συν-εξισωτής των $(u, v)$.
Ομως: $e \circ (u \circ \bar{u}) = e \circ (v \circ \bar{v})$, γιατί:

$$e \circ u \circ \bar{u} = e \circ u' \circ (d \circ \bar{u}) = (e \circ u') \circ d \circ \bar{v} = e \circ v' \circ d \circ \bar{v} = e \circ (v \circ \bar{v})$$

όπου: $d \circ \bar{u} = \tau' \circ e' = d \circ \bar{v}$.
Προκύπτει, λοιπόν το διάγραμμα:




Υπάρχει δηλαδή, μορφισμός $\tau : l(S) \underset{l(A)}{\times} l(S) \longrightarrow l(S)$
τέτοις ώστε:

$$u \circ \tau = u \circ \bar{u}$$

$$v \circ \tau = v \circ \bar{v}$$

■

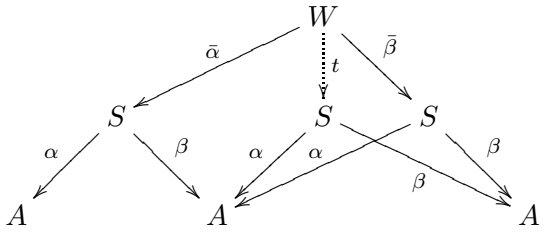
Βήμα 3:

Εχουμε δείξει, στο Βήμα 2, ότι το $l(S) \xrightarrow{d} D \underset{v'}{\overset{u'}{\rightrightarrows}} l(A)$ δηλ.( $l(S) \underset{v=l(\beta)}{\overset{u=l(\alpha)}{\rightrightarrows}} l(A)$ ) είναι ανακλαστικό, συμμετρικό γράφημα στη $\mathcal{D}$. Ομως ο $l$ είναι πλήρης και πιστός συναρτητής, άρα και το $S \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} A$ είναι ανακλαστικό, συμμετρικό γράφημα στην $\mathcal{C}$, στη συνέχεια εφαρμόζοντας τον συναρτητή $F$ παίρνουμε ότι το $F(S) \underset{F(\beta)}{\overset{F(\alpha)}{\rightrightarrows}} F(A)$ είναι και αυτό ανακλαστικό, συμμετρικό γράφημα.

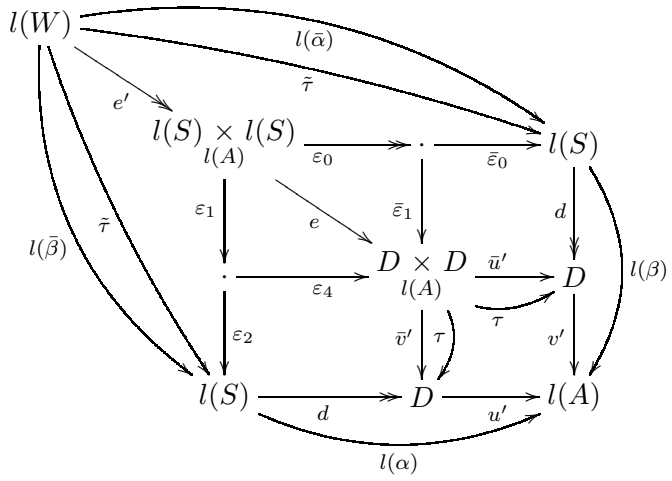
Θέλουμε να δείξουμε οτι το $S \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} A$ είναι και μεταβατικό γράφημα, αυτό όμως δεν μπορούμε να το εξάγουμε, με την ίδια διαδικασία, απο το ότι το $l(S) \underset{l(\beta)}{\overset{l(\alpha)}{\rightrightarrows}} l(A)$ είναι και μεταβατικό, γιατι η απόδειξη της μεταβατικότητας απαιτεί την ύπαρξη ορίων τα οποία υπάρχουν στην $\mathcal{D}$, η $\mathcal{C}$ όμως έχει ασθενή πεπερασμένα όρια. Για τον λόγο αυτό θα ακολουθήσουμε διαφορετικό τρόπο απόδειξης.

**Απόδειξη:** Το $S \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} A$ είναι μεταβατικό γράφημα στη $\mathcal{C}$:

Εχουμε:




Οπου $W$ είναι η ασθενής εφέλκυση και θέλουμε να βρούμε μορφισμό $t : W \longrightarrow S$ ώστε $\alpha \circ \bar{\alpha} = \alpha \circ t$ και $\beta \circ \bar{\beta} = \beta \circ t$.
Ξέρουμε οτι υπάρχει μορφισμός $\tau : D \underset{l(A)}{\times} D \longrightarrow D$, γιατι $D$ σχέση ισοδυναμίας, ώστε $u' \circ \bar{u}' = u' \circ \tau$ και $v' \circ \bar{v}' = v' \circ \tau$. Σχηματίζουμε το εξής διάγραμμα εφελκύσεων:




Το "γύρω-γύρω" αντιμετατίθεται, επειδή $W$ ασθενές όριο στη $\mathcal{C}$ και η εμφύτευση $l$ είναι επίπεδη υπάρχει ομαλός επιμορφισμός $l(W) \longrightarrow l(S) \underset{l(A)}{\times} l(S)$.
Λόγω προβολικότητας του $l(W)$ υπάρχει μορφισμός $\tilde{\tau} : l(W) \longrightarrow l(S)$ τέτοιος ώστε $d \circ \tilde{\tau} = \tau \circ e \circ e'$, όπου $\tilde{\tau} = l(t)$.

Αρκει να δείξουμε ότι:

$$l(\alpha \circ \bar{\alpha}) = l(\alpha \circ t) = l(\alpha) \circ l(t) = l(\alpha) \circ \tilde{\tau}$$
$$l(\beta \circ \bar{\beta}) = l(\beta \circ t) = l(\beta) \circ l(t) = l(\beta) \circ \tilde{\tau}$$

Πράγματι:
$l(\alpha \circ \bar{\alpha}) = l(\alpha) \circ l(\bar{\alpha}) = u' \circ d \circ l(\bar{\alpha}) = u' \circ (d \circ \bar{\varepsilon}_0 \circ \varepsilon_0) \circ e' = (u' \circ \bar{u}') \circ e \circ e' = u' \circ (\tau \circ e \circ e') = (u' \circ d) \circ \tilde{\tau} = l(\alpha) \circ \tilde{\tau} = l(\alpha) \circ l(t) = l(\alpha \circ t)$.
Ομοίως: $l(\beta \circ \bar{\beta}) = \ldots = l(\beta) \circ \tilde{\tau} = l(\beta \circ t)$ .

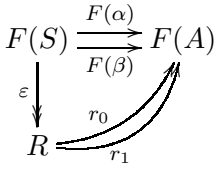
Επειδή $l$ πλήρης και πιστός, προκύπτουν οι δύο ζητούμενες σχέσεις.

■

Εφαρμόζοντας τον συναρτητή $F$ έχουμε οτι το $F(S) \underset{F(\beta)}{\overset{F(\alpha)}{\rightrightarrows}} F(A)$ είναι μεταβατικό γράφημα.

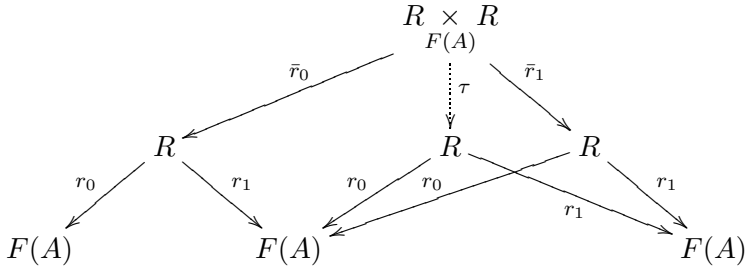
Συνοψίζοντας, στα Βήματα 2 και 3 δείξαμε οτι το $S \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} A$ και το $F(S) \underset{F(\beta)}{\overset{F(\alpha)}{\rightrightarrows}} F(A)$ είναι ανακλαστικά, αντιμεταθετικά, μεταβατικά γραφήματα.

Βήμα 4:
Επειδή $S \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} A$ μεταβατικό γράφημα στη $\mathcal{C}$ και ο $F$ επίπεδος συναρτητής τότε,

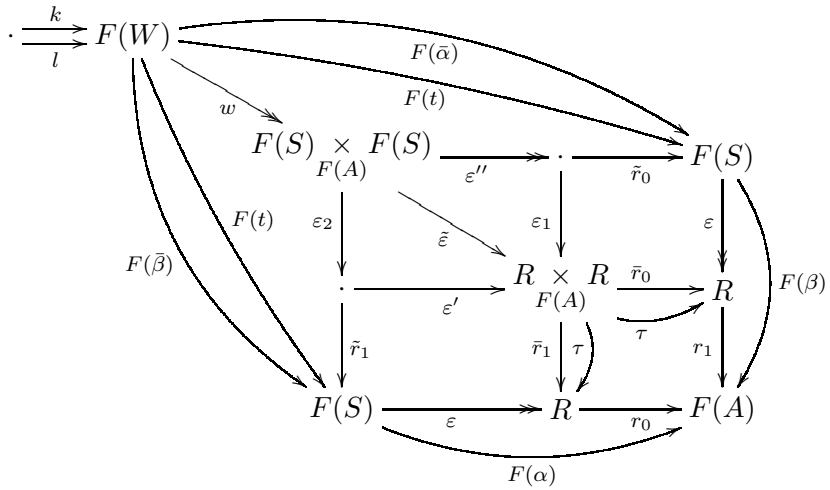



θα αποδείξουμε οτι η $R$ είναι μεταβατική σχέση στη κατηγορία $\mathcal{D}$.

**Απόδειξη:** Αρκεί μα δείξουμε οτι υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\tau : R \underset{F(A)}{\times} R \longrightarrow R$ με $r_0 \circ \tau = r_0 \circ \bar{r}_0$ και $r_1 \circ \tau = r_1 \circ \bar{r}_1$ , όπου τα $r_0, r_1$ είναι απο κοινού μονομορφικά.



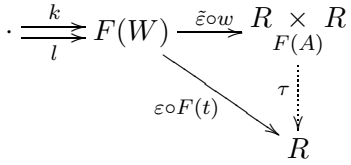
Εχουμε αποδείξει οτι το $F(S) \underset{F(\beta)}{\overset{F(\alpha)}{\rightrightarrows}} F(A)$ είναι μεταβατικό γράφημα, δηλ. υπάρχει μοναδικός μορφισμός $t : W \longrightarrow S$ με: $\alpha \circ \bar{\alpha} = \alpha \circ t$ και $\beta \circ \bar{\beta} = \beta \circ t$.
Δημιουργούμε το διάγραμμα εφελκύσεων:




Οπου το $(k, l)$ είναι το ζεύγος πυρήνα του $F(W)$ αλλα και του $\tilde{\varepsilon} \circ w$.
Θα δείξουμε οτι:

$$\varepsilon \circ F(t) \circ k = \varepsilon \circ F(t) \circ l$$

γιατί τότε:




απο την καθολική ιδιότητα του συν-εξισωτή, θα υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\tau : R \underset{F(A)}{\times} R \longrightarrow R$ τέτοιος ώστε: $\tau \circ \tilde{\varepsilon} \circ w = \varepsilon \circ F(t)$.
Πράγματι:
$r_0 \circ (\varepsilon \circ F(t) \circ k) = r_0 \circ (\varepsilon \circ \tilde{r}_0 \circ \varepsilon'') \circ w \circ k = r_0 \circ \bar{r}_0 \circ \tilde{\varepsilon} \circ w \circ k = r_0 \circ \bar{r}_0 \circ \tilde{\varepsilon} \circ w \circ l = r_0 \circ \varepsilon \circ \tilde{r_0} \circ \varepsilon'' \circ w \circ l = r_0 \circ (\varepsilon \circ F(t) \circ l)$
Ομοίως: $r_1 \circ (\varepsilon \circ F(t) \circ k) = \ldots = r_1 \circ (\varepsilon \circ F(t) \circ l)$
Επειδή τα $r_0, r_1$ είναι απο κοινού μονομορφικά έχουμε:

$$(\varepsilon \circ F(t)) \circ k = (\varepsilon \circ F(t)) \circ l$$

Ικανοποιούνται οι ζητούμενες σχέσεις:

$$r_0 \circ \tau \circ \tilde{\varepsilon} \circ w = r_0 \circ \varepsilon \circ F(t) = r_0 \circ \varepsilon \circ \tilde{r}_0 \circ \varepsilon'' \circ w = r_0 \circ \bar{r}_0 \circ \tilde{\varepsilon} \circ w$$

επειδή $\tilde{\varepsilon} \circ w$ ομαλός επιμορφισμός:

$$r_0 \circ \tau = r_0 \circ \bar{r}_0$$

Ομοίως:

$$r_1 \circ \tau = r_1 \circ \bar{r}_1$$

■

Επίσης η $R$ είναι ανακλαστική και συμμετρική, άρα σχέση ισοδυναμίας. ■

Ξεκινώντας την απόδειξη αυτή θέλαμε να υπολογίσουμε την αριστερή Kan επέκταση $F_!(X) = \mathrm{colim}(l \downarrow X \xrightarrow{\pi} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D})$, δείξαμε διαδοχικά ότι:

- Η $l(S) \xrightarrow{d} D \underset{v'}{\overset{u'}{\rightrightarrows}} l(A)$ $\xrightarrow{e} X$ είναι τελίκη υποκατηγορία της $l \downarrow X$.

- Μέσω της προβολής $\pi$ και του συναρτητή $F$ έχουμε το διάγραμμα:

$$l(S) \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} l(A) \xrightarrow{\pi} S \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{F} F(S) \underset{F(\beta)}{\overset{F(\alpha)}{\rightrightarrows}} F(A)$$

$$l(A) \xrightarrow{e} X \qquad F(S) \xrightarrow{\varepsilon} R \underset{r_1}{\overset{r_0}{\rightrightarrows}} F(A)$$

  όπου αποδείξαμε οτι η $R$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

- Το ζητούμενο συνόριο $\mathrm{colim}(F \circ \pi) = \mathrm{colim}(F(S) \rightrightarrows F(A)) = coeq(R \rightrightarrows F(A)) \in \mathcal{D}$.

Αντι λοιπόν να υπολογίζουμε συνόρια υπολογίζουμε συν-εξισωτές που υπάρχουν σίγουρα στην κατηγορία $\mathcal{D}$.

Μένει λοιπόν να δείξουμε οτι η αριστερή Kan επέκταση $F_!$ είναι αριστερά ακριβής, οπότε διατηρεί πεπερασμένα όρια, άρα και ομαλούς επιμορφισμούς.

**Πρόταση 4.2** *Εστω $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ συναρτητής απο μια κατηγορία με ασθενή πεπερασμένα όρια σε μια ακριβή κατηγορία. Τότε ο $F$ είναι επίπεδος, σε σχέση με μια τοπολογία Grothendieck που η συνθήκη επικάλυψης αποτελείται απο απλούς ομαλούς επιμορφισμούς (δηλ. ο $F$ είναι $j_{reg}$-επίπεδος), αν είναι αριστερά καλύπτων.*

**Απόδειξη:** Υποθέτουμε οτι ο $F$ είναι αριστερά καλύπτων. Τότε θα δείξουμε την εγκυρότητα στην εσωτερική λογική της $(\mathcal{D}, j_{reg})$ των προτάσεων $(i), (ii), (iii)$ που περιγράφουν την επιπεδότητα:
$(i)$ Για κάθε $D \in \mathcal{D}$

$$D \Vdash \bigvee_{C \in \mathcal{C}} \exists x{:}\, C \;\; (x = x)$$

Εστω $C$ το ασθενές τελικό αντικείμενο της $\mathcal{C}$, τότε ο $F(C) \longrightarrow 1_{\mathcal{D}}$ είναι ομαλός επιμορφισμός, γιατί $F$ αριστερά καλύπτων.
Εφελκύωντας τον ομαλό αυτό επιμορφισμό κατα μήκος του μοναδικού $D \longrightarrow 1_D$

$$\begin{array}{ccc} D' & \xrightarrow{\;e\;} & D \\ {\scriptstyle x}\downarrow & & \downarrow \\ F(C) & \twoheadrightarrow & 1_D \end{array}$$

παίρνουμε ένα $j_{reg}$ -κάλυμμα της κατηγορίας $\mathcal{D}$, $\{D' \longrightarrow D\}$, όπου $D'$ ένα στοιχείο που προέρχεται απο κάποιο $F(-)$, καθώς και το ζητούμενο γενικευμένο στοιχείο $x : D' \longrightarrow F(C)$.

$(ii)$ Για κάθε $D \in \mathcal{D}$,

$$D \Vdash \forall x'{:}\, C' \;\; \forall x''{:}\, C'' \bigvee_{C} \bigvee_{\substack{u':C \to C' \\ u'':C \to C''}} \exists x{:}\, C \;\; (u'(x) = x' \wedge u''(x) = x'')$$

$x' : C'$ δηλ. $x' : D \longrightarrow F(C')$
$x'' : C''$ δηλ. $x'' : D \longrightarrow F(C'')$
και $(C, < u', u'' >)$ το ασθενές γινόμενο των $C', C''$. Επειδή $F$ αριστερά καλύπτων ο μορφισμός $F(C) \longrightarrow F(C') \times F(C'')$ είναι ομαλός. Παίρνωντας την εφέλκυση του κατα μήκος του $< x', x'' >$ έχουμε:

$$\begin{array}{ccc} D' & \xrightarrow{\;e\;} & D \\ {\scriptstyle x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle <x',x''>} \\ F(C) & \xrightarrow{<F(u'),F(u'')>} & F(C') \times F(C'') \end{array}$$

Οπότε προκύπτει ένα κάλυμμα $\{e : D' \longrightarrow D\}$ απο ομαλούς επιμορφισμούς και το γενικευμένο στοιχείο $x' : D' \longrightarrow F(C)$ τέτοιο ώστε:

$$< F(u'), F(u'') > \circ x =< x', x'' > \circ e$$

δηλ.

$$F(u') \circ x = x' \circ e$$
$$F(u'') \circ x = x'' \circ e$$

$(iii)$ Για όλα τα $D \in \mathcal{D}$ και όλα $u,\ v{:}\, C' \rightrightarrows C''$

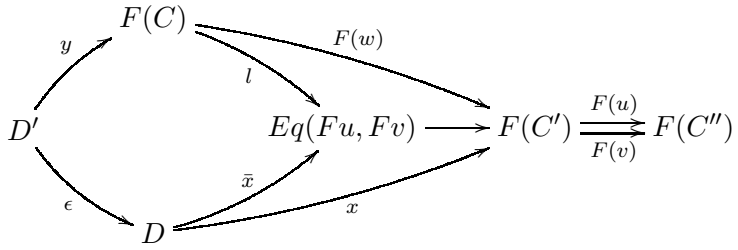
$$D \Vdash \forall x{:}\, C' \;\; (u(x) = v(x) \to \bigvee_{C} \bigvee_{\substack{w:C \to C' \\ u \circ w = v \circ w}} \exists y{:}\, C \;\; (w(y) = x))$$

Θα δείξουμε οτι υπάρχει $j_{reg}$ κάλυμμα $\{D' \xrightarrow{e} D\} \in Cov(D)$ και στοιχείο $y : C$, ώστε $D' \Vdash w(y) = x \circ e$.

Εστω $x : C'$, δηλ. $D \xrightarrow{x} F(C')$ με $F(u) \circ x = F(v) \circ x$.
Στην κατηγορία $\mathcal{C}$ έχω το διάγραμμα:

$$C \xrightarrow[w]{} C' \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} C''$$

όπου $C$ ο ασθενής εξισωτής των $u, v$.
Μέσω του συναρτητή $F$ στη $\mathcal{D}$ έχουμε:




Επειδή $F$ αριστερά καλύπτων, υπάρχει ομαλός επιμορφισμός $l$, και λόγω της καθολικής ιδιότητας του εξισωτή υπάρχει ο μορφισμός $\bar{x}$. Εφελκύωντας τον $\bar{x}$ κατα μήκος του $l$, παίρνουμε τον ομαλό επιμορφισμό $e : D' \longrightarrow D$, δηλ. το ζητούμενο κάλυμμα $\{D' \xrightarrow{e} D\}$, και ένα $D'$-στοιχείο $y : D' \longrightarrow F(C)$.
Εχουμε ότι: $F(w) \circ y = x \circ e$, όπως θέλαμε να δείξουμε.

■

**Πρόταση 4.3** *Σε μια ακριβή κατηγορία $\mathcal{D}$, οι εξισωτές των σχέσεων ισοδυναμίας είναι $j_{reg}$-"καθορισμένοι" (postulated)*

**Απόδειξη:** *Εχουμε το διάγραμμα του συν-εξισωτή:*

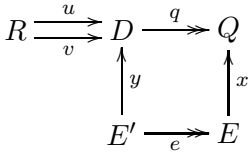
$$R \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} D \xrightarrow{q} Q$$

*όπου $R$ σχέση ισοδυναμίας. Θέλουμε να δείξουμε οτι επαληθεύονται στην εσωτερική λογική της $(D, j_{reg})$, οι σχέσεις (1), (2) που είχαμε ορίσει πιο πριν. Στη συγκεκριμένη περίπτωση θα εξετάσουμε την εγκυρότητα των σχέσεων:*

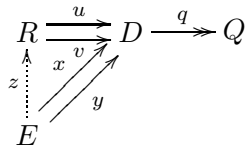
*(1)* $\forall x : Q \; \exists y : D \; (q(y) = x)$

*(2)* $\forall x : D \; \forall y : D \; (q(x) = q(y) \rightarrow \bigvee_{\mathcal{Z}} \exists z_1 : R \; ... \; \exists z_n : R \; (x = u(z_1) \wedge v(z_1) = u(z_2) \wedge ... \wedge v(z_n) = y))$

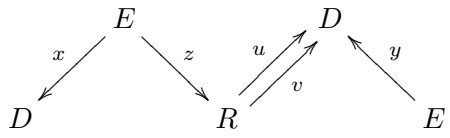
(1) : *Για κάθε* $E \in \mathcal{D}$, *έχουμε ένα* $E$*-στοιχείο* $x : E \longrightarrow Q$. *Τότε το διάγραμμα του συν-εξισωτή γίνεται:*




*Εφελκύωντας το* $q$ *κατα μήκος του* $x$ *παίρνουμε τον ομαλό επιμορφισμό* $e : E' \longrightarrow E$, *δηλ. το ζητούμενο κάλυμμα* $\{E' \xrightarrow{e} E\}$, *και ένα* $E'$*-στοιχείο* $y : E' \longrightarrow D$ *τέτοιο ώστε:* $q \circ y = x \circ e$.
(2) *Για κάθε δύο στοιχεία* $x : D$ , $y : D$ *με* $q \circ x = q \circ y$, *το διάγραμμα του συνεξισωτή γίνεται:*




*Επειδή* $\mathcal{D}$ *ακριβής κατηγορία το* $(u, v)$ *είναι το ζεύγος πυρήνα του* $q$, *θα υπάρχει μορφισμός* $z : E \longrightarrow R$ *(* $E$*-στοιχείο) με* $u \circ z = x$ , $v \circ z = y$.
*Το ζητούμενο "ζιγκ-ζαγκ" είναι:*




■

Απο το ακόλουθο Πόρισμα, μαζί με το Λήμμα 3.1 έπεται οτι η αριστερή Kan επέκταση $F_!$ είναι αριστερά ακριβής.

**Πόρισμα 4.2** *Εστω* $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *ένας αριστερά καλύπτων συναρτητής απο μια κατηγορία με ασθενή πεπερασμένα όρια σε μια ακριβή κατηγορία. Τότε η αριστερή Kan επέκταση της* $F$ *κατα μήκος της εμφύτευσης* $\mathcal{C} \xrightarrow{l} \mathcal{C}_{ex}$ , $F_!$, *είναι ένας ακριβής συναρτητής.*

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

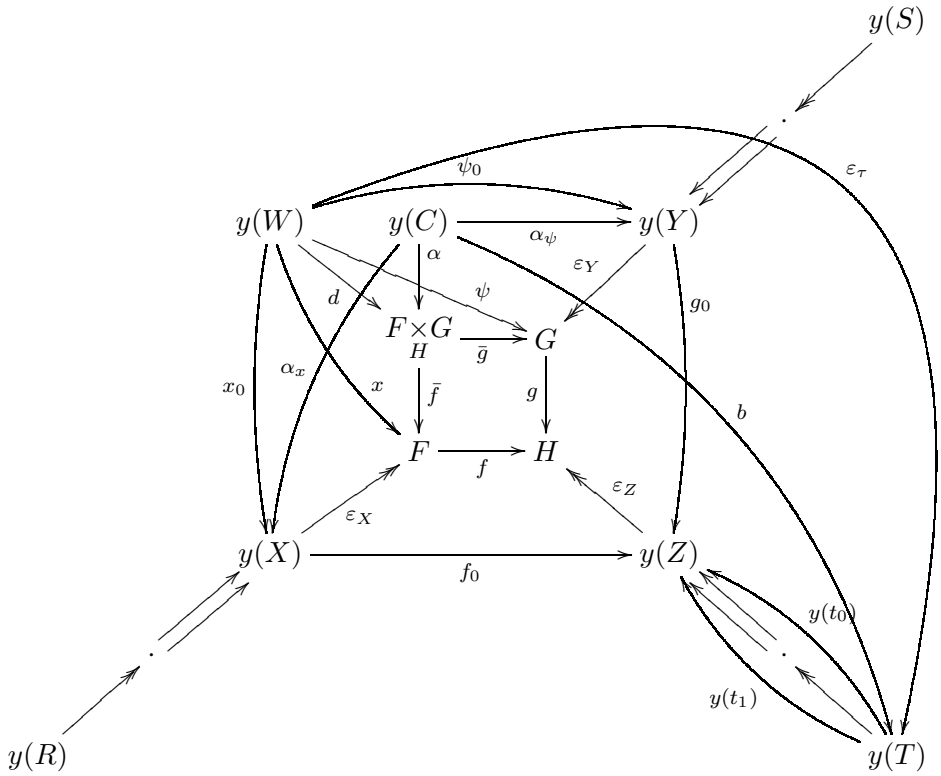
# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Σκοπός μας είναι να δείξουμε οτι η εφέλκυση των $f, g$ ανήκει στη $\mathcal{C}_{ex}$, αρκεί να δείξουμε οτι υπάρχει ομαλός επιμορφισμός απο το $y(W)$ στο $F \underset{H}{\times} G$ το ζεύγος πυρήνα του οποίου να είναι ξανά ασθενώς αναπαραστάσιμος. Το $y(W)$ δεν είναι τυχαίο αλλά προκύπτει, όπως αποδεικνύουμε παρακάτω, απο το διάγραμμα (2).

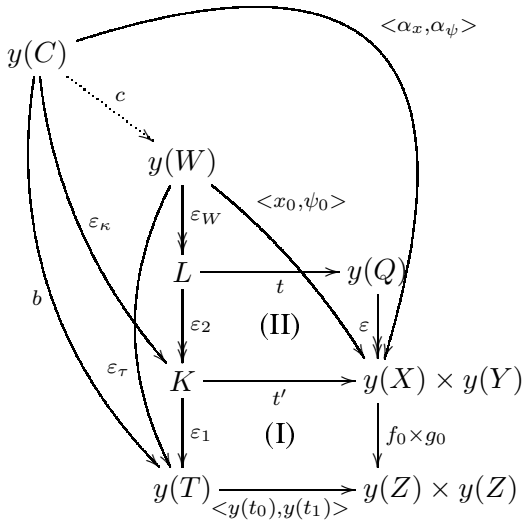
Εστω τυχαίο $y(C)$ και μορφισμός $\alpha : y(C) \longrightarrow F \underset{H}{\times} G$ :

Εχουμε τα διαγράμματα:

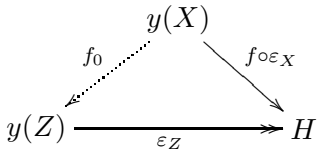
(1)


y(S)
ψ0
ετ
y(W)
y(C)
αψ
y(Y)
α
εY
d
ψ
g0
F×G
H
G
ḡ
x0
αx
x
f̄
g
b
F
f
H
εZ
εX
y(X)
f0
y(Z)
y(t0)
y(t1)
y(R)
y(T)

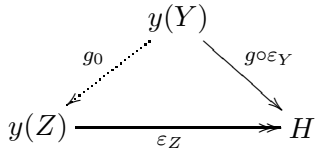
(2)


<αx,αψ>
y(C)
c
y(W)
<x0,ψ0>
εκ
εW
L
t
y(Q)
b
ε2
(II)
ε
ετ
K
t′
y(X) × y(Y)
ε1
(I)
f0×g0
y(T)
<y(t0),y(t1)>
y(Z) × y(Z)

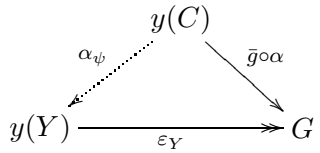
Λόγω προβολικότητας του $y(X)$ υπάρχει μορφισμός $f_0 : y(X) \longrightarrow y(Z)$



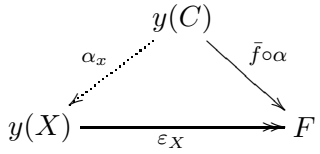

Λόγω προβολικότητας του $y(Y)$ υπάρχει μορφισμός $g_0 : y(Y) \longrightarrow y(Z)$




Λόγω προβολικότητας του $y(C)$ υπάρχει μορφισμός $\alpha_\psi : y(C) \longrightarrow y(Y)$




και μορφισμός $\alpha_x : y(C) \longrightarrow y(X)$

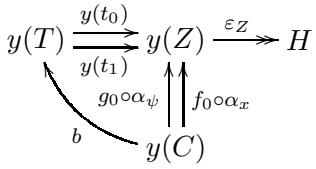



Εχουμε τον μορφισμό $x : y(W) \longrightarrow F$ ως σύνθεση $x = \varepsilon_X \circ x_0$ , και τον $\psi : y(W) \longrightarrow G$ ως σύνθεση $\psi = \varepsilon_Y \circ \psi_0$ .
Ομοίως όπως και πριν, λόγω προβολικότητας του $y(W)$ υπάρχουν οι μορφισμοί $x_0 : y(W) \longrightarrow y(X)$ και $\psi_0 : y(W) \longrightarrow y(Y)$ .
Ορίζουμε έτσι, τον μορφισμό $< x_0, \psi_0 >: y(W) \longrightarrow y(X) \times y(Y)$ , με $< x_0, \psi_0 >= \varepsilon \circ t \circ \varepsilon_W$ .
Ομως $f \circ x = f \circ \varepsilon_X \circ x_0 = \varepsilon_Z \circ (f_0 \circ x_0) = (\varepsilon_Z \circ y(t_0)) \circ \varepsilon_\tau = \varepsilon_Z \circ y(t_1) \circ \varepsilon_\tau = \varepsilon_Z \circ g_0 \circ \psi_0 = g \circ \psi$.
Αρα, απο την καθολική ιδιότητα της εφέλκυσης έχουμε ότι: Υπάρχει μορφισμός $d : y(W) \longrightarrow F \underset{H}{\times} G$ , τέτοιος ώστε

$$\bar{f} \circ d = x$$

$$\bar{g} \circ d = \psi$$

Επισης, λόγω του οτι: $(\varepsilon_Z \circ g_0)\circ\alpha_\psi = g\circ(\varepsilon_Y\circ\alpha_\psi) = (g\circ\bar{g})\circ\alpha = f\circ(\bar{f}\circ\alpha) = (f\circ\varepsilon_X)\circ\alpha_x = \varepsilon_Z\circ f_0\circ\alpha_x$ , δηλ.




υπάρχει $b : y(C) \longrightarrow y(T)$ τέτοιο ώστε: $\begin{matrix} y(t_0)\circ b = f_0\circ\alpha_x \\ y(t_1)\circ b = g_0\circ\alpha_\psi \end{matrix}\}(*)$

Στο σχήμα (2), έχουμε την εφέλκυση (I), στην οποία δεν ξέρουμε αν το $K$ ανήκει στη $\mathcal{C}_{ex}$ , όμως το $y(X)\times y(Y)$ ανήκει γιατί έχουμε δείξει οτι η $\mathcal{C}_{ex}$ είναι κλειστή ως προς γινόμενα. Αρα υπάρχει ομαλός επιμορφισμός $\varepsilon : y() \longrightarrow y(X)\times y(Y)$ .
Στη συνέχεια παίρνουμε την εφέλκυση (II), όπου το $L \in \mathcal{C}_{ex}$ , γιατι το ''γυρω-γύρω'' που είναι εφέλκυση είναι η Περίπτωση 2, στην απόδειξη, η εφέλκυση της οποίας έχουμε δείξει οτι ανήκει στην $\mathcal{C}_{ex}$ .
Αρα υπάρχει ομαλός επιμορφισμός $\varepsilon_W : y(W) \longrightarrow L$ .
Επίσης έχουμε και τον μορφισμό $\varepsilon_\tau : y(W) \longrightarrow y(T)$ ως σύνθεση $\varepsilon_\tau = \varepsilon_1\circ\varepsilon_2\circ\varepsilon_W$ .

Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα έχουμε ότι:

$$(f_0\times g_0)\circ <\alpha_x,\alpha_\psi> = <f_0\circ\alpha_x, g_0\circ\alpha_\psi>$$

$$<y(t_0),y(t_1)>\circ b = <y(t_0)\circ b, y(t_1)\circ b>$$

Ομως λόγω της $(*)$ έχουμε:

$$y(t_0)\circ b = f_0\circ\alpha_x$$

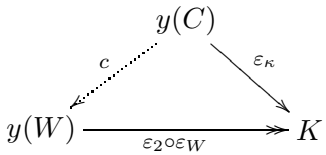
$$y(t_1)\circ b = g_0\circ\alpha_\psi$$

Αρα απο την καθολική ιδιότητα της εφέλκυσης, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\varepsilon_\kappa : y(C) \longrightarrow K$ τέτοιος ώστε:

$$\varepsilon_1\circ\varepsilon_\kappa = b$$

$$t'\circ\varepsilon_\kappa = <\alpha_x,\alpha_\psi>$$

Ομως λόγω προβολικότητας του $y(C)$

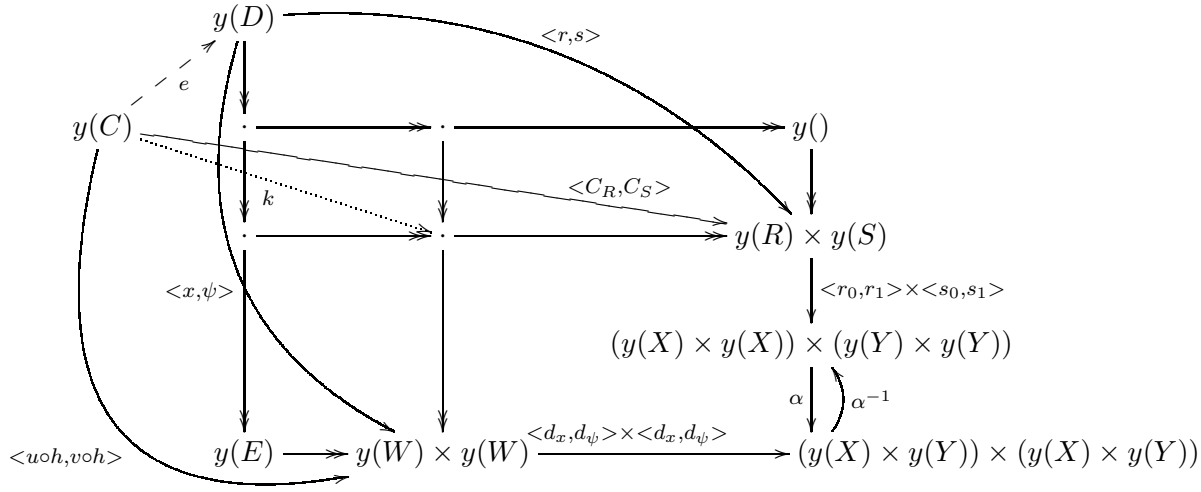



υπάρχει μορφισμός $c : y(C) \longrightarrow y(W)$ . Μένει να δείξουμε οτι ο $d$ είναι επί:

$$\bar{f} \circ d \circ c = \varepsilon_X \circ x_0 \circ c = \varepsilon_X \circ (\varepsilon \circ t \circ \varepsilon_W) \circ c = \varepsilon_X \circ \alpha_x = \bar{f} \circ \alpha$$
$$\bar{g} \circ d \circ c = \varepsilon_Y \circ \psi_0 \circ c = \varepsilon_Y \circ (\varepsilon \circ t \circ \varepsilon_W) \circ c = \varepsilon_Y \circ \alpha_\psi = \bar{g} \circ \alpha$$

Αρα απο την καθολική ιδιότητα της εφέλκυσης έχουμε οτι υπάρχει μοναδικός μορφισμός $d : y(C) \longrightarrow F \underset{H}{\times} G$ με $\alpha = d \circ c$. Αρα ο $d$ είναι επί κατα συνέπεια ομαλός επιμορφισμός.

Τέλος πρέπει να δείξουμε οτι το ζεύγος πυρήνα του $y(W)$ είνα ασθενώς αναπαραστάσιμο. Εστω $(u, v)$ το ζεύγος πυρήνα του και τυχαίος μορφισμός $h : y(C) \longrightarrow K$, για να το αποδείξουμε στηριζόμαστε στο διάγραμμα (1), για λόγους ευκολίας έχουμε αλλάξει τον συμβολισμό ορισμένων μορφισμών.
Εχουμε το εξής διάγραμμα εφελκύσεων:
(3)




Απο τις συνθέσεις προκύπτουν οι μορφισμοί:

$$< x, \psi >: y(D) \longrightarrow y(W) \times y(W)$$

$$< r, s >: y(D) \longrightarrow y(R) \times y(S)$$

Ισχύει οτι $d \circ x = d \circ \psi$, γιατί:
Αρκεί να είναι

$$\bar{f} \circ d \circ x = \bar{f} \circ d \circ \psi$$

$$\bar{g} \circ d \circ x = \bar{g} \circ d \circ \psi$$

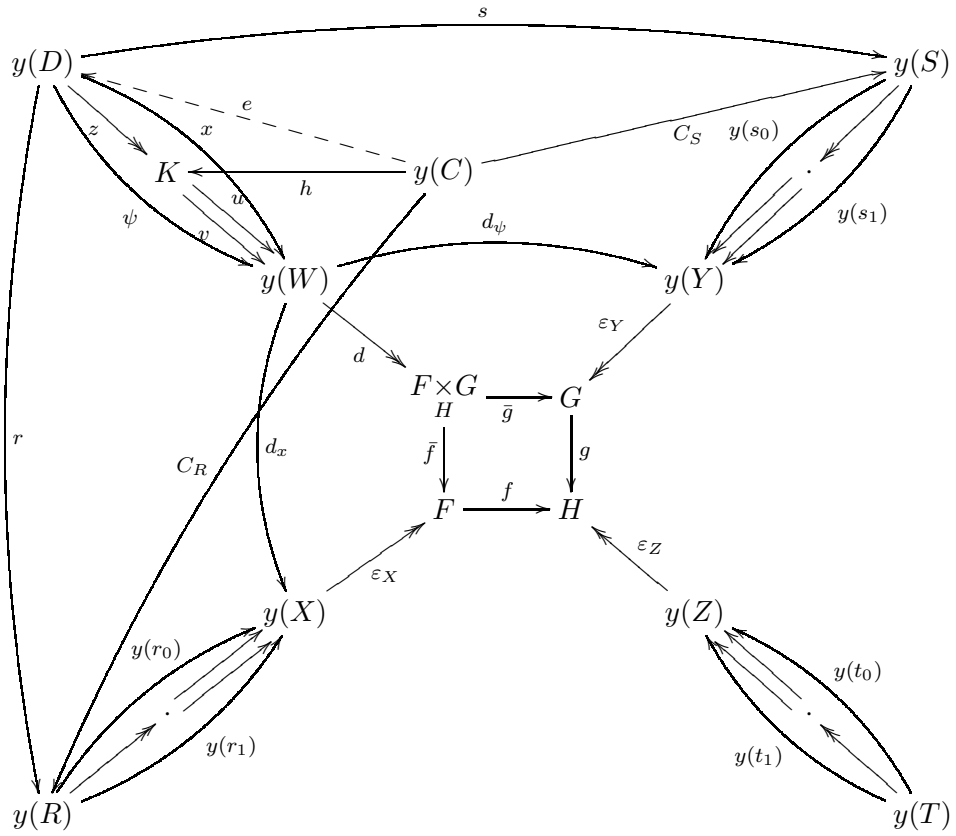
Ισοδύναμα:

$$\varepsilon_X \circ d_x \circ x = \varepsilon_X \circ d_x \circ \psi$$

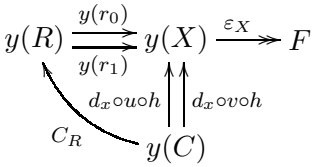
$$\varepsilon_Y \circ d_\psi \circ x = \varepsilon_Y \circ d_\psi \circ \psi$$

Ομως: $\alpha^{-1} \circ < d_x, d_\psi > \times < d_x, d_\psi > \circ < x, \psi >= \alpha^{-1} \circ << d_x \circ x, d_\psi \circ x >, < d_x \circ \psi, d_\psi \circ \psi >>=< d_x \circ x, d_x \circ \psi, d_\psi \circ x, d_\psi \circ \psi >=< y(r_0) \circ r, y(r_1) \circ r, y(s_0) \circ s, y(s_1) \circ s >$

Οπότε: $\varepsilon_X \circ d_x \circ x = \varepsilon_X \circ y(r_0) \circ r = \varepsilon_X \circ y(r_1) \circ r = \varepsilon_X \circ d_x \circ \psi$ .
Ομοίως: $\varepsilon_Y \circ d_\psi \circ x = \varepsilon_Y \circ y(s_0) \circ s = \varepsilon_Y \circ y(s_1) \circ s = \varepsilon_Y \circ d_\psi \circ \psi$
Αρα υπάρχει μοναδικός μορφισμός $z : y(D) \longrightarrow K$ , μένει να δείξουμε οτι είναι επί.
(4)




Ορίζουμε τους μορφισμούς:
$C_R, C_S$




$$(\varepsilon_X \circ d_x) \circ u \circ h = \bar{f} \circ (d \circ u) \circ h = (\bar{f} \circ d) \circ v \circ h = \varepsilon_X \circ d_x \circ v \circ h$$

Αρα υπάρχει μορφισμός $C_R : y(C) \longrightarrow y(R)$ .
Ομοίως υπάρχει μορφισμός $C_S : y(C) \longrightarrow y(S)$ .

Εχοντας τους μορφισμούς $< C_R, C_S >, < u \circ h, v \circ h >$ υπάρχει ,λόγω της εφέλκυσης στο

διάγραμμα (3), μοναδικός μορφισμός $k : y(C) \longrightarrow \cdot$ και λόγω προβολικότητας του $y(C)$ υπάρχει μορφισμός $e : y(C) \longrightarrow y(D)$ , με:

$$u \circ h = x \circ e \, , \, v \circ h = \psi \circ e$$
$$r \circ e = C_R \, , \, s \circ e = C_S$$

Επομένως:

$$\bar{f} \circ d \circ (u \circ z) \circ e = \bar{f} \circ d \circ (x \circ e) = \bar{f} \circ d \circ u \circ h$$
$$\bar{f} \circ d \circ (v \circ z) \circ e = \bar{f} \circ d \circ (\psi \circ e) = \bar{f} \circ d \circ v \circ h$$

Ομοίως:

$$\bar{g} \circ d \circ u \circ z \circ e = \ldots = \bar{g} \circ d \circ u \circ h$$
$$\bar{g} \circ d \circ v \circ z \circ e = \ldots = \bar{g} \circ d \circ v \circ h$$

Αρα απο την καθολική ιδιότητα της εφέλκυσης υπάρχει μοναδικό $z$ τέτοιο ώστε:

$$d \circ u \circ z \circ e = d \circ u \circ h$$
$$d \circ v \circ z \circ e = d \circ v \circ h$$

Επειδή $d$ ομαλός επιμορφισμός:

$$u \circ z \circ e = u \circ h$$
$$v \circ z \circ e = v \circ h$$

Αρα:

$$h = z \circ e$$

δηλαδή, $z$ ομαλός επιμορφισμός.

# ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ


[AR] J. Adamek and J. Rosicky, *Locally Presentable and Accessible Categories*, Cambridge University Press, 1994

[SGA4] M. Artin, A. Grothendieck, J.l. Verdier, *Theorie de Topos et Cohomologie Etale des Schemas*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 269, 270, Springer (1971)

[CV] A. Carboni and E. Vitale, *Regular and exact completions*, J. Pure Appl. Algebra, 125 (1998), 79--116

[HT1] H. Hu and W. Tholen, *Limits in free coproduct completions*, J. Pure Appl. Algebra, 105 (1995), 277--291

[HT] H. Hu and W. Tholen, *A note on the free regular and exact completions and their infinitary generalizations*, Theory and Applications of Categories, **2** (1996), 113--132

[EL] P. T. Johnstone, *Sketches of an Elephant - A Topos Theory Compendium*, Oxford University Press, 2002

[AK] A. Kock, *Postulated colimits and left exactness of Kan extensions*, Matematisk Institut, Aarhus Universitet, Preprint Series No. 9, 1989

[MM] S.MacLane and I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic*, Springer-Verlag, Berlin 1992

[MR] M. Makkai and G. E. Reyes, *First Order Categorical Logic*, LNM 611, Springer-Verlag, Berlin 1977

[CV] A. Carboni and E. Vitale, *Regular and Exact Completions*, Jour. Pure Appl. Algebra 125 (1998), 79--116

[$K_1$] P. Karazeris, *Categorical Domain Theory: Scott Topology,Powercategories, Coherent Categories*, Theory and Applications of Categories 9 (2001), 106--120

[$K_2$] P. Karazeris, *Notions of Flatness relative to Grothendieck Topologies*, Theory and Applications of Categories, 12 (2004), 225--236

[$J_1$] P. T. Johnstone, *Topos Theory*, Academic Press 1977

[$J_2$] P. T. Johnstone, *Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium*, Oxford University Press, 2002

[RP] J. Rosicky and M. C. Pedicchio, *Comparing Coequalizer and Exact Completions*, Theory and Applications of Categories 6, 67--72 (1999),

[CK] C. C. Chang, H. J. Keisler, *Model Theory*, North-Holland (1973)

[MP] M. Makkai and R. Pare, *Accessible Categories, The foundations of categorical model theory*, Contemporary Mathematics 104(1989)

[LV] S. Lack and E. Vitale, *When do completion processes give rise to extensive categories?* , J. Pure Appl. Algebra, **159** (2001), 203--229

[CM] A.Carboni and R.Celia Magno, *The free exact category on a left exact one*, J. Austr. Math. Soc. Ser.A 33 (1982) 295--301

[C] A.Carboni, *Some free constructions in realizability and proof theory*, J. Pure Appl. Algebra 103 (1995), 117--148

[VO] J. Van Oosten, *Extensional realizability*, Annals of Pure and Applied Logic, 84 (1997), 317--349

[P] E. Palmgren, *A categorical version of BHK interpretation*, Math. Structures in Comp. Science, 14 (2004), 57--72

[Law] F.W. Lawvere, *Equality in hyperdoctrives and the comprehension scheme as an adjoint functor* in A. Heller (editor) *Applications of Categorical Algebra* 1--14, A.M.S (1970)

[RR] E. Robinson, G. Rossolini, *Colimit completions and the effective topos*, Journal of Symbolic Logic, 55 (1990), 678--699