ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΜΕ ΟΜΟΤΟΠΙΚΗ ΔΟΜΗ

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{\Delta} \arrow[rr, "y"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & {[\mathbf{\Delta}^{op}, \mathrm{Set}]} \arrow[dl, "|-|"] \\
& \mathbf{Top} &
\end{tikzcd}
$$

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΠΡΟΤΣΩΝΗΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΠΑΝΑΓΗΣ ΚΑΡΑΖΕΡΗΣ

ΠΑΤΡΑ 2006

Περιεχόμενα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην κατηγορία **Top** των τοπολογικών χώρων με μορφισμούς συνεχείς απεικονίσεις μεταξύ τους, σε κάθε σύνολο $hom_{\mathbf{Top}}(X, Y)$ των συνεχών απεικονίσεων μεταξύ δύο τοπολογικών χώρων X και Y έχουμε μία σχέση ισοδυναμίας, αυτή που προσδιορίζει η σχέση ομοτοπίας ανάμεσα σε δύο συνεχείς συναρτήσεις. Αυτή η σχέση μας επιτρέπει να περάσουμε στην ομοτοπική κατηγορία $Ho(\mathbf{Top})$ η οποία έχει τα ίδια αντικείμενα με την **Top** και μορφισμούς ομοτοπικές κλάσεις συνεχών συναρτήσεων μεταξύ τοπολογικών χώρων.

Ο Daniel. G. Quillen στην εργασία του Homotopical Algebra (1967) [Q], εισάγει τα αξιώματα τα οποία πρέπει να πληρεί μία κατηγορία **C**, έτσι ώστε να έχουμε στην κατηγορία αυτή μία "ομοτοπική δομή" ανάλογη με την ομοτοπική δομή των τοπολογικών χώρων. Μία τέτοια κατηγορία καλείται κατηγορία μοντέλο και είναι μία κατηγορία εφοδιασμένη με τρείς διακεκριμένες κλάσεις μορφισμών οι οποίες καλόύνται νηματώσεις (fibrations), συνηματώσεις (cofibrations) και ασθενείς ισοδυναμίες (weak equivalences), οι οποίες ικανοποιούν αξιώματα και ιδιότητες που είναι ιδιότητες των νηματώσεων, των συνηματώσεων και των ομοτοπικών ισοδυναμιών στην τοπολογική κατηγορία **Top**. Επίσης σε κάθε τέτοια κατηγορία υπάρχει και η έννοια της ομοτοπίας μεταξύ μορφισμών, η οποία βασίζεται στον ορισμό της ομοτοπίας μεταξύ συνεχών συναρτήσεων. Αν **C** είναι μία κατηγορία μοντέλο τότε μπορούμε να περάσουμε στην ομοτοπική κατηγορία της **C**, η οποία είναι ο εντοπισμός της **C** σε σχέση με την κλάση των ασθενών ισοδυναμιών.

Ο Mark Hovey στον πρόλογο του βιβλίου Model Categories [Ho] γράφει: «Οι κατηγορίες μοντέλο εισήχθησαν από τον Quillen διαμορφώνοντας τα θεμέλια της ομοτοπικής θεωρίας. Το βασικό πρόβλημα το οποίο λύνουν οι κατηγορίες μοντέλο είναι το ακόλουθο. Δοθείσας μίας κατηγορίας, πολύ συχνά έχουμε συγκεκριμένους μορφισμούς (ασθενείς ισοδυναμίες) οι οποίοι δεν είναι ισομορφισμοί, αλλα θα θέλαμε να τους θεωρούμε ως ισομορφισμούς. Πάντα μπορεί κάποιος να αντιστρέψει τυπικά τις ασθενείς ισοδυναμίες (εντοπισμός), αλλά σε αυτή την περίπτωση χάνει των έλεγχο των μορφισμών στην καινούρια κατηγορία (κατηγορία πηλίκο). Οι μορφισμοί μεταξύ δυο αντικειμένων στην κατηγορία πηλίκο μπορεί να μην είναι καν σύνολο. Αν όμως η κατηγορία έχει την δομή κατηγορίας μοντέλο τότε οι μορφισμοί στην κατηγορία πηλίκο από ένα αντικείμενο X σε ένα αντικείμενο Y είναι απλά οι ομοτοπικές κλάσεις των μορφισμών από μία συνινώδη μετατόπιση του X (αντικείμενο ισόμορφο με το X στην κατηγορία πηλίκο) σε μία ινώδη μετατόπιση του Y (αντικείμενο ισόμορφο με το Y στην κατηγορία πηλίκο). Επειδή η ιδέα του να αντιστρέφουμε τις ασθενείς ισοδυναμίες είναι τόσο κεντρική στα μαθηματικά, για αυτό το λόγο και οι κατηγορίες μοντέλο είναι τόσο σημαντικές.»

Οι Goerrs-Jardine στην εισαγωγή του βιβλίου Simplicial Homotopy Theory [GJ] γράφουν: «Οι αρχές της μονόπλοκης (simplicial) ομοτοπικής θεωρίας συμπίπτει με το ξεκίνημα της αλγεβρικής τοπολογίας σχεδόν έναν αιώνα πριν. Η εξάπλωση των ιδεών άρχισε με την δουλειά του Poincare και συνεχίστηκε στα μέσα του εικοστού αιώνα με την μορφή της συνδυαστικής τοπολογίας. Η μοντέρνα περίοδος άρχισε με την εισαγωγή της έννοιας του πλήρους ημί-μονόπλοκου σύμπλόκου (semi-simplicial complex) ή αλλιώς του μονόπλοκου συνόλου, από τους Eilenberg-Zilber το 1950, και αναπτύχθηκε σε μία πλήρη ομοτοπική θεωρία με την δουλειά του Kan την δεκαετία του 50 και αργότερα με τον Quillen την δεκαετία του 60. Η θεωρία αυτή υπήρξε πάντα μία θεωρία μονοπλεγμάτων (simplices) και σχέσεων σύμπτωσης ανάμεσά τους, μαζι με μεθόδους για την κατασκευή συναρτήσεων και ομοτοπιών συναρτήσεων δεδομένων κάποιων περιορισμών. Ως τέτοιες οι μέθοδοι και οι ιδέες είναι αλγεβρικές και συνδυαστικές και, παρά την βαθιά σύνδεση τους με την ομοτοπική θεωρία των τοπολογικών χώρων, υπάρχουν εντελώς ανεξάρτητα οποιουδήποτε τοπολογικού περιεχομένου. Αυτή η σκοπιά εισάγεται αποτελεσματικά από τον Kan και αργότερα κωδικοποιείται από τον Quillen στην έννοια της κλειστής κατηγορίας μοντέλο. Η μονόπλοκη ομοτοπική θεωρία και πιο γενικά οι ομοτοπικές θεωρίες που συσχετίζονται με κατηγορίες μοντέλα, μπορούν έτσι να ερμηνευθούν ως καθαρά αλγεβρικό εγχείρημα, που είχε πραγματικές εφαρμογές στην ομολογιακή άλγεβρα, στην αλγεβρική γεωμετρία στην θεωρία αριθμών και την αλγεβρική K-θεωρία (K-theory). Η βασική θέση είναι ότι η ομοτοπία είναι κάτι παραπάνω από τις συνηθισμένες αρχές αναλλοιώτου στην τοπολογία και την ανάλυση: οι ομοτοπικές θεωρίες υπάρχουν παντού, καθώς και οι συναρτητικές μέθοδοι για τη συσχέτισή τους.»

Οι κατηγορίες μοντέλο είναι θεμελιώδεις στην ανάπτυξη της αλγεβρικής ομοτοπικής θεωρίας. Για παράδειγμα δοθέντος ενός τοπολογικού προβλήματος, όπως αυτό της ανύψωσης ή αυτό της παραγοντοποίησης μίας συνεχούς συνάρτησης, διαλέγουμε μία κατηγορία μοντέλο $\mathcal{C}$ και ένα συναρτητή $F : \mathbf{Top} \to \mathcal{C}$, ο οποίος διατηρεί την σχέση της ομοτοπίας. Στην συνέχεια μεταφράζουμε το τοπολογικό πρόβλημα μέσω του συναρτητή F με αλγεβρικούς όρους και μελετάμε το αλγεβρικό πρόβλημα που προκύπτει, με σκοπό να έχουμε κάποιες πληροφορίες για το τοπολογικό πρόβλημα.

Η μελέτη της γενικής θεωρίας τέτοιων κατηγοριών, καθώς και η παρουσίαση παραδειγμάτων τέτοιων κατηγοριών αποτελεί το αντικείμενο της παρούσας εργασίας. Πιο συγκεκριμένα, στο πρώτο κεφάλαιο, για λόγους πληρότητας, παρουσιάζουμε ορισμούς και βασικά αποτελέσματα της θεωρίας των κατηγοριών και της τοπολογίας που αναφέρονται στον υπόλοιπο μέρος της εργασίας.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, δίνουμε τον ορισμό της κατηγορίας μοντέλο και παρουσιάζουμε τη γενική τους θεωρία. Στην συνέχεια ορίζουμε της έννοια της ομοτοπίας μεταξύ των μορφισμών σε μία κατηγορία μοντέλο και εξετάζουμε κατά πόσο αυτή αποτελεί μία σχέση ισοδυναμίας. Το επόμενο βήμα είναι να παρουσιάσουμε την Quillen ομοτοπική κατηγορία που "συνοδεύει" μία κατηγορία μοντέλο και να περιγράψουμε την κατασκευή της. Επίσης παρουσιάζουμε την κλασική ομοτοπική κατηγορία μίας κατηγορίας μοντέλο (δηλαδή την κατηγορία πηλίκο αναφορικά με μία σχέση ομοτοπίας) και αποδεικνύουμε την ισοδυναμία της με την Quillen ομοτοπική κατηγορία (δηλαδή την κατηγορία που προκύπτει αν αντιστρέψουμε με τυπικό τρόπο τις ασθενείς ισοδύναμίες). Τέλος αναφερόμαστε στους Quillen συναρτητές, οι οποίοι αποτελούν την κατάλληλη έννοια του μορφισμού μεταξύ κατηγοριών μοντέλο και δείχνουμε ότι αν έχουμε ένα ζεύγος Quillen συναρτητών μεταξύ δύο κατηγοριών μοντέλο, τότε θα έχουμε ένα ζεύγος προσαρτημένων συναρτητών μεταξύ των ομοτοπικών τους κατηγοριών και πιο συγκεκριμένα αν έχουμε ένα ζεύγος Quillen ισοδυναμιών μεταξύ δύο κατηγοριών μοντέλο, τότε θα έχουμε ισοδυναμία μεταξύ των ομοτοπικών τους κατηγοριών.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε την κατηγορία **SSet** των μονόπλοκων συνόλων (simplicial sets) η οποία αποτελεί (βασικό) παράδειγμα κατηγορίας μοντέλο. Από την γενική θεωρία των Kan επεκτασέων, (στην οποία αναφερόμαστε στο κεφάλαιο αυτό) έχουμε ότι υπάρχει ένας συναρτητής από την **SSet** στην **Top**, ο λεγόμενος συναρτητής γεωμετρικής πραγματοποίησης. Στον συναρτητή αυτόν εστιάζουμε ιδιαίτερα, γιατί με την χρήση αυτού του συναρτητή ορίζουμε την ομοτοπική δομή για την κατηγορία των μονόπλοκων συνόλων. Επίσης δείχνουμε ότι ο συναρτητής αυτός μπορεί να ειδωθεί ως συναρτητής σε μία υποκατηγορία της **Top**. Η υποκατηγορία αυτή είναι η κατηγορία **K** των Kelley χώρων, την οποία και παρουσιάζουμε αναλυτικότερα. Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι αποδεικνύεται [Du] πως η κατηγορία των μονόπλοκων συνόλων επέχει, κατά κάποιον τρόπο, θέση "αρχικής κατηγορίας" ανάμεσα στις κατηγορίες μοντέλο (με τους Quillen συναρτητές ως μορφισμούς ανάμεσά τους).

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε αρχικά κάποια στοιχεία από την θεωρία των προσιτών κατηγοριών. Ο λόγος είναι, ότι η κατηγορία **SSet** είναι προσιτή και προκειμένου να αποδείξουμε ότι η **SSet** έχει δομή κατηγορίας μοντέλο χρησιμοποιούμε ένα γενικό θεώρημα περί ύπαρξης "αρκετών ενριπτικών αντικειμένων" σε προσιτές κατηγορίες. Η μέθοδος απόδειξης αυτού του θεωρήματος είναι μοντελοθεωρητική (με την έννοια της μαθηματικής λογικής) και εξειδικεύεται σε άλλα γνωστά μαθηματικά αποτελέσματα, με την κατάλληλη επιλογή προσιτής κατηγορίας, όπως αυτό της δυνατότητας εμφύτευσης ενός οποιουδήποτε module μέσα σ' ένα ενριπτικό τέτοιο, ή της δυνατότητας εμφύτευσης ενός οποιουδήποτε μοντέλου μίας θεωρίας μέσα σ' ένα κορεσμένο τέτοιο. Τέλος αναφερόμαστε στην δομή κατηγορίας μοντέλο για την κατηγορία **K** και στην ισοδυναμία μεταξύ της ομοτοπικής κατηγορίας της **SSet** και της ομοτοπικής κατηγορίας της **K** (δεν προχωράμε στην απόδειξη, η οποία χρησιμοποιεί μία σειρά από κατηγορικές ιδιότητες του συναρτητή της γεωμετρικής πραγματοποίησης καθώς και τοπολογικά αποτελέσματα που η έκθεσή τους θα αύξαινε δυσανάλογα το μέγεθος της παρούσας εργασίας). Με αυτήν την έννοια η ομοτοπική θεωρία των μονόπλοκων συνόλων συμπίπτει με την κλασική τοπολογική ομοτοπική θεωρία.

Για την συγγραφή της παρούσας διπλωματικής εργασίας, που πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια του μεταπτυχιακού προγράμματος «Μαθηματικά και Σύγχρονες Εφαρμόγες», στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών, καθώς και για την γενικότερη βοηθειά του, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Λέκτορα του Τμήματος Μαθηματικών κ. Παναγή Καραζέρη.

Κεφάλαιο 1

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε βασικές έννοιες και κάποια αποτελέσματα από την θεωρία κατηγοριών και την τοπολογία.

1.1 Στοιχεία από την θεωρία κατηγοριών

1.1.1 Ορισμός. Αν $\mathcal{C}$ είναι μία κατηγορία τότε ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}$ (το οποίο θα συμβολίζουμε $*$) λέγεται **τελικό** αντικείμενο, αν για κάθε $C \in \mathcal{C}_0$, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $C \to *$, και δυϊκά
ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}$ (το οποίο θα συμβολίζουμε $\emptyset$) λέγεται **αρχικό** αντικείμενο, αν για κάθε $C \in \mathcal{C}_0$, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\emptyset \to C$

1.1.2 Ορισμός. Έστω A, B δύο αντικείμενα μίας κατηγορίας $\mathcal{C}$. **Γινόμενο** των A και B στην $\mathcal{C}$ είναι μία τριάδα (P, p_1, p_2), όπου P είναι ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}$ και $p_1 : P \to A$, $p_2 : P \to B$, έτσι ώστε, αν $Q \in \mathcal{C}_0$ και $q_1 : Q \to A$, $q_2 : Q \to B$, τότε υπάρχει μοναδικός μορφισμός $< p_1, p_2 >: Q \to P$, τέτοιος ώστε $p_1 \circ < p_1, p_2 >= q_1$ και $p_2 \circ < p_1, p_2 >= q_2$. Το γινόμενο δύο αντικειμένων A και B (αν υπάρχει) θα το συμβολίζουμε $A \times B$. Δυϊκά
Συν-γινόμενο των A και B στην $\mathcal{C}$ είναι μία τριάδα (X, i_1, i_2), όπου X είναι ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}$ και $i_1 : A \to X$, $i_2 : B \to X$, έτσι ώστε, αν $Y \in \mathcal{C}_0$ και $j_1 : A \to Y$, $j_2 : B \to Y$, τότε υπάρχει μοναδικός μορφισμός $i_1 + i_2 : X \to Y$, τέτοιος ώστε $(i_1 + i_2) \circ i_1 = j_1$ και $(i_1 + i_2) \circ i_2 = j_2$. Το συν-γινόμενο δύο αντικειμένων A και B (αν υπάρχει) θα το συμβολίζουμε $A \sqcup B$.

Ο ορισμός του γινομένου (αντ. συν-γινομένου) γενικεύεται για μία οικογένεια αντικειμένων.

1.1.3 Ορισμός. Έστω $\{A_i\}_{i \in I}$ μία οικογένεια αντικειμένων μίας κατηγορίας $\mathcal{C}$. Ορίζουμε το γίνομενο των $\{A_i\}_{i \in I}$ να είναι ένα αντικείμενο P της κατηγορίας μαζί με μία οικογένεια μορφισμών $\{p_i\}_{i \in I}$ με τις εξής ιδιότητες:

1) $p_i : P \to A_i$ για κάθε $i \in I$

2) Αν Q είναι ένα άλλο αντικείμενο της κατηγορίας και $\{q_i\}_{i\in I}$ μία οικογένεια μορφισμών με $q_i : Q \to A_i$, τότε υπάρχει μοναδικός μορφισμός $h : Q \to P$, έτσι ώστε $p_i \circ h = q_i$, για κάθε $i \in I$.

Δυϊκά

1.1.4 Ορισμός. Έστω $\{A_i\}_{i\in I}$ μία οικογένεια αντικειμένων μίας κατηγορίας $\mathcal{C}$. Ορίζουμε το συν-γινόμενο των $\{A_i\}_{i\in I}$ να είναι ένα αντικείμενο X της κατηγορίας μαζί με μία οικογένεια μορφισμών $\{x_i\}_{i\in I}$ με τις εξής ιδιότητες:

1) $x_i : A_i \to X$ για κάθε $i \in I$

2) Αν Y είναι ένα άλλο αντικείμενο της κατηγορίας και $\{y_i\}_{i\in I}$ μία οικογένεια μορφισμών με $y_i : A_i \to Y$, τότε υπάρχει μοναδικός μορφισμός $k : X \to Y$, έτσι ώστε $k \circ x_i = y_i$, για κάθε $i \in I$.

Παρατήρηση: Το γινόμενο (αντ. συν-γινόμενο) τών $\{A_i\}_{i\in I}$ σε μία κατηγορία $\mathcal{C}$ (αν υπάρχει) θα συμβολίζεται με $\prod_{i\in I} A_i$ (αντ. $\coprod_{i\in I} A_i$).

1.1.5 Ορισμός. Αν f και g είναι δύο μορφισμοί σε μία κατηγορία $\mathcal{C}$ με το ίδιο συν-πεδίο

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

εφέλκυση (pullback) αυτού του διάγράμματος καλείται μία τριάδα (P, p_1, p_2), όπου P είναι ένα αντικείμενο της κατηγορίας και $p_1 : P \to A$, $p_2 : P \to B$, έτσι ώστε:

1) $fp_1 = gp_2$ και

2) Αν $Z \in \mathcal{C}_0$ και $z_1 : Z \to A$, $z_2 : Z \to B$, ετσι ώστε $fz_1 = gz_2$, τότε υπάρχει μοναδικός μορφισμός $u : Z \to P$, τέτοιος ώστε $p_1 u = z_1$ και $p_2 u = z_2$.

Δυϊκά

Αν f και g είναι δύο μορφισμοί σε μία κατηγορία $\mathcal{C}$ με το ίδιο πεδίο

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & B \\ C & \end{tikzcd}$$

εξώθηση (pushout) αυτού του διάγράμματος καλείται μία τριάδα (Q, q_1, q_2), όπου Q είναι ένα αντικείμενο της κατηγορίας και $q_1 : B \to Q$, $q_2 : C \to Q$ έτσι ώστε:

1) $q_1 f = q_2 g$ και

2) Αν $Y \in \mathcal{C}_0$ και $y_1 : B \to Y$, $y_2 : C \to Y$, ετσι ώστε $y_1 f = y_2 g$, τότε υπάρχει μοναδικός μορφισμός $v : Q \to Y$, τέτοιος ώστε $vq_1 = y_1$ και $vq_2 = y_2$.

1.1.6 Ορισμός. Αν $f, g : X \rightrightarrows Y$ είναι ένα ζεύγος (παράλληλων) μορφισμών σε μία κατηγορία $\mathcal{C}$, **εξισωτής** των f και g είναι ένα ζεύγος (E, e), όπου E είναι ένα αντικείμενο της κατηγορίας και $e : E \to X$ έτσι ώστε:

1) $fe = ge$ και

2) Αν K είναι ένα αντικείμενο της κατηγορίας και $k : K \to X$ ένας μορφισμός με την ιδιότητα $fk = gk$, τότε υπάρχει μοναδικός μορφισμός $h : K \to E$, έτσι ώστε $eh = k$.

1.1.7 Ορισμός. Αν $f, g : X \rightrightarrows Y$ είναι ένα ζεύγος (παράλληλων) μορφισμών σε μία κατηγορία $\mathcal{C}$, **συνεξισωτής** των f και g είναι ένα ζεύγος (C, c), όπου C είναι ένα αντικείμενο της κατηγορίας και $c : Y \to C$ έτσι ώστε:

1) $cf = cg$ και

2) Αν A είναι ένα αντικείμενο της κατηγορίας και $\alpha : Y \to A$ ένας μορφισμός με την ιδιότητα $\alpha f = \alpha g$, τότε υπάρχει μοναδικός μορφισμός $r : C \to A$, έτσι ώστε $rc = \alpha$.

Παρατήρηση: Για όλα τα παραπάνω (τελικό-αρχικό αντικείμενο, γινόμενο-συν-γινόμενο, εφέλκυση-εξώθηση, εξισωτής-συνεξισωτής) ισχύει ότι, αν υπάρχουν σε μία κατηγορία, τότε θα είναι μοναδικά μέχρι μοναδικού ισομορφισμού.

Όλες οι παραπάνω έννοιες είναι ειδικές περιπτώσεις της γενικότερης έννοιας, του ορίου και του συνορίου ενός διαγράμματος σε μία κατηγορία.

1.1.8 Ορισμός. Έστω $\mathcal{I}$ και $\mathcal{C}$ δύο κατηγορίες. Ένα **διάγραμμα** τύπου $\mathcal{I}$ στην $\mathcal{C}$ είναι ένας συναρτητής $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$. Ένας **κώνος** για το διάγραμμα αποτελείται από ένα αντικείμενο $C \in \mathcal{C}$ και από μία οικογένεια μορφισμών $(\lambda_i)_{i \in \mathcal{I}_0}$, έτσι ώστε για κάθε μορφισμό $\alpha : i \to j$ στην $\mathcal{I}$ το παρακάτω τρίγωνο να αντιμετατίθεται

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\lambda_i"'] \arrow[dr, "\lambda_j"] & \\ C_i \arrow[rr, "F(\alpha)"] & & C_j, \end{tikzcd}$$

όπου $C_i = F(i)$ και $C_j = F(j)$.

Ένας **τελικός κώνος** για το διάγραμμα είναι ένας κώνος $(C, \lambda_i)_{i \in \mathcal{I}_0}$ με την εξής ιδιότητα: Αν $(C', k_i)_{i \in \mathcal{I}_0}$ ένας άλλος κώνος για το διάγραμμα, τότε υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\theta : C' \to C$ έτσι ώστε $\lambda_i \circ \theta = k_i$, για κάθε $i \in \mathcal{I}_0$.

Παρατήρηση: Ένας τελικός κώνος για ένα διάγραμμα $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$, αν υπάρχει, τότε είναι μοναδικός μέχρι μοναδικού ισομορφισμού. Τον τελικό αυτό κώνο τον λέμε **όριο** του διαγράμματος και συμβολίζουμε $\lim F$ ή $\lim_{i \in \mathcal{I}} F(i)$.

Η δυϊκή έννοια του ορίου είναι το συνόριο και έχουμε:

1.1.9 Ορισμός. Έστω $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ ένα διάγραμμα τύπου $\mathcal{I}$ στην $\mathcal{C}$. Ένας **συν-κώνος** για το διάγραμμα αποτελείται από ένα αντικείμενο $D \in \mathcal{C}$ και από μία οικογένεια μορφισμών $(\lambda_i)_{i \in \mathcal{I}_0}$, έτσι ώστε για κάθε μορφισμό $\alpha : i \to j$ στην $\mathcal{I}$ το παρακάτω τρίγωνο να αντιμετατίθεται

$$\begin{tikzcd} D_i \arrow[rr, "F(\alpha)"] \arrow[dr, "\lambda_i"'] & & D_j, \arrow[dl, "\lambda_j"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

όπου $D_i = F(i)$ και $D_j = F(j)$.

Ένας **τελικός συν-κώνος** για το διάγραμμα είναι ένας συν-κώνος $(D, \lambda_i)_{i \in \mathcal{I}_0}$ με την εξής ιδιότητα: Αν $(D', k_i)_{i \in \mathcal{I}_0}$ ένας άλλος συν-κώνος για το διάγραμμα, τότε υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\theta : D \to D'$, έτσι ώστε $\theta \circ \lambda_i = k_i$, για κάθε $i \in \mathcal{I}_0$.

Παρατήρηση: Ένας τελικός συν-κώνος για ένα διάγραμμα $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$, αν υπάρχει, τότε είναι μοναδικός μέχρι μοναδικού ισομορφισμού. Τον τελικό αυτό συν-κώνο τον λέμε **συνόριο** του διαγράμματος και συμβολίζουμε $\mathrm{colim} F$ ή $\mathrm{colim}_{i \in \mathcal{I}} F(i)$.

Παρατήρηση: Αν το όριο (αντ. συνόριο) **κάθε** διαγράμματος $\mathcal{I} \to \mathcal{C}$, όπου $\mathcal{I}$ μικρή κατηγορία υπάρχει σε μία κατηγορία $\mathcal{C}$, λέμε ότι η $\mathcal{C}$ είναι πλήρης (αντ. συν-πλήρης) κατηγορία. Αν το όριο (αντ. συνόριο) υπάρχει για κάθε πεπερασμένη κατηγορία $\mathcal{I}$ (δηλαδή η συλλογή των μορφισμών της $\mathcal{I}$ είναι πεπερασμένο σύνολο), λέμε ότι η $\mathcal{C}$ έχει όλα τα πεπερασμένα όρια (αντ. συνόρια).

1.1.10 Θεώρημα. *Μία κατηγορία έχει όλα τα (πεπερασμένα) όρια αν και μόνο αν έχει (πεπερασμένα) γινόμενα και εξισωτές.*

Απόδειξη: Αν υπάρχουν όλα τα όρια τότε προφανώς υπάρχουν γινόμενα και εξισωτές.

Αντίστροφα τώρα, έστω $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ ένα διάγραμμα στην $\mathcal{C}$. Θεωρούμε το γινόμενο $\prod_{\mathcal{I}_0} F(i)$ όλων των αντικειμένων $F(i)$, με το i να διατρέχει το σύνολο των αντικειμένων της $\mathcal{I}$, και το γινόμενο $\prod_{\mathcal{I}_1} F(\vartheta_1 \alpha)$, όλων των αντικειμένων που είναι συν-πεδία κάποιου μορφισμού στο διάγραμμα.
Υπάρχουν δύο (κανονικοί) μορφισμοί $\prod_{\mathcal{I}_0} F(i) \to \prod_{\mathcal{I}_1} F(\vartheta_1\alpha)$ μεταξύ των δύο γινομένων. Για να περιγράψουμε την δράση ενός τέτοιου μορφισμού αρκεί από την καθολική ιδιότητα των γινομένων να περιγράψουμε μία οικογένεια μορφισμών, παραμετρικοποιημένη από τον σύνολο των μορφισμών της $\mathcal{I}$, από το $\prod_{\mathcal{I}_0} F(i)$ προς τα διάφορα $F(\vartheta_1\alpha)$, όπου $\alpha : k \to j$ μορφισμός στην $\mathcal{I}$.
Για την περιγραφή των μορφισμών έχουμε ότι, αν $j = \vartheta_1\alpha$ και $k = \vartheta_0\alpha$, οι οικογένειες αυτές είναι:

$$\{ \ \textstyle\prod_{\mathcal{I}_0} F(i) \xrightarrow{pr_j} F(j) \xrightarrow{id} F(\vartheta_1\alpha) \ \}$$

και

$$\{ \ \textstyle\prod_{\mathcal{I}_0} F(i) \xrightarrow{pr_k} F(\vartheta_0\alpha) \xrightarrow{F(\alpha)} F(\vartheta_1\alpha) \ \}$$

Αν με $\delta, \tau : \prod_{\mathcal{I}_0} F(i) \rightrightarrows \prod_{\mathcal{I}_1} F(\vartheta_1\alpha)$ συμβολίσουμε τους δύο μορφισμούς που περιγράψαμε παραπάνω, τότε το όριο του διαγράμματος $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ είναι ο εξισωτής των δ και τ. $\square$

Το παραπάνω θεώρημα έχει την δυική του μορφή:

1.1.11 Θεώρημα. *Μία κατηγορία έχει όλα τα (πεπερασμένα) συνόρια αν και μόνο έχει (πεπερασμένα) συν-γινόμενα και συνεξισωτές.*

Για την περιγραφή του συνορίου ενός διαγράμματος $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$, έχουμε ότι αυτό κατασκευάζεται ως ο συνεξισωτής των μορφισμών:

$$\delta, \tau : \coprod_{\mathcal{I}_1} F(\vartheta_0\alpha) \rightrightarrows \coprod_{\mathcal{I}_0} F(i)$$

Εφαρμογή: Με βάση τα παραπάνω θα δούμε την κατασκευή των ορίων και των συνορίων στην κατηγορία των συνόλων **Set**. Αν $F : \mathcal{I} \to \mathbf{Set}$ είναι ένα διάγραμμα ($\mathcal{I}$ μικρή κατηγορία) στην κατηγορία των συνόλων, τότε:

$$\lim F = \{ < x_i > \in \prod_{\mathcal{I}_0} F(i) | \ x_j = F(\alpha)(x_i), \ \text{οποτεδήποτε} \ \alpha : i \to j \}$$

και

$$\mathrm{colim}F = \coprod_{\mathcal{I}_0} F(i)/\sim,$$

όπου $\sim$ είναι η ελάχιστη σχέση ισοδυναμίας που ταυτίζει τα στοιχεία $\delta(x)$ και $\tau(x)$.

Παρατήρηση: Αν $F : \mathcal{I} \to \mathbf{Top}$, είναι ένα διάγραμμα ($\mathcal{I}$ μικρή κατηγορία) στην $\mathbf{Top}$, τότε για το όριο του F, θεωρούμε το όριο αυτού του διαγράμματος στην κατηγορία των συνόλων, με τοπολογία την τοπολογία υπόχωρου του γινομένου $\prod_{\mathcal{I}_0} F(i)$, όπου το γινόμενο είναι εφοδιασμένο με την τοπολογία γινόμενο.
Για το συνόριο του F, πάλι θεωρούμε το συνορίο του διαγράμματος στην κατηγορία των συνόλων και η τοπολογία αυτού του συνόλου είναι η εξής: ένα υποσύνολο U του $colimF$ είναι ανοικτό αν και μόνο αν το σύνολο $j_i^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στον χώρο $F(i)$ για όλα τα $i \in \mathcal{I}$, όπου $j_i : F(i) \to colimF$ είναι οι κανονικοί μορφισμοί προς το συνόριο.

1.1.12 Ορισμός. Αν $\mathcal{K}$ είναι μία κατηγορία, τότε με $\mathcal{K}^{\to}$ συμβολίζουμε την **κατηγορία των βελών** της $\mathcal{K}$, τα αντικείμενα της οποίας είναι οι μορφισμοί της $\mathcal{K}$ και ένας μορφισμός $(f : X \to Y) \longrightarrow (g : Z \to W)$ αποτελείται από ένα ζευγάρι μορφισμών $< \varphi_0, \varphi_1 >$, όπου $\varphi_0 : X \to Z$ και $\varphi_1 : Y \to W$, έτσι ώστε το παρακάτω τετράγωνο να αντιμετατίθεται:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_0"'] & Y \arrow[d, "\varphi_1"] \\ Z \arrow[r, "g"'] & W \end{tikzcd}$$

Επιπλέον έχουμε και δύο συναρτητές

$$\vartheta_0,\ \vartheta_1 : \mathcal{K}^{\to} \to \mathcal{K}$$

που ορίζονται ώς εξής: Στα αντικείμενα της $\mathcal{K}^{\to}$:

$$\vartheta_0(f : X \to Y) = X \quad \text{και} \quad \vartheta_1(f : X \to Y) = Y$$

Στους μορφισμούς της $\mathcal{K}^{\to}$:

$$\vartheta_0\left(\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_0"'] & Y \arrow[d, "\varphi_1"] \\ Z \arrow[r, "g"'] & W \end{tikzcd}\right) = \begin{tikzcd} X \arrow[d, "\varphi_0"] \\ Z \end{tikzcd}$$

και

$$\vartheta_1\left(\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle\varphi_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_1} \\ Z & \xrightarrow[g]{} & W \end{array}\right) = \begin{array}{c} Y \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi_1} \\ W \end{array}$$

1.1.13 Ορισμός. Μία **συναρτητική παραγοντοποίηση** (F,α,β) σε μία κατηγορία $\mathcal{K}$ αποτελείται από ένα συναρτητή $F : \mathcal{K}^{\rightarrow} \rightarrow \mathcal{K}$ και δύο φυσικούς μετασχηματισμούς $\alpha : \vartheta_0 \Rightarrow F$ και $\beta : F \Rightarrow \vartheta_1$, έτσι ώστε για κάθε $f \in (\mathcal{K}^{\rightarrow})_0$ να ισχύει $f = \beta_f \circ \alpha_f$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\alpha_f"'] & & Y \\ & Ff \arrow[ur, "\beta_f"'] & \end{tikzcd} .$$

Παρατήρηση: Λόγω της φυσικότητας των α, β , αν

$$\varphi =< \varphi_0, \varphi_1 >: (f : X \rightarrow Y) \longrightarrow (g : Z \rightarrow W)$$

τα εσωτερικά τετράγωνα στο παρακάτω διάγραμμα είναι αντιμεταθετικά

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha_f"] \arrow[d, "\varphi_0"'] & Ff \arrow[r, "\beta_f"] \arrow[d, "F\varphi"'] & Y \arrow[d, "\varphi_1"] \\ Z \arrow[r, "\alpha_g"] & Fg \arrow[r, "\beta_g"] & W \end{tikzcd}$$

Επιπλέον ο F είναι συναρτητής και αν

$$\varphi =< \varphi_0, \varphi_1 >: (f : X \rightarrow Y) \longrightarrow (g : Z \rightarrow W)$$

και

$$\psi =< \psi_0, \psi_1 >: (g : Z \rightarrow W) \longrightarrow (h : E \rightarrow D)$$

στην $\mathcal{K}^{\rightarrow}$, θα ισχύει $F(\psi \circ \varphi) = F\psi \circ F\varphi$.

1.1.14 Ορισμός. Αν $\mathcal{C}$ είναι μία κατηγορία και I ένα αντικείμενο αυτής, θεωρούμε τις εξής δύο κατηγορίες:

1) Την κατηγορία $\mathcal{C} \downarrow I$ (η κατηγορία των μορφισμών πάνω από το I) η οποία έχει:

αντικείμενα: τους μορφισμούς της $\mathcal{C}$ με συν-πεδίο το I

μορφισμούς: Ένας μορφισμός από το αντικείμενο $f : A \rightarrow I$ στο αντικείμενο $g : B \rightarrow I$ είναι ένας μορφισμός $h : A \rightarrow B$ της $\mathcal{C}$, έτσι ώστε $g \circ h = f$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & I & \end{tikzcd} .$$

2) Την κατηγορία $I \downarrow \mathcal{C}$ (η κατηγορία των μορφισμών κάτω από το I) η οποία έχει:

αντικείμενα: τους μορφισμούς της $\mathcal{C}$ με πεδίο το I

μορφισμούς: Ένας μορφισμός από το αντικείμενο $f : I \to A$ στο αντικείμενο $g : I \to B$ είναι ένας μορφισμός $h : A \to B$ της $\mathcal{C}$, έτσι ώστε $h \circ f = g$

$$\begin{tikzcd} & I \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[rr, "h"'] & & B. \end{tikzcd}$$

1.1.15 Ορισμός. Αν A και B είναι δύο αντικείμενα μίας κατηγορίας $\mathcal{C}$, τότε το A καλείται **συστολή (retract)** του B αν υπάρχουν δύο μορφισμοί $i : A \to B$ και $r : B \to A$, έτσι ώστε $ri = id_A$.

Παρατήρηση: Αν $\mathcal{C}$ είναι μία κατηγορία και εφαρμόσουμε τον παραπάνω ορισμό στην κατηγορία $\mathcal{C}^{\to}$, έχουμε ότι ο μορφισμός $f : X \to X'$ είναι συστολή του μορφισμού $g : Y \to Y'$, αν υπάρχει ένα αντιμεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "r"] \arrow[d, "g"] & X \arrow[d, "f"] \\ X' \arrow[r, "i'"] & Y' \arrow[r, "r'"] & X' \end{tikzcd}$$

όπου $ri = id_X$ και $r'i' = id_{X'}$.

1.1.16 Ορισμός. Δοθέντος ενός αντιμεταθετικού τετραγώνου

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

σε μία κατηγορία $\mathcal{C}$ μία **ανύψωση (lift)** για το διάγραμμα αυτό είναι ένας μορφισμός $h : B \to X$, έτσι ώστε τα δύο τρίγωνα που σχηματίζονται στο παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικά

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & M \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "g"] \arrow[ur, dotted, "h"] & N \end{tikzcd}$$

δηλαδή $hi = f$ και $ph = g$.

1.1.17 Ορισμός. Έστω $i : A \to B$ και $p : X \to Y$ δύο μορφισμοί σε μία κατηγορία $\mathcal{C}$. Λέμε ότι ο i έχει την **ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης (LLP)** σε σχέση με τον p και ότι ο p έχει την **ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης (RLP)** σε σχέση με τον i αν υπάρχει ανύψωση για κάθε αντιμεταθετικό τετράγωνο της μορφής:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι το ζευγάρι (i, p) αποτελεί **ζεύγος ανύψωσης-επέκτασης**.

1.1.18 Πρόταση. *(***The retract argument***) Έστω f ένας μορφισμός σε μία κατηγορία $\mathcal{C}$ και $f = pi$ μία παραγοντοποίηση αυτού τέτοια ώστε ο f έχει την LLP σε σχέση με τον p. Τότε ο f είναι συστολή του i. Δυϊκά αν ο f έχει την RLP σε σχέση με τον i τότε ο f είναι συστολή του p.*

Απόδειξη: Έστω $f : A \to C$, $i : A \to B$, $p : B \to C$ έτσι ώστε $f = pi$ και επιπλέον ο f έχει την LLP σε σχέση με τον p. Τότε μία ανύψωση υπάρχει στον παρακάτω αντιμεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "p"] \\ C \arrow[r, "id_C"] \arrow[ur, dotted, "r"] & C \end{tikzcd}$$

οπότε $pr = id_C$.

Από το παρακάτω διάγραμμα έχουμε ότι ο f είναι συστολή του i

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "id_A"] \arrow[d, "f"] & A \arrow[r, "id_A"] \arrow[d, "i"] & A \arrow[d, "f"] \\ C \arrow[r, "r"] & B \arrow[r, "p"] & C \end{tikzcd}$$

□

1.1.19 Ορισμός. 1) Αν το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{i'} & A \\ {\scriptstyle j'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ C & \xrightarrow{i} & B \end{array}$$

είναι διάγραμμα εφέλκυσης, τότε ο μορφισμός i' καλείται **αλλαγή βάσης** του i κατά μήκος του j και ο μορφισμός j' καλείται αλλαγή βάσης του j κατά μήκος του i.

2) Αν το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & B \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j'} \\ C & \xrightarrow{i'} & P \end{array}$$

είναι διάγραμμα εξώθησης, τότε ο μορφισμός i' καλείται **αλλαγή συν-βάσης** του i κατά μήκος του j και ο μορφισμός j' καλείται αλλαγή συν-βάσης του j κατά μήκος του i.

1.1.20 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία και R μία συνάρτηση που σε κάθε ζευγάρι αντικειμένων A,B της $\mathcal{C}$ αντιστοιχίζει μία διμελή σχέση $R_{A,B}$ στο σύνολο $hom_{\mathcal{C}}(A,B)$. Τότε υπάρχει μία κατηγορία $\mathcal{C}/R$ και ένας συναρτητής $Q = Q_R : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/R$ έτσι ώστε:*

1) Αν $fR_{A,B}g$ στην $\mathcal{C}$ τότε $Qf = Qg$ και

2) Αν $\mathcal{D}$ είναι μία κατηγορία και $H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ένας συναρτητής, έτσι ώστε η σχέση $fR_{A,B}g$ συνεπάγεται ότι $Hf = Hg$, τότε υπάρχει μοναδικός συναρτητής $H' : \mathcal{C}/R \to \mathcal{D}$ τέτοιος ώστε $H' \circ Q = H$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "Q"] \arrow[dr, "H"'] & & \mathcal{C}/R \arrow[dl, dotted, "H'"] \\ & \mathcal{D} & \end{tikzcd}.$$

Επιπλέον ο συναρτητής Q είναι ισομορφισμός στα αντικείμενα.

Περιγραφή της απόδειξης: Αν R είναι μία συνάρτηση όπως αυτή περιγράφεται στη πρόταση, θα λέγεται **ισοτιμία (congruence)** αν :

1) $R_{A,B}$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ για κάθε δύο αντικείμενα A, B και

2) Οποτεδήποτε έχουμε $f, f' : A \rightrightarrows B$ με $fR_{A,B}f'$, τότε για όλους τους μορφισμούς $g : A' \to A$ και $h : B \to B'$ (A', B' τυχαία), έχουμε ότι

$hfg\, R_{A,B}\, hf'g$. Αποδεικνύεται ότι για οποιαδήποτε R όπως περιγράφεται στην πρόταση, υπάρχει μία ισοτιμία R' τέτοια ώστε $R \subseteq R'$ και η R' είναι η ελάχιστη με την ιδιότητα αυτή.

Αν τώρα R μία συνάρτηση όπως περιγράφεται στην πρόταση και R' η ελάχιστη ισοτιμία που την περιέχει, τότε ορίζουμε την κατηγορία $\mathcal{C}/R$ να έχει τα ίδια αντικείμενα με την $\mathcal{C}$, και αν A, B δύο αντικείμενα της $\mathcal{C}/R$ (δηλαδή της $\mathcal{C}$) ορίζουμε $hom_{\mathcal{C}/R}(A,B) = hom_{\mathcal{C}}(A,B)/R'_{A,B}$. Ο συναρτητής $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/R$ είναι ο συναρτητής με την εξής δράση:

Στα αντικείμενα: $Q(C) = C$

Στους μορφισμούς:Αν $f : A \to B$ στην $\mathcal{C}$ τότε $Q(f) = [f]_{R'_{A,B}}$ □

Η κατηγορία $\mathcal{C}/R$ καλείται **κατηγορία πηλίκο** της $\mathcal{C}$ ως προς την R.

Για παράδειγμα αν $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$ είναι η κατηγορία των τοπολογικών χώρων με μορφισμούς συνεχείς απεικονίσεις μεταξύ τους και $fR_{A,B}g$, όπου $f, g : A \rightrightarrows B$, σημαίνει ότι f είναι ομοτοπική με την g, τότε η κατηγορία πηλίκο $\mathbf{Top}/R$ είναι η κατηγορία με αντικείμενα τοπολογικούς χώρους και μορφισμούς ομοτοπικές κλάσεις συνεχών συναρτήσεων. Στο παράδειγμα αυτό παρατηρούμε ότι η R είναι ταυτότητα, οπότε η κατασκευή της κατηγορίας πηλίκο είναι άμεση.

1.1.21 Ορισμός. Αν $\mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$ είναι δύο κατηγορίες και $F : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : G$ συναρτητές, θα λέμε ότι ο F είναι αριστερά προσαρτημένος του G και ο G δεξιά προσαρτημένος του F, αν για κάθε $C \in \mathcal{C}_0$ και $D \in \mathcal{D}_0$ υπάρχει ένας ισομορφισμός:

$$hom_{\mathcal{D}}(FC, D) \cong hom_{\mathcal{C}}(C, GD)$$

που είναι φυσικός ως προς C και D.

1.1.22 Θεώρημα. *Αν $F : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : G$ είναι δύο συναρτητές μεταξύ των κατηγοριών $\mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$, τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

1) Για κάθε $C \in \mathcal{C}_0$ και $D \in \mathcal{D}_0$ υπάρχει ένας ισομορφισμός:

$$\phi : hom_{\mathcal{D}}(FC, D) \cong hom_{\mathcal{C}}(C, GD) : \psi$$

που είναι φυσικός ως προς C και D.

2) Υπάρχει ένας φυσικός μετασχηματισμός:

$$\eta : 1_{\mathcal{C}} \Rightarrow G \circ F$$

με την ακόλουθη καθολική ιδιότητα:

Για κάθε $C \in \mathcal{C}_0$, $D \in \mathcal{D}_0$ και $f : C \to GD$, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $g : FC \to D$ τέτοιος ώστε:

$$f = Gg \circ \eta_C$$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\eta_C"'] & & GD \\ & GFC \arrow[ur, dotted, "Gg"'] & \end{tikzcd} .$$

3) Υπάρχει ένας φυσικός μετασχηματισμός:

$$\epsilon : F \circ G \Rightarrow 1_{\mathcal{D}}$$

με την ακόλουθη καθολική ιδιότητα:

Για κάθε $C \in \mathcal{C}_0$, $D \in \mathcal{D}_0$ και $g : FC \to D$, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $f : C \to GD$ τέτοιος ώστε:

$$g = \epsilon_D \circ Ff$$

$$\begin{tikzcd} FC \arrow[rr, dotted, "Ff"] \arrow[dr, "g"'] & & FGD \arrow[dl, "\epsilon_D"] \\ & D & \end{tikzcd} .$$

Παρατηρήσεις: 1) Επειδή η πρώτη συνθήκη είναι ο ορισμός της προσάρτησης, έχουμε ότι οι σύνθήκες 2, 3 μας δίνουν ισοδύναμους ορισμούς για την προσάρτηση μεταξύ δύο συναρτητών. Επιπλέον οι τρεις αυτές συνθήκες σχετίζονται μεταξύ τους με τις ακόλουθες ταυτότητες:

$$\eta_C = \phi(1_{FC}),$$

$$\phi(g) = Gg \circ \eta_C$$

και

$$\epsilon_D = \psi(1_{GD}),$$

$$\psi(f) = \epsilon_D \circ Ff.$$

2) Αν $f : FC \to D$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$ και $g : C \to GD$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathcal{D}$, τότε θα χρησιμοποιούμε τον εξής συμβολισμό:

$\phi(f) = f^\sharp$ και $\psi(g) = g^\flat$.

3) Λόγω φυσικότητας της προσάρτησης, ένας μορφισμός της μορφής

$$FA \xrightarrow{Ff} FB \xrightarrow{x} C$$

αντιστοιχίζεται στον

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{x^\sharp} GC,$$

όπως φαίνεται από το παρακάτω αντιμεταθετικό τετράγωνο

$$\begin{tikzcd}
hom_{\mathcal{D}}(FB, C) \arrow[r, "\phi_{B,C}"] \arrow[d, "-\circ Ff"'] & hom_{\mathcal{C}}(B, GC) \arrow[d, "-\circ f"] \\
hom_{\mathcal{D}}(FA, C) \arrow[r, "\phi_{A,C}"'] & hom_{\mathcal{C}}(A, GC)
\end{tikzcd}$$

$$\phi_{A,C}(x \circ Ff) = (x \circ Ff)^\sharp = x^\sharp \circ f.$$

1.1.23 Ορισμός. Αν $\mathcal{B}$ είναι μία κατηγορία και $\mathcal{A}$ μία υποκατηγορία αυτής, τότε η $\mathcal{A}$ καλείται **ανακλαστική** στην $\mathcal{B}$ αν ο συναρτητής $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ που εμφυτεύει την $\mathcal{A}$ στην $\mathcal{B}$ έχει αριστερά προσαρτημένο $F : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Δυϊκά

Αν $\mathcal{B}$ είναι μία κατηγορία και $\mathcal{A}$ μία υποκατηγορία αυτής, τότε η $\mathcal{A}$ καλείται **συνανακλαστική** στην $\mathcal{B}$ αν ο συναρτητής $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ που εμφυτεύει την $\mathcal{A}$ στην $\mathcal{B}$ έχει δεξιά προσαρτημένο $F : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$.

Παρατηρήσεις: 1) Έστω $\mathcal{A}$ μία ανακλαστική υποκατηγορία της $\mathcal{B}$ και $F : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ ο αριστερά προσαρτημένος της εμφύτευσης $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$. Αν η $\mathcal{B}$ είναι πλήρης (αντ. συν-πλήρης) τότε και η $\mathcal{A}$ θα είναι πλήρης (αντ. συν-πλήρης). Συγκεκριμένα έχουμε ότι, αν $G : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$ ένα διάγραμμα στην $\mathcal{A}$ και το όριο αυτού του διαγράμματος υπάρχει στην $\mathcal{B}$, τότε αυτό θα είναι και το όριο αυτού του διαγράμματος στην $\mathcal{A}$. Αν τώρα το συνόριο αυτού του διαγράμματος υπάρχει στην $\mathcal{B}$ και έστω D το συνόριο αυτό, τότε το $F(D)$ είναι το συνόριο του διαγράμματος στην $\mathcal{A}$. Δυϊκά

2) Αν $\mathcal{A}$ είναι μία συν-ανακλαστική κατηγορία της $\mathcal{B}$ και $F : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ ο δεξιά προσαρτημένος της εμφύτευσης $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$. Αν η $\mathcal{B}$ είναι πλήρης (αντ.συν-πλήρης) τότε και η $\mathcal{A}$ θα είναι πλήρης (αντ.συν-πλήρης). Συγκεκριμένα έχουμε ότι, αν $G : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$ ένα διάγραμμα στην $\mathcal{A}$ και το συνόριο αυτού του διαγράμματος υπάρχει στην $\mathcal{B}$, τότε αυτό θα είναι και το συνόριο αυτού του διαγράμματος στην $\mathcal{A}$. Αν τώρα το όριο αυτού του διαγράμματος υπάρχει στην $\mathcal{B}$ και έστω D το όριο αυτό, τότε το $F(D)$ είναι το όριο του διαγράμματος στην $\mathcal{A}$.

Στην συνέχεια αναφέρουμε ένα πολύ χρήσιμο αποτέλεσμα της θεωρίας κατηγοριών, γνωστό ως λήμμα του Yoneda.

1.1.24 Λήμμα. (του Yoneda) *Αν $\mathcal{C}$ είναι μία τοπικά μικρή κατηγορία, $C \in \mathcal{C}_0$,* **Set** *είναι η κατηγορία των συνόλων και $F : \mathcal{C}^{op} \to$* **Set** *ένας ανταλλοίωτος συναρτητής, τότε το σύνολο των φυσικών μετασχηματισμών από τον* *αναπαριστάσιμο συναρτητή $hom_{\mathcal{C}}(-, C)$ προς τον F, είναι ισοδύναμο με το σύνολο $F(C)$.*

1.1.25 Πόρισμα. *Ο συναρτητής $y : \mathcal{C} \to [\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$ με την εξής δράση:*
Στα αντικείμενα: $y(C) = hom_{\mathcal{C}}(-, C)$
Στους μορφισμούς: Αν $f : C \to C'$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$ τότε $y(f)$ είναι ο φυσικός μετασχηματισμός μεταξύ των αναπαριστάσιμων συναρτητών $hom_{\mathcal{C}}(-, C)$ και $hom_{\mathcal{C}}(-, C')$, όπου η D-συντεταγμένη αυτού:

$$y(f)_D : hom_{\mathcal{C}}(D, C) \to hom_{\mathcal{C}}(D, C')$$

στέλνει τον μορφισμό $g : D \to C$ στον μορφισμό $f \circ g$,
είναι πλήρης και πιστός.

1.1.26 Ορισμός. Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία με πεπερασμένα γινόμενα. Ένα **εκθετικό** των αντικειμένων B και C της $\mathcal{C}$, αποτελείται από ένα αντικείμενο C^B (εκθετικό αντικείμενο) και ένα μορφισμό $e : C^B \times B \to C$ (μορφισμός αποτίμησης), έτσι ώστε, για κάθε αντικείμενο Z και μορφισμό $f : Z \times B \to C$, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\tilde{f} : Z \to C^B$ έτσι ώστε $e \circ (\tilde{f} \times 1_B) = f$

$$\begin{tikzcd} C^B \times B \arrow[r, "e"] & C \\ Z \times B \arrow[u, "\tilde{f}\times 1_B"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

ή ισοδύναμα,
ο συναρτητής

$$- \times B : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$

να έχει δεξιά προσαρτημένο (τον $(-)^B$ και e θα είναι η συν-μονάδα της προσάρτησης).

Για παράδειγμα στην κατηγορία **Set** έχουμε C^B να είναι το σύνολο των συναρτήσεων $B \to C$ και η συνάρτηση αποτίμησης $e : C^B \times B \to C$ με $e(f, b) = f(b)$.

1.1.27 Ορισμός. Μία κατηγορία $\mathcal{C}$ καλείται **καρτεσιανά κλειστή**, αν έχει πεπερασμένα γινόμενα και εκθετικά.

1.2 Στοιχεία από την τοπολογία

1.2.1 Ορισμός. Αν X και Y είναι δύο τοπολογικοί χώροι, τότε δύο συνεχείς συναρτήσεις $f, g : X \rightrightarrows Y$, λέγονται **ομοτοπικές**, αν υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση $h : [0, 1] \times X \to Y$ τέτοια ώστε, για κάθε $x \in X$, έχουμε $h(0, x) = f(x)$ και $h(1, x) = g(x)$. Η συνάρτηση h καλείται **συνάρτηση ομοτοπίας** από την f στην g.

Παρατηρήσεις:

1) Αν με $C(X,Y)$ συμβολίσουμε το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων από το X στο Y, τότε η σχέση ομοτοπίας όπως ορίστηκε παραπάνω είναι μία σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $C(X,Y)$.
Επιπλέον αν $f,g : X \rightrightarrows Y$ είναι ομοτοπικά ισοδύναμες συναρτήσεις, $h : A \to X$ και $k : Y \to Z$, τότε η συνάρτηση kfh είναι ομοτοπικά ισοδύναμη με την kgh.

2) Μία συνεχής συνάρτηση $f : X \to Y$ καλείται **ομοτοπική ισοδυναμία** αν υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση $g : Y \to X$, έτσι ώστε η συνάρτηση gf να είναι ομοτοπικά ισοδύναμη με την ταυτοτική συνάρτηση $id_X : X \to X$ και η συνάρτηση fg να είναι ομοτοπικά ισοδύναμη με την ταυτοτική συνάρτηση $id_Y : Y \to Y$.

3) Αν (X,x) και (Y,y) είναι δύο τοπολογικοί χώροι με σημεία βάσης x και y αντίστοιχα και $f,g : X \rightrightarrows Y$ δύο συνεχείς συναρτήσεις που διατηρούν το σημείο βάσης (δηλαδή $f(x) = g(x) = y$), θα λέμε ότι f και g είναι (σημειακά) ομοτοπικές, αν υπάρχει μία ομοτοπία H από την f στην g τέτοια ώστε $H(t,x) = y$ για όλα τα $t \in I$.

1.2.2 Ορισμός. Με $S^n = \{(x_1,...,x_{n+1}) \in \mathbf{R^{n+1}} | x_1^2 + ... + x_{n+1}^2 = 1\}$ συμβολίζουμε την μοναδιαία σφαίρα στον $\mathbf{R}^{n+1}$, και $D^n = \{(x_1,...,x_n) \in \mathbf{R^n} | x_1^2 + ... + x_n^2 \leq 1\}$ συμβολίζουμε το μοναδιαίο δίσκο στον $\mathbf{R}^n$.

1.2.3 Ορισμός. Αν στην μοναδιαία σφαίρα S^n διαλέξουμε ως σημείο βάσης το σημείο $e_0 = (1,0,...,0)$, τότε αν X είναι ένας τοπολογικός χώρος και $x \in X$, θα συμβολίζουμε το σύνολο των σημειακών ομοτοπικών κλάσεων από το (S^n, e_0) στο (X,x) με $\pi_n(X,x)$ και θα αναφερόμαστε σε αυτό ως το n-οστό ομοτοπικό σύνολο του X στο x.

Παρατηρήσεις: 1) Το σύνολο $\pi_0(X,x)$ είναι το σύνολο των συνεκτικών συνιστώσων του X.

2)Έστω X και Y δύο τοπολογικοί χώροι, $x \in X$ και $f : X \to Y$ μία συνεχής συνάρτηση. Με $\pi_n(f,x)$ θα συμβολίζουμε την συνάρτηση $\pi_n(X,x) \to \pi_n(Y, f(x))$ η οποία στην κλάση ισοδυναμίας $[g]$ μίας συναρτησης g αντιστοιχίζει την κλάση ισοδυναμίας $[f \circ g]$ της $f \circ g$.

1.2.4 Ορισμός. **Κελί** διαστάσεως n λέγεται κάθε τοπολογικός χώρος ομοιόμορφος με τον $\mathbf{R^n}$. Μία **αποσύνθεση σε κελιά (cell decomposition)** ενός τοπολογικού χώρου X είναι μία διαμερίση του X, σε υποχώρους του που είναι κελιά.

1.2.5 Ορισμός. Ένα ζευγάρι $(X, \mathcal{E})$, όπου X είναι ένας Hausdorff χώρος και $\mathcal{E}$ μία αποσύνθεση σε κελιά, του X, καλείται **CW-complex**, αν τα παρακάτω τρία αξιώματα ικανοποιούνται

CW1) Για κάθε κελί $e \in \mathcal{E}$ διαστάσεως n υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση $\varphi_e : D^n \to X$ με την ιδιότητα ο υπόχωρος $\varphi_e((D^n)^\circ)$ να είναι ομοιόμορφος με το κελί e και ο υπόχωρος $\varphi_e(S^{n-1})$ να είναι η ένωση κελιών διάσταση το πολύ $n-1$.

CW2) Το περίβλημα $\overline{e}$ κάθε κελιού $e \in \mathcal{E}$ τέμνει μόνο πεπερασμένου πλήθους άλλα κελιά.

CW3) $A \subseteq X$ είναι κλειστό αν και μόνο αν για κάθε κελί e το σύνολο $A \cap \overline{e}$ είναι κλειστό.

1.2.6 Ορισμός. Μία συνεχής συνάρτηση $f : X \to Y$ μεταξύ τοπολογικών χώρων, καλείται **Serre νημάτωση (Serre fibration)**, αν έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης σε σχέση με τις συναρτήσεις (εμφυτεύσεις)

$$\{i_0 : D^n \to D^n \times I | n \geq 0\},$$

όπου $i_0(x) = (x, 0)$

$$\begin{tikzcd} D^n \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[d, "f"] \\ D^n \times I \arrow[r, "v"'] \arrow[ur, dotted, "h"] & Y \end{tikzcd}$$

Κεφάλαιο 2

ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΑΙ Η ΟΜΟΤΟΠΙΚΗ ΤΟΥΣ ΘΕΩΡΙΑ

2.1 Κατηγορίες Μοντέλο

Στην παράγραφο αυτή δίνουμε τον ορισμό της κατηγορίας μοντέλο και αποδεικνύουμε κάποια αποτελέσματα που ισχύουν σε κατηγορίες με τέτοια δομή.

2.1.1 Ορισμός. Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία που περιέχει τρεις κλάσεις μορφισμών:

i) **Ασθενείς ισοδυναμίες (Weak equivalences)** ($\tilde{\rightarrow}$)

ii) **Νηματώσεις (Fibrations)** ($\twoheadrightarrow$)

iii) **Συννηματώσεις (Cofibrations)** ($\hookrightarrow$)

όπου κάθε μία είναι κλειστή ως προς την σύνθεση, περιέχει τους ταυτοτικούς μορφισμούς, και επιπλέον στην κατηγορία αυτή υπάρχουν δύο συναρτητικές παραγοντοποιήσεις: (F, α, β), (G, γ, δ).
Επιπλέον καλούμε ένα μορφισμό **ακυκλική νημάτωση (acyclic fibration)** αν ανήκει στην κλάση των νηματώσεων και στην κλάση των ασθενών ισοδυναμιών και αντίστοιχα καλούμε ένα μορφισμό **ακυκλική συννημάτωση (acyclic cofibration)** αν ανήκει στην κλάση των συνηματώσεων και στην κλάση των ασθενών ισοδυναμιών.

Μία κατηγορία εφοδιασμένη με την παραπάνω δομή θα λέμε ότι είναι κατηγορία μοντέλο αν πληρούνται τα παρακάτω αξίωματα:

ΚΜ1 Η $\mathcal{C}$ είναι πλήρης και συν-πλήρης

ΚΜ2 Αν f και g μορφισμοί στην $\mathcal{C}$, έτσι ώστε να ορίζεται η gf και δύο απο τους τρεις μορφισμούς f, g, gf είναι ασθενείς ισοδυναμίες, τότε και ο τρίτος είναι.

ΚΜ3 Αν ο f είναι συστολή του g και ο g είναι νημάτωση ή συννημάτωση ή ασθενής ισοδυναμία, τότε το ίδιο είναι και ο f.

ΚΜ4 Δοθέντος ενός αντιμεταθετικού τετραγώνου:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

υπάρχει ανύψωση στο διάγραμμα σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) i είναι συννημάτωση και p ακυκλική νημάτωση.

ii) i είναι ακυκλική συννημάτωση και p νημάτωση.

ΚΜ5 Για κάθε μορφιμό $f \in \mathcal{C}_1$, α_f είναι συννημάτωση, β_f είναι ακυκλική νημάτωση, γ_f είναι ακυκλική συννημάτωση, και δ_f είναι νημάτωση.

Δηλαδή κάθε μορφισμός στην $\mathcal{C}$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί με δύο τρόπους:

i)$f = pi$, όπου i είναι συννημάτωση και p ακυκλική νημάτωση $\bullet \hookrightarrow \bullet \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} \bullet$

ii)$f = pi$, όπου i είναι ακυκλική συννημάτωση και p νημάτωση $\bullet \overset{\sim}{\hookrightarrow} \bullet \twoheadrightarrow \bullet$ και οι παραγοντοποιήσεις είναι συναρτητικές.

Παρατηρήσεις 1) Γενικά στην βιβλιογραφία τα σύμβολα $\hookrightarrow$ και $\twoheadrightarrow$ χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν ότι ένας μορφισμός είναι μονορφισμός ή επιμορφισμός αντίστοιχα. Στο κεφάλαιο αυτό θα χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν ότι ένας μορφισμός είναι συννημάτωση ή νημάτωση αντίστοιχα, χωρίς να είναι κατ' ανάγκη μονομορφισμοί η επιμορφισμοί.

2) Το ΚΜ4 θα μπορούσε να διατυπωθεί και ως εξής: Οι συννηματώσεις έχουν την LLP σε σχέση με τις ακυκλικές νηματώσεις, και οι ακυκλικές συννηματώσεις έχουν την LLP σε σχέση με τις νηματώσεις.

3) Από το ΚΜ1 έχουμε ότι μία κατηγορία μοντέλο έχει αρχικό ($\emptyset$) και τελικό ($*$) αντικείμενο.

Ένα αντικείμενο $A \in \mathcal{C}$ καλείται **συνινώδες (cofibrant)** αν ο μοναδικός μορφισμός $\emptyset \to A$ είναι συννημάτωση, και **ινώδες (fibrant)** αν ο μοναδικός μορφισμός $A \to *$ είναι νημάτωση.

4) Αν $\mathcal{C}$ είναι μία κατηγορία μοντέλο, τότε και η δυϊκή αυτής $\mathcal{C}^{op}$ αποκτά την δομή κατηγορίας μοντέλο ορίζοντας ένα μορφισμό $f^{op} : Y \to X$ να είναι:

i) *ασθενής ισοδυναμία*, αν ο $f : X \to Y$ είναι ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}$,

ii) *συννημάτωση*, αν ο $f : X \to Y$ είναι νημάτωση στην $\mathcal{C}$,

iii) *νημάτωση*, αν ο $f : X \to Y$ είναι συννημάτωση στην $\mathcal{C}$.

Από την παρατήρηση αυτή προκύπτει ότι τα αξιώματα για μία κατηγορία μοντέλο είναι αυτοδυϊκά. Δηλαδή, έστω P μία πρόταση που αναφέρεται σε κατηγορίες μοντέλο και P^* η δυϊκή της πρόταση που προκύπτει από την P αν αντιστρέψουμε τα βέλη και εναλλάξουμε τις συννηματώσεις με τις νηματώσεις.

Τότε αν η πρόταση P αληθεύει για **όλες** τις κατηγορίες μοντέλο, τότε το ίδιο θα ισχύει και για την P^*.

5) Αν $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ είναι δύο κατηγορίες μοντέλο, τότε και η κατηγορία $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ αποκτά την δομή κατηγορίας μοντέλο ως εξής:
$(f, g) : C \times D \to C' \times D'$ είναι ασθενής ισοδυναμία (αντ. νημάτωση, συννημάτωση), αν και μόνο αν $f : C \to C'$ είναι ασθενής ισοδυναμία (αντ. νημάτωση, συννημάτωση) στην $\mathcal{C}$ και $g : D \to D'$ είναι ασθενής ισοδυναμία (αντ. νημάτωση, συννημάτωση) στην $\mathcal{D}$.
6) Αν $\mathcal{C}$ είναι μία κατηγορία μοντέλο και $A \in \mathcal{C}_0$, τότε μπορούμε να έχουμε δομή κατηγορίας μοντέλο στην $A \downarrow \mathcal{C}$ ως εξής:
Ένας μορφισμός $h : (A \to X) \to (A \to Y)$ είναι ασθενής ισοδυναμία (αντ. νημάτωση, συννημάτωση) στην $A \downarrow \mathcal{C}$, αν ο $h : X \to Y$ είναι ασθενής ισοδυναμία (αντ. νημάτωση, συννημάτωση) στην $\mathcal{C}$.
Με όμοιο τρόπο μπορούμε να έχουμε μία κλειστή δομή στην κατηγορία $\mathcal{C} \downarrow A$.

2.1.2 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία μοντέλο. Τότε ισχύουν τα εξής:*

i*) Οι συννηματώσεις στην $\mathcal{C}$ είναι οι μορφισμοί στην $\mathcal{C}$ που έχουν την LLP σε σχέση με τις ακυκλικές νηματώσεις.*

ii*) Οι ακυκλικές συννηματώσεις στην $\mathcal{C}$ είναι οι μορφισμοί στην $\mathcal{C}$ που έχουν την LLP σε σχέση με τις νηματώσεις.*

και δυϊκά

iii*) Οι νηματώσεις στην $\mathcal{C}$ είναι οι μορφισμοί στην $\mathcal{C}$ που έχουν την RLP σε σχέση με τις ακυκλικές συννηματώσεις.*

iv*) Οι ακυκλικές νηματώσεις στην $\mathcal{C}$ είναι οι μορφισμοί στην $\mathcal{C}$ που έχουν την RLP σε σχέση με τις συννηματώσεις.*

Απόδειξη: i) Σύμφωνα με το ΚΜ4 κάθε συννημάτωση έχει την LLP σε σχέση με τις ακυκλικές νηματώσεις.

Για το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι ένας μορφισμός f έχει την LLP σε σχέση με τις ακυκλικές νηματώσεις.
Χρησιμοποιώντας το ΚΜ5(i) παραγοντοποιούμε τον f ως $f = pi$ όπου p ακυκλική νημάτωση και i συννημάτωση. Από την υποθεσή μας και χρησιμοποιώντας την προταση 1.1.18 έχουμε ότι ο f είναι συστολή του i.
Χρησιμοποιώντας τέλος το ΚΜ3 έχουμε ότι ο f είναι ότι και ο i δηλαδή ο f είναι συννημάτωση.

Όμοια αποδεικνύεται και το (ii) ενώ τα (iii),(iv), προκύπτουν ως οι δυϊκές προτάσεις των (i),(ii), χρησιμοποιώντας την παρατήρηση 4. □

Παρατήρηση: Η παραπάνω πρόταση μας λέει ότι τα αξιώματα για μία κατηγορία μοντέλο είναι υπερπλήρη, με την εξής έννοια: Αν σε μία κατηγορία θέλουμε να δώσουμε την δομή κατηγορίας μοντέλο και έχουμε διαλέξει τις κλάσεις των νηματώσεων και των ασθενών ισοδυναμιών, τότε η κλάση των συνηματώσεων καθορίζεται από το (i) της παραπάνω πρότασης.

Όμοια αν έχουμε διαλέξει τις κλάσεις των συνηματώσεων και των ασθενών ισοδυναμιών.

2.1.3 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία μοντέλο. Τότε ισχύουν τα εξής:*

i*) Η κλάση των συνηματώσεων στην $\mathcal{C}$ παραμένει σταθερή από την αλλαγή συν-βάσης,*

ii*) Η κλάση των ακυκλικών συνηματώσεων στην $\mathcal{C}$ παραμένει σταθερή από την αλλαγή συν-βάσης,*

και δυϊκά

iii*) Η κλάση των νηματώσεων στην $\mathcal{C}$ παραμένει σταθερή από την αλλαγή βάσης,*

iv*) Η κλάση των ακυκλικών νηματώσεων στην $\mathcal{C}$ παραμένει σταθερή από την αλλαγή βάσης.*

Απόδειξη: Αποδεικνύουμε το (i) και όμοια αποδεικνύεται το (ii), ενώ τα (iii) και (iii) προκύπτουν ώς δυϊκές προτάσεις των (i) και (ii).

i) Έστω ότι ο $i : K \hookrightarrow L$ είναι συννημάτωση και $f : K \to K'$. Θεωρούμε το παρακάτω διάγραμμα εξώθησης (υπάρχει λόγω του ΚΜ1)

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & K' \arrow[d, "j"] \\ L \arrow[r, "g"'] & L' \end{tikzcd}$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι ο j είναι συννημάτωση. Οπότε σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση (i) αρκεί να δείξουμε ότι έχει την LLP σε σχέση με τις ακυκλικές νηματώσεις.

Έστω λοιπόν $p : E \to B$ μία ακυκλική νημάτωση. Εξετάζουμε αν υπάρχει ανύψωση στο παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} K' \arrow[r, "a"] \arrow[d, "j"'] & E \arrow[d, "p"] \\ L' \arrow[r, "b"'] & B \end{tikzcd}$$

Τώρα επειδή i είναι συννημάτωση και p ακυκλική νημάτωση, στο παρακάτω αντιμεταθετικό διάγραμμα υπάρχει ανύψωση $h : L \to E$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & K' \arrow[r, "a"] & E \arrow[d, "p"] \\ L \arrow[r, "g"'] \arrow[urr, dotted, "h"] & L' \arrow[r, "b"'] & B \end{tikzcd}$$

οπότε $ph = bg(1)$ και $hi = af(2)$
Από τη σχέση (2) και την καθολική ιδιότητα των εξωθήσεων θα υπάρχει $l : L' \to E$ (λόγω των $h : L \to E$ και $a : K' \to E$) έτσι ώστε $lg = h$ και $lj = a$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & K' \arrow[d, "j"'] \arrow[dr, bend left, "a"] & \\ L \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & L' \arrow[r, dotted, "l"] & E \end{tikzcd}$$

Ο l όπως προσδιορίστηκε παραπάνω είναι η ζητούμενη ανύψωση. □

2.2 Ομοτοπικές σχέσεις μεταξύ μορφισμών

Στη παράγραφο αυτή θεωρούμε ότι $\mathcal{C}$ είναι μία κατηγορία μοντέλο και $A \in \mathcal{C}_0$

2.2.1 Ορισμός. Ένα **κυλινδρικό** αντικείμενο για το A αποτελείται από ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}$ το οποίο και συμβολίζουμε με $A \wedge I$ μαζί με ένα διάγραμμα

$$A \sqcup A \xrightarrow[i]{} A \wedge I \xrightarrow[w]{\sim} A$$

όπου ο w είναι ασθενής ισοδυναμία και $w \circ i = id_A + id_A : A \sqcup A \to A$.

$$\begin{tikzcd} & A & \\ A \arrow[ur, "id_A"] \arrow[r, "in_0"] & A \sqcup A \arrow[u, "id_A + id_A"'] & A \arrow[ul, "id_A"'] \arrow[l, "in_1"'] \end{tikzcd}$$

Ένα κυλινδρικό αντικείμενο καλείται **καλό κυλινδρικό αντικείμενο**, αν ο μορφισμός $A \sqcup A \to A \wedge I$ είναι συννημάτωση και **πολύ καλό κυλινδρικό αντικείμενο**, αν ο μορφισμός $A \wedge I \to A$ είναι (ακυκλική) νημάτωση.

Αν $in_0, in_1 : A \rightrightarrows A \sqcup A$ οι μορφισμοί προς το συν-γινόμενο, τότε συμβολίζουμε $i_0 = i \circ in_0$ και $i_1 = i \circ in_1$

$$\begin{tikzcd} & A \wedge I & \\ A \arrow[ur, "i_0"] \arrow[r, "in_0"] & A \sqcup A \arrow[u, "i"] & A. \arrow[l, "in_1"'] \arrow[ul, "i_1"'] \end{tikzcd}$$

Παρατηρήσεις: 1) Αν εφαρμόσουμε το ΚΜ5 i) για τον μορφισμό

$$A \sqcup A \xrightarrow{id_A + id_A} A$$

έχουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον πολύ καλό κυλινδρικό αντικείμενο για το (τυχαίο) A.

2) Ισχύει ότι: $w \circ i_0 = id_A = w \circ i_1$

$$A \xrightarrow{i_0} A \wedge I \xrightarrow{w} A\,, \quad A \xrightarrow{i_1} A \wedge I \xrightarrow{w} A$$

και $i = i_0 + i_1$

3) Αν $\mathcal{C}$ είναι η κατηγορία των τοπολογικών χώρων **Top** (η οποία όπως θα δούμε έχει δομή κατηγορίας μοντέλο), τότε κυλινδρικό αντικείμενο για τον τοπολογικό χώρο A (αντικείμενο της **Top**), είναι το καρτεσιανό γινόμενο $A \times I$, όπου I είναι το κλειστό διάστημα [0,1], $i_0 : A \to A \times I$ με τύπο $i_0(\alpha) = (\alpha, 0)$, $i_1 : A \to A \times I$ με τύπο $i_1(\alpha) = (\alpha, 1)$ και $w : A \times I \to A$, με $w(\alpha, t) = \alpha$.

2.2.2 Λήμμα. *Αν το A είναι συνινώδες και το $A \wedge I$ είναι ένα καλό κυλινδρικό αντικείμενο για το A τότε οι μορφισμοί $i_0, i_1 : A \rightrightarrows A \wedge I$ είναι ακυκλικές συννηματώσεις.*

Απόδειξη: Αποδεικνύουμε ότι ο i_0 είναι ακυκλική συννημάτωση.
Σύμφωνα με την παρατήρηση 2 έχουμε $w \circ i_0 = id_A$ και οι w, id_A είναι ασθενείς ισοδυναμίες. Άρα σύμφωνα με το αξίωμα 2 έχουμε ότι και ο i_0 είναι ασθενής ισοδυναμία.
Επίσης σε μία κατηγορία με πεπερασμένα συνόρια (άρα και εξωθήσεις) το συν-γινόμενο $A \sqcup A$, δίνεται από το παρακάτω διάγραμμα εξώθησης:

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r, "!"] \arrow[d, "!"'] & A \arrow[d, "in_0"] \\ A \arrow[r, "in_1"'] & A \sqcup A, \end{tikzcd}$$

όπου $\emptyset \xrightarrow{!} A$ είναι συννημάτωση (αφού το A είναι συνινώδες). Άρα σύμφωνα με την πρόταση 2.1.3 και ο in_0 είναι συννημάτωση, οπότε και ο $i_0 = i \circ in_0$

είναι συννημάτωση. (Ο i είναι συννημάτωση γιατί το A είναι καλό κυλινδρικό αντικείμενο.)

2.2.3 Ορισμός. Δύο μορφισμοί $f, g : A \rightrightarrows X$ στην $\mathcal{C}$ λέγονται **αριστερά ομοτοπικοί** (συμβολίζουμε $f \sim^l g$), αν υπάρχει ένα κυλινδρικό αντικείμενο $A \wedge I$ για το A και ένας μορφισμός $H : A \wedge I \to X$ έτσι ώστε: $H \circ i = f + g$

$$\begin{tikzcd} & X & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "in_0"'] & A \sqcup A \arrow[u, "f+g"'] & A \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "in_1"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \sqcup A \arrow[r, "f+g"] \arrow[d, "i"'] & X . \\ A \wedge I \arrow[ur, dotted, "H"'] & \end{tikzcd}$$

Ένας τέτοιος μορφισμός H, καλείται **αριστερή ομοτοπία** από τον f στον g.

Αν το $A \wedge I$ είναι καλό (αντ. πολύ καλό) κυλινδρικό αντικείμενο τότε η H καλείται καλή (αντ. πολύ καλή) αριστερή ομοτοπία.

Παρατηρήσεις: i) $Hi_0 = f$ και $Hi_1 = g$.

ii) Αν $f \sim^l g$ με ομοτοπία την H, τότε απο την παραπάνω παρατήρηση και το γεγονός ότι i_0, i_1 είναι ασθενείς ισοδυναμίες (απόδειξη 2.2.2) και το ΚΜ2 έχουμε ότι:

f ασθενής ισοδυναμία $\Leftrightarrow$ g ασθενής ισοδυναμία.

2.2.4 Λήμμα. *Αν $f \sim^l g : A \rightrightarrows X$, τότε υπάρχει μία καλή αριστερή ομοτοπία από τον f στον g. Αν επιπλέον το X είναι ινώδες, τότε υπάρχει μία πολύ καλή αριστερή ομοτοπία από τον f στον g.*

Απόδειξη: Έστω $A \wedge I$ ($A \sqcup A \xrightarrow[i]{} A \wedge I \xrightarrow[w]{} A$) ένα κυλινδρικό αντικείμενο για το A και H η αριστερή ομοτοπία από τον f στον g. Εφαρμόζουμε το ΚΜ5 i) για τον μορφισμό $A \sqcup A \xrightarrow{i} A \wedge I$, και έχουμε: $i = k \circ c$

$$\begin{tikzcd} A \sqcup A \arrow[r, "c"'] \arrow[rr, bend left, "i"] & A \wedge I' \arrow[r, "k"'] & A \wedge I \end{tikzcd}$$

όπου k είναι ακυκλική νημάτωση και c συννημάτωση. Αφού ο c είναι συννημάτωση, το $A \wedge I'$ είναι ένα καλό κυλινδρικό αντικείμενο για το A

$$A \sqcup A \xrightarrow[c]{} A \wedge I' \xrightarrow[w \circ k]{} A$$

και η $H \circ k : A \wedge I' \to X$ είναι η ζητούμενη καλή αριστερή ομοτοπία.

Έστω τώρα ότι το X είναι ινώδες.

Διαλέγουμε μία καλή αριστερή ομοτοπία $H : A \wedge I \to X$ από τον f στον g και εφαρμόζουμε το ΚΜ5 i) για να παραγοντοποιήσουμε τον μορφισμό $A \wedge I \tilde{\to} A$ ως :

$$A \wedge I \overset{}{\underset{a}{\hookrightarrow}} A \wedge I' \underset{b}{\overset{\sim}{\twoheadrightarrow}} A$$

και σύμφωνα με το ΚΜ2 ο μορφισμός a είναι ασθενής ισοδυναμία και επιπλέον το $A \wedge I'$ είναι ένα πολύ καλό κυλινδρικό αντικείμενο.
Από το ΚΜ4 έχουμε ότι υπάρχει ανύψωση για το παρακάτω αντιμεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
A \wedge I \arrow[r, "H"] \arrow[d, "a"'] & X \arrow[d, "1"] \\
A \wedge I' \arrow[r, "1"'] \arrow[ur, dotted, "H'"] & *.
\end{tikzcd}$$

Άρα έχουμε $H' \circ a = H$ και H' είναι η ζητούμενη πολύ καλή αριστερή ομοτοπία

$$\begin{tikzcd}
A \sqcup A \arrow[r, "i"] \arrow[drr, bend right, "f+g"'] & A \wedge I \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "H"] & A \wedge I' \arrow[d, "H'"] \\
& & X
\end{tikzcd}$$

. $\square$

Στην συνέχεια αποδεικνύουμε μία ικανή συνθήκη για να είναι η $\sim^l$ σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των μορφισμών $A \to X$.

2.2.5 Πρόταση. *Αν το A είναι συνινώδες, τότε $\sim^l$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $hom_{\mathcal{C}}(A, X)$.*

Απόδειξη: • $\sim^l$ ανακλαστική.
Έστω $f : A \to X$. Το A είναι ένα καλό κυλινδρικό αντικείμενο για το A, οπότε μπορούμε να διαλέξουμε τον f ως (καλή) αριστερή ομοτοπία από τον f στον f.

• $\sim^l$ συμμετρική.
Έστω $s = in_1 + in_0$

$$\begin{tikzcd}
& A \sqcup A & \\
A \arrow[ur, "in_1"] \arrow[r, "in_0"'] & A \sqcup A \arrow[u, "s"] & A \arrow[ul, "in_0"'] \arrow[l, "in_1"]
\end{tikzcd}$$

Για τον μορφισμό s ισχύει: $(f + g) \circ s = g + f$.

Αν τώρα $f \sim^l g$, με αριστερή ομοτοπία την H και κυλινδρικό αντικείμενο το $A \wedge I$,

$$A \sqcup A \xrightarrow{i} A \wedge I \xrightarrow{\sim} A$$

τότε και $g \sim^l f$ με αριστερή ομοτοπία την H και κυλινδρικό αντικείμενο το $A \wedge I$ εφοδιασμένο όμως με το διάγραμμα:

$$A \sqcup A \xrightarrow{i \circ s} A \wedge I \xrightarrow{\sim} A$$

.

- $\sim^l$ μεταβατική.

Έστω $f \sim^l g$, με καλή αριστερή ομοτοπία την H και $g \sim^l h$, με καλή αριστερή ομοτοπία την H'

$$A \sqcup A \xrightarrow{i} A \wedge I \xrightarrow{w} A \ , \qquad \begin{tikzcd} A \sqcup A \arrow[r, "f+g"] \arrow[d, "i=i_0+i_1"'] & X \\ A \wedge I \arrow[ur, dotted, "H"'] & \end{tikzcd}$$

$$A \sqcup A \xrightarrow{i'} A \wedge I' \xrightarrow{w'} A \ , \qquad \begin{tikzcd} A \sqcup A \arrow[r, "g+h"] \arrow[d, "i'=i'_0+i'_1"'] & X \\ A \wedge I'. \arrow[ur, dotted, "H'"'] & \end{tikzcd}$$

Έστω τώρα, $A \wedge I''$ η εξώθηση του διαγραμμάτος : $A \wedge I \xleftarrow{i_1} A \xrightarrow{i'_0} A \wedge I'$ και έστω

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i'_0"] \arrow[d, "i_1"'] & A \wedge I' \arrow[d, "k_1"] \\ A \wedge I \arrow[r, "k'_0"] & A \wedge I'' \end{tikzcd}$$

το διάγραμμα εξώθησης.

Σύμφωνα τώρα με το λήμμα 2.2.2 οι i'_0, i_1 είναι ακυκλικές συννηματώσεις (A συνινώδες), οπότε από την πρόταση 2.1.3 ii) το ίδιο θα είναι και οι k'_0, k_1. Επειδή $w' \circ i'_0 = id_A = w \circ i_1$, λόγω της καθολικής ιδιότητας της εξώθησης θα υπάρχει μορφισμός $k : A \wedge I'' \to A$ τέτοιος ώστε $k \circ k_1 = w'$ και $k \circ k'_0 = w$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i'_0"] \arrow[d, "i_1"'] & A \wedge I' \arrow[d, "k_1"] \arrow[ddr, bend left, "w'"] & \\ A \wedge I \arrow[r, "k'_0"] \arrow[drr, bend right, "w"'] & A \wedge I'' \arrow[dr, dotted, "k"] & \\ & & A \end{tikzcd}$$

Αν θεωρήσουμε, $i''_0 = k'_0 \circ i_0$, $i''_1 = k_1 \circ i'_1$ και $i'' = i''_0 + i''_1$ έχουμε ότι, $A \wedge I''$ είναι ένα κυλινδρικό αντικείμενο για το A:

$A \sqcup A \xrightarrow{i''} A \wedge I'' \xrightarrow{k} A$.
(k ασθενής ισοδυναμία γιατί $k \circ k_1 = w'$ και k_1, w' είναι ασθενείς ισοδυναμίες άρα από το ΚΜ2 και η k είναι). Τέλος, επειδή $H' \circ i'_0 = g = H \circ i_1$, πάλι από την καθολική ιδιότητα της εξώθησης έχουμε, ότι υπάρχει $H'' : A \wedge I'' \to X$ έτσι ώστε $H'' \circ k_1 = H'$ και $H'' \circ k'_0 = H$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i'_0"] \arrow[d, "i_1"'] & A \wedge I' \arrow[d, "k_1"'] \arrow[ddr, bend left, "H'"] & \\
A \wedge I \arrow[r, "k'_0"] \arrow[drr, bend right, "H"'] & A \wedge I'' \arrow[dr, dotted, "H''"] & \\
& & X
\end{tikzcd}$$

Η H'' είναι μία αριστερή ομοτοπία από τον f στον h. □

Παρατήρηση: Για την απόδειξη της παραπάνω πρότασης, η υπόθεση ότι το A είναι συνινώδες χρησιμοποιήθηκε μόνο για να αποδείξουμε την μεταβατικότητα της $\sim^l$.

2.2.6 Ορισμός. Έστω A, X δύο αντικείμενα της $\mathcal{C}$. Με $\pi^l(A, X)$ συμβολίζουμε το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας στο σύνολο $hom_{\mathcal{C}}(A, X)$, από την σχέση ισοδυναμίας που γεννιέται από την σχέση $\sim^l$ της αριστερής ομοτοπίας.

Στον παραπάνω ορισμό μιλάμε για την σχέση ισοδυναμίας που γεννιέται από την $\sim^l$ και αυτό γιατί, όπως είδαμε η $\sim^l$ είναι σχέση ισοδυναμίας αν το A είναι συνινώδες, και θα χρειαστεί να μιλήσουμε για το σύνολο $\pi^l(A, X)$ και σε περιπτώσεις που το A δεν είναι συνινώδες.

2.2.7 Λήμμα. *Αν $f \sim^l g : X \to Y$ και $k : Y \to Z$ τότε $kf \sim^l kg : X \to Z$*

Απόδειξη: Αν το $X \wedge I$ είναι ένα κυλινδρικό αντικείμενο για το X ,

$$X \sqcup X \xrightarrow{i} X \wedge I \xrightarrow{w} X$$

και $H : X \wedge I \to Y$ μία ομοτοπία από τον f στον g, τότε $kf \sim^l kg$ με ομοτοπία την $k \circ H$.
Πράγματι $(k \circ H)(i) = k \circ (f + g) = kf + kg$. □

Η παρακάτω πρόταση μας δίνει μία ικανή συνθήκη για να είναι η σχέση $\sim^l$ συμβατή με την σύνθεση από δεξιά.

2.2.8 Πρόταση. *Αν το X είναι ινώδες, f και g αριστερά ομοτοπικοί μορφισμοί $A \to X$ και $h : A' \to A$ ένας μορφισμός, τότε $fh \sim^l gh$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε μία πολύ καλή αριστερή ομοτοπία (2.2.4) $H : A\wedge I \to X$ ($A \sqcup A \underset{i}{\hookrightarrow} A\wedge I \underset{w_1}{\overset{\sim}{\twoheadrightarrow}} A$), από τον f στον g
και ένα καλό κυλινδρικό αντικείμενο για το A'

$$A' \sqcup A' \underset{j}{\hookrightarrow} A' \wedge I \underset{w_2}{\overset{\sim}{\twoheadrightarrow}} A'.$$

Το παρακάτω διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
A' \sqcup A' \arrow[r, "h \sqcup h"] \arrow[d, "j"'] & A \sqcup A \arrow[r, "i"] & A \wedge I \arrow[d, "w_1"] \\
A' \wedge I \arrow[r, "w_2"'] & A' \arrow[r, "h"'] & A
\end{tikzcd}$$

και επειδή j είναι συννημάτωση και w_1 ακυκλική νημάτωση, σύμφωνα με το ΚΜ4 υπάρχει μία ανύψωση του διαγράμματος $k : A' \wedge I \to A \wedge I$. Τότε η $Hk : A' \wedge I \to X$ είναι η ζητούμενη αριστερή ομοτοπία από τον fh στον gh.
Πράγματι έχουμε:
$(Hk)j \circ in_{A'_0} = H(kj) \circ in_{A'_0} = Hi(h \sqcup h) \circ in_{A'_0} = Hi \circ in_{A_0} \circ h = Hi_0 \circ h = fh$
και ομοίως έχουμε: $(Hk)j \circ in_{A'_1} = gh$
Άρα $(Hk)j = fh + gh$

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "h"] \arrow[d, "inA'_0"] & A \arrow[d, "inA_0"'] \\
A' \sqcup A' \arrow[r, dotted, "h \sqcup h"] & A \sqcup A \\
A' \arrow[r, "h"] \arrow[u, "inA'_1"] & A \arrow[u, "inA_1"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & X & \\
A' \arrow[ur, "fh"] \arrow[r, "in_{A'_0}"'] & A' \sqcup A' \arrow[u, dotted, "fh+gh"] & A \arrow[ul, "gh"'] \arrow[l, "in_{A'_1}"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A' \sqcup A' \arrow[r, "fh+gh"] \arrow[d, "j"'] & X \\
A' \wedge I \arrow[ur, dotted, "Hk"'] &
\end{tikzcd}$$

2.2.9 Πρόταση. *Αν το A είναι συνινώδες και $p : Y \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} X$ είναι μία ακυκλική νημάτωση, τότε η σύνθεση με p, επάγει ένα ισομορφισμό μεταξύ των συνόλων $\pi^l(A, Y)$ και $\pi^l(A, X)$*

Απόδειξη: Έστω $p_* : \pi^l(A, Y) \to \pi^l(A, X)$ η συνάρτηση με τύπο:

$$p_*([f]) = [pf]$$

• Η p_* είναι καλά ορισμένη.
Πράγματι, αν $[f] = [g]$, δηλαδή $f \sim^l g$ και H η αριστερή ομοτοπία μεταξύ τους, τότε από το λήμμα 2.2.7 έχουμε ότι και $pf \sim^l pg$ με αριστερή ομοτοπία την pH. Άρα $[pf] = [pg] \Leftrightarrow p_*([f]) = p_*([g])$.

• Η p_* είναι επί.
Έστω $[f] \in \pi^l(A, X)$. Αφού το A είναι συνινώδες ($! : \emptyset \to A$ συννημάτωση) και $p : Y \tilde{\twoheadrightarrow} X$ ακυκλική συννημάτωση θα υπάρχει μία ανύψωση g, στο παρακάτω αντιμεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r, "!"] \arrow[d, "!"'] & Y \arrow[d, "p"] \\ A \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dotted, "g"] & X \end{tikzcd}$$

οπότε $p_*([g]) = [pg] = [f]$.
• Η p_* είναι 1-1.
Έστω $f, g : A \rightrightarrows Y$ έτσι ώστε $p_*([f]) = p_*([g])$, δηλαδή $pf \sim^l pg$.
Διαλέγουμε μία καλή αριστερή ομοτοπία από τον pf στον pg $H : A \wedge I \to X$
$\left(A \sqcup A \xhookrightarrow{i} A \wedge I \xrightarrow[\sim]{w} A \right)$
Από το ΚΜ4 μία ανύψωση H' υπάρχει στο παρακάτω αντιμεταθετικό διάγραμμα ($p \circ (f + g) = p \circ f + p \circ g$)

$$\begin{tikzcd} A \sqcup A \arrow[r, "f+g"] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[d, "p"] \\ A \wedge I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dotted, "H'"] & X \end{tikzcd}$$

και από το επάνω αντιμεταθετικό τρίγωνο έχουμε ότι $H' : A \wedge I \to Y$ είναι μία (καλή) αριστερή ομοτοπία απο τον f στον g, δηλαδή: $f \sim^l g \Leftrightarrow [f] = [g]$.

2.2.10 Λήμμα. *Αν το X είναι ινώδες, τότε επάγεται μέσω της σύνθεσης στην $\mathcal{C}$ μία συνάρτηση*
$\pi^l(A', A) \times \pi^l(A, X) \to \pi^l(A', X)$
$([h], [f]) \mapsto [fh]$

Απόδειξη: Επειδή δεν απαιτούμε το A να είναι συνινώδες, δύο μορφισμοί $A \to X$ που αντιπροσωπεύουν το ίδιο στοιχείο του $\pi^l(A, X)$ δεν συνδεόνται άμεσα με μία αριστερή ομοτοπία. Όμως από τον τρόπο που ορίστηκε το σύνολο $\pi^l(A, X)$ είναι αρκετό να δείξουμε ότι αν $h \sim^l k : A' \to A$ και $f \sim^l g : A \to X$, τότε fh και gk αντιπροσωπεύουν το ίδιο στοιχείο του $\pi^l(A', X)$. Γι' αυτό αρκεί να δούμε ότι $fh \sim^l gh : A' \to X$ και $gh \sim^l gk : A' \to X$, και αυτές οι σχέσεις ισχύουν αν χρησιμοποιήσουμε το λήμμα 2.2.8 και το λήμμα 2.2.7 αντίστοιχα.

2.3 Δυϊκές σχέσεις

Λόγω δυϊκότητας για κατηγορίες μοντέλο έχουμε τις δυϊκες εκφράσεις και αποτελέσματα των 2.2.1 -2.2.10.

Στα επόμενα θεωρούμε ότι $\mathcal{C}$ είναι μία κατηγορία μοντέλο και $X \in \mathcal{C}_0$.

2.3.1 Ορισμός. Ένα **μονοπάτι αντικειμένων** για το X αποτελείται από ένα αντικείμενο της $\mathcal{C}$ το οποίο συμβολίζουμε X^I, μαζί με ένα διάγραμμα

$$X \xrightarrow[\sim]{w} X^I \xrightarrow{p} X \times X$$

όπου ο w είναι ασθενής ισοδυναμία και $p \circ w =< id_X,\, id_X >: X \to X \times X$

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "id_X"'] \arrow[d, "<id_X, id_X>"] \arrow[dr, "id_X"] & \\ X & X \times X \arrow[l, "pr_0"'] \arrow[r, "pr_1"] & X. \end{tikzcd}$$

Ένα μονοπάτι αντικειμένων καλείται **καλό μονοπάτι αντικειμένων**, αν ο μορφισμός $X^I \to X \times X$ είναι νημάτωση, και **πολύ καλό μονοπάτι αντικειμένων**, αν ο μορφισμός $X \xrightarrow{\sim} X^I$ είναι (ακυκλική) συννημάτωση.

- Αν $pr_0, pr_1 : X \times X \rightrightarrows X$ είναι οι μορφισμοί από το γινόμενο τότε συμβολίζουμε $p_0 = pr_0 \circ p$ και $p_1 = pr_1 \circ p$

$$\begin{tikzcd} & X^I \arrow[dl, "p_0"'] \arrow[d, "p"] \arrow[dr, "p_1"] & \\ X & X \times X \arrow[l, "pr_0"'] \arrow[r, "pr_1"] & X \end{tikzcd}$$

Παρατηρήσεις: 1) Αν εφαρμόσουμε το KM5 ii) για τον μορφισμό

$$X \xrightarrow{<id_X + id_X>} X \times X$$

έχουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον πολύ καλό μονοπάτι αντικειμένων για το (τυχαίο) X.

2) Ισχύει ότι: $p_0 \circ w = id_X = p_1 \circ w$ και $p =< p_0, p_1 >$.

3) Αν $\mathcal{C}$ είναι η κατηγορία των τοπολογικών χώρων **Top**, τότε μονοπάτι αντικειμένων για τον τοπολογικό χώρο X (αντικείμενο της **Top**) είναι ο χώρος X^I των συναρτήσεων $\{f : I \to X |\ f$ συνεχής $\}$ (με την συμπαγή-ανοικτή τοπολογία), όπου I είναι το κλειστό διάστημα [0,1], $p_0 : X^I \to X$ η συνάρτηση με τύπο $p_0(f) = f(0)$, $p_1 : X^I \to X$ η συνάρτηση με τύπο $p_1(f) = f(1)$ και $w : X \to X^I$, όπου $w(x)$ είναι η συνάρτηση με σταθερή τιμή x.

2.3.2 Λήμμα. *Αν το X είναι ινώδες και το X^I είναι ένα καλό μονοπάτι αντικειμένων για το X, τότε οι μορφισμοί $p_0, p_1 : X^I \rightrightarrows X$ είναι ακυκλικές νηματώσεις.*

2.3.3 Ορισμός. Δύο μορφισμοί $f, g : A \rightrightarrows X$ στην $\mathcal{C}$ λέγονται **δεξιά ομοτοπικοί** (συμβολίζουμε $f \sim^r g$), αν υπάρχει ένα μονοπάτι αντικειμένων X^I για το X και ένας μορφισμός $H : A \to X^I$ έτσι ώστε: $p \circ H = < f, g >$

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "<f,g>"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & X \times X \arrow[l, "pr_0"'] \arrow[r, "pr_1"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & X^I \arrow[d, "p"] \\ A \arrow[ur, dotted, "H"] \arrow[r, "<f,g>"'] & X \times X \end{tikzcd} .$$

Ένας τέτοιος μορφισμός H, καλείται **δεξιά ομοτοπία** από τον f στον g . Αν το X^I είναι καλό (αντ. πολύ καλό) μονοπάτι αντικειμένων, τότε η H καλείται καλή (αντ. πολύ καλή) δεξιά ομοτοπία.

Παρατηρήσεις 1) $p_0 H = f$ και $p_1 H = g$.

2) Αν $f \sim^r g$, τότε

f ασθενής ισοδυναμία $\Leftrightarrow$ g ασθενής ισοδυναμία.

2.3.4 Λήμμα. *Αν $f \sim^r g : A \to X$, τότε υπάρχει μία καλή δεξία ομοτοπία απο τον f στον g. Αν επιπλέον το A είναι συνινώδες, τότε υπάρχει μία πολύ καλή δεξιά ομοτοπία από τον f στον g.*

2.3.5 Πρόταση. *Αν το X είναι ινώδες, τότε $\sim^r$ είναι σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου $hom_{\mathcal{C}}(A, X)$.*

2.3.6 Ορισμός. Έστω A, X δύο αντικείμενα της $\mathcal{C}$. Με $\pi^r(A, X)$ συμβολίζουμε το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας στο σύνολο $hom_{\mathcal{C}}(A, X)$, από την σχέση ισοδυναμίας που γεννιέται από την σχέση $\sim^r$, της δεξιάς ομοτοπίας.

2.3.7 Λήμμα. *Αν $f \sim^r g : X \to Y$ και $k : W \to X$, τότε $fk \sim^r gk : W \to Y$.*

2.3.8 Πρόταση. *Αν το A είναι συνινώδες, $f \sim^r g : A \to X$, και $h : X \to Y$, τότε $hf \sim^r hg : A \to Y$.*

2.3.9 Πρόταση. *Αν το X είναι ινώδες και $i : A \overset{\sim}{\hookrightarrow} B$ είναι μία ακυκλική συννημάτωση, τότε η σύνθεση με i επάγει ένα ισομορφισμό μεταξύ των συνόλων $\pi^r(B, X)$ και $\pi^r(A, X)$. Ο ισομορφισμός είναι η συνάρτηση $i^* : \pi^r(B, X) \to \pi^r(A, X)$, όπου $i^*([f]) = [fi]$.*

2.3.10 Λήμμα. *Αν το A είναι συνινώδες τότε επάγεται μέσω της σύνθεσης στην $\mathcal{C}$ μία συνάρτηση*

$\pi^r(A, X) \times \pi^r(X, Y) \to \pi^l(A, Y)$

$([h], [f]) \mapsto [fh]$

2.4 Επιπλέον σχέσεις

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε πώς συνδέονται οι σχέσεις της αριστερής και της δεξιάς ομοτοπίας καθώς και μία πρόταση που χαρακτηρίζει τις ασθενείς ισοδυναμίες σε μία κατηγορία μοντέλο.

2.4.1 Πρόταση. *Έστω $f, g : A \rightrightarrows X$ δύο μορφισμοί στην $\mathcal{C}$. Τότε*

α) Αν το A είναι συνινώδες και $f \sim^l g$, τότε $f \sim^r g$.

β) Αν το X είναι ινώδες και $f \sim^r g$, τότε $f \sim^l g$.

Απόδειξη: Το β) είναι η δυϊκή πρόταση της α) οπότε αποδεικνύουμε μόνο το α).

Έστω $A \wedge I$ ένα καλό κυλινδρικό αντικείμενο για το A :

$$A \sqcup A \xhookrightarrow{i} A \wedge I \xrightarrow[j]{\sim} A$$

και $H : A \wedge I \to X$ μία (καλή) αριστερή ομοτοπία από τον f στον g. Έστω τέλος ένα καλό μονοπάτι αντικειμένων για το X:

$$X \xrightarrow[\sim]{q} X^I \overset{p}{\twoheadrightarrow} X \times X$$

Θεωρούμε το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "qf"] \arrow[d, hook, "i_0"'] & X^I \arrow[d, "p"] \\ A \wedge I \arrow[r, "<fj,H>"'] & X \times X \end{tikzcd}$$

όπου i_0 συννημάτωση γιατί το A είναι συνινώδες (2.2.2).
Το διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό:
Πράγματι, $pq \circ f =< id_X, id_X > \circ f =< f, f >$.
Επιπλέον, $pr_0 \circ (< fj, H > \circ i_0) = (pr_0 \circ < fj, H >) \circ i_0 = fj \circ i_0 = f \circ id_A = f$ και ομοίως $pr_1 \circ (< fj, H > \circ i_0) = f$.
Άρα $< fj, H > \circ i_0 =< f, f >= pq \circ f$.
Σύμφωνα τώρα με το KM4 υπάρχει ανύψωση $K : A \wedge I \to X^I$.
Η ζητούμενη δεξιά ομοτοπία είναι η $Ki_1 : A \to X^I$.
Πράγματι, $pr_0 \circ (p \circ Ki_1) = pr_0 \circ < fj, H > \circ i_1 = fj \circ i_1 = f \circ (ji_1) = fid_A = f$.

Όμοια, $pr_1 \circ (p \circ Ki_1) = g$, άρα $p \circ Ki_1 =< f, g >$.

Παρατήρηση: Αν συνδυάσουμε την παραπάνω πρόταση με τις προτάσεις 2.2.5 και 2.3.5 έχουμε ότι αν το A είναι συνινώδες και το X ινώδες, τότε η δεξιά και η αριστερή σχέση ομοτοπίας είναι σχέσεις ισοδυναμίας στο σύνολο $hom_{\mathcal{C}}(A, X)$ και ως σχέσεις ισοδυναμίας ταυτίζονται. Σε αυτή την περίπτωση θα σύμβολίζουμε με $\sim$ την σχέση ισοδυναμίας που προκύπτει και θα λέμε ότι f,g είναι ομοτοπικά ισοδύναμες, και θα συμβολίζουμε με $\pi(A, X)$ το σύνολο πηλίκο.

2.4.2 Πρόταση. *Έστω $f : A \to X$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$ και τα A, X είναι και τα δύο ινώδη και συνινώδη. Τότε ο f είναι μία ασθενής ισοδυναμία αν και μόνο αν ο f έχει ομοτοπικά αντίστροφο, δηλαδή, αν και μόνο αν υπάρχει ένας μορφισμός $g : X \to A$, τέτοιος ώστε οι συνθέσεις gf και fg να είναι ομοτοπικά ισοδύναμοι με τους αντίστοιχους ταυτοτικούς μορφισμούς.*

Απόδειξη: Έστω ότι ο f είναι ασθενής ισοδυναμία.
Από το ΚΜ5 ii) ο f παραγοντοποιείται ως:

$$A \overset{q}{\underset{\sim}{\hookrightarrow}} C \overset{p}{\twoheadrightarrow} X$$

και επειδή ο f είναι ασθενής ισοδυναμία, από το ΚΜ2, έχουμε ότι και ο p είναι.
Θεωρούμε το εξής αντιμεταθετικό διάγραμμα (η αντιμεταθετικότητα λόγω τελικού αντικειμένου)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "id_A"] \arrow[d, hook, "q", "\sim"'] & A \arrow[d, two heads] \\ C \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

οπότε σύμφωνα με το ΚΜ4 ii) θα υπάρχει ανύψωση $r : C \to A$ έτσι ώστε $rq = id_A(1)$.
Επιπλέον, αφού ο q είναι ακυκλική συννημάτωση και το C είναι ινώδες (γιατί το X ειναι ινώδες), σύμφωνα με την πρόταση 2.3.9 έχουμε ότι $q^* : \pi^r(C, C) \to \pi^r(A, C)$ είναι ισομορφισμός.
Έχουμε ότι: $q^*([qr]) = [qrq] =^{(1)} [q]$ και $q^*([id_C]) = [q]$.
Όμως q^* ισομορφισμός, άρα $[qr] = [id_C]$ οπότε $qr \sim^r id_C$ άρα και $qr \sim id_C$ (2) (γιατί το C είναι ινώδες 2.4.1). Από τις σχέσεις (1),(2) εχουμε ότι ο r είναι ομοτοπικά αντίστροφος για τον q.
Από το παρακάτω αντιμεταθετικό διάγραμμα (η αντιμεταθετικότητα λόγω αρ-

χικού αντικειμένου)

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r] \arrow[d, hook] & C \arrow[d, two heads, "p", "\sim"'] \\ X \arrow[r, "id_X"] & X, \end{tikzcd}$$

και σύμφωνα με το ΚΜ4 i), θα υπάρχει ανύψωση $s : X \to C$ έτσι ώστε $ps = id_X$, όποτε όμοια με πριν και χρησιμοποιώντας την πρόταση 2.2.9 έχουμε ότι $sp \sim id_C$.
Ο ζητούμενος ομοτοπικά αντίστροφος για τον $f = pq$ είναι ο $rs : X \to A$. Πράγματι, έχουμε :$qr \sim id_C$ και $s \sim s$ οπότε
$qrs \sim s \Rightarrow p_*([qrs]) = p_*([s]) \Rightarrow [pqrs] = [ps] \Rightarrow [frs] = [id_X] \Rightarrow frs \sim id_X$. Όμοια και $id_C \sim frs$.

Αντίστροφα τώρα, έστω ότι ο f έχει ομοτοπικά αντίστροφο τον $g : X \to A$ οπότε $fg \sim id_X$ και $gf \sim id_A$. Αν $A \overset{q}{\underset{\sim}{\hookrightarrow}} C \overset{p}{\twoheadrightarrow} X$ είναι μία παραγοντοποίηση του f, χρησιμοποιώντας το ΚΜ5 ii), τότε αρκεί να δείξουμε ότι ο p είναι ασθενής ισοδυναμία.
Έστω $H : X \wedge I \to X$ μία αριστερή ομοτοπία από τον fg στον id_X. Το παρακάτω τετράγωνο

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "qg"] \arrow[d, hook, "i_0", "\sim"'] & C \arrow[d, two heads, "p"] \\ X \wedge I \arrow[r, "H"] & X \end{tikzcd}$$

είναι αντιμεταθετικό. Άρα σύμφωνα με το ΚΜ4 θα υπάρχει μία ανύψωση $H' : X \wedge I \to C$.
Το αντικείμενο C είναι ινώδες και συνινώδες και αν θέσουμε $s = H'i_1$ προκύπτει ότι $s \sim qg$ με (αριστερή) ομοτοπία την H'. Επιπλέον αφού ο q είναι ασθενής ισοδυναμία, από προηγούμενα προκύπτει ότι θα έχει ομοτοπικά αντίστροφο, έστω $r : C \to A$.
Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε:

$pq = f \Rightarrow pqr \sim fr \Rightarrow p \sim fr \ (qr \sim 1_A)$

Τελικά έχουμε: $s \sim qg \Rightarrow sp \sim qgp \sim qgfr \sim qr \sim id_C$.
Σύμφωνα τώρα με την παρατήρηση σελίδα 23, έχουμε ότι sp είναι ασθενής ισοδυναμία (αφού η id_C είναι). Το παρακάτω διάγραμμα :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "id_C"] \arrow[d, "p"'] & C \arrow[r, "id_C"] \arrow[d, "sp"'] & C \arrow[d, "p"'] \\ X \arrow[r, "s"] & C \arrow[r, "p"] & X \end{tikzcd}$$

είναι αντιμεταθετικό (αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $ps = id_X$), οπότε p είναι συστολή της sp και σύμφωνα με το ΚΜ3 έχουμε ότι p είναι ασθενής ισοδυναμία.

□

2.4.3 Πρόταση. *Έστω ότι $\mathcal{C}$ είναι μία κατηγορία μοντέλο και $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ είναι ένας συναρτητής από την $\mathcal{C}$ προς μία κατηγορία $\mathcal{D}$, ο οποίος αντιστοιχίζει τις ασθενείς ισοδυναμίες της $\mathcal{C}$ σε ισομορφισμούς στην $\mathcal{D}$. Αν $f \sim^l g : A \to X$ ή $f \sim^r g : A \to X$ στην $\mathcal{C}$, τότε $F(f) = F(g)$ στην $\mathcal{D}$*

Απόδειξη: Έστω $f \sim^l g$. Επιλέγουμε $H : A \wedge I \to X$, μία καλή αριστερή ομοτοπία από τον f στον g, οπότε το $A \wedge I$ είναι ενα καλό κυλινδρικό αντικείμενο για το A:

$$A \sqcup A \xhookrightarrow{i_0+i_1} A \wedge I \xrightarrow[\sim]{w} A$$

Έχουμε $wi_o = wi_1 (= id_A)$ άρα $F(w)F(i_0) = F(w)F(i_1)$. Όμως w ασθενής ισοδυναμία, οπότε $F(w)$ ισομορφισμός, συνεπώς $F(i_0) = F(i_1)$. Επιπλέον $f = Hi_0$, $g = Hi_1$ άρα $F(f) = F(Hi_0) = F(H)F(i_0) = F(H)F(i_1) = F(Hi_1) = F(g)$.

Η απόδειξη είναι ανάλογη αν θεωρήσουμε $f \sim^r g$.

2.5 Χρήσιμες υποκατηγορίες

Αν $\mathcal{C}$ είναι μία κατηγορία μοντέλο τότε θα συμβολίζουμε :

- $\mathcal{C}_c$ την πλήρη υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ που έχει ως αντικείμενα τα συνινώδη αντικείμενα της $\mathcal{C}$.
- $\mathcal{C}_f$ την πλήρη υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ που έχει ως αντικείμενα τα ινώδη αντικείμενα της $\mathcal{C}$.
- $\mathcal{C}_{cf}$ την πλήρη υποκατηγορία της $\mathcal{C}$ που έχει ως αντικείμενα τα ινώδη και συνινώδη αντικείμενα της $\mathcal{C}$.

2.5.1 Πρόταση. *(Λήμμα* **Ken Brown***)*

α) Κάθε μορφισμός $f \in \mathcal{C}_c$ δέχεται μία παραγοντοποίηση $f = qi$, όπου i είναι συννημάτωση και q είναι ακυκλική νημάτωση και ο q έχει δεξιά αντίστροφο μία ακυκλική συννημάτωση, και επιπλέον αν ο f είναι ασθενής ισοδυναμία τότε ο i είναι ακυκλική συννημάτωση.

και δυϊκά

β) Κάθε μορφισμός $f \in \mathcal{C}_f$ δέχεται μία παραγοντοποίηση $f = pj$, όπου p είναι νημάτωση και j είναι ακυκλική συννημάτωση και ο j έχει αριστερά αντίστροφο μία ακυκλική νημάτωση, και επιπλέον αν f είναι ασθενής ισοδυναμία τότε ο p είναι ακυκλική νημάτωση.

Απόδειξη: Αποδεικνύουμε το α) και δυϊκα έπεται το β).

Έστω $f : A \to B \in \mathcal{C}_c$. Από την απόδειξη του λήμματος 2.2.2 έχουμε ότι οι μορφισμοί προς το συν-γινόμενο $in_0 : A \to A \sqcup B$, $in_1 : B \to A \sqcup B$ είναι συννηματώσεις. Εφαρμόζοντας το ΚΜ5 i) για τον μορφισμό $k = f + id_B$, έχουμε $k = qj$ όπου j είναι συννημάτωση και q ακυκλική νημάτωση.
Τώρα έχουμε: $f = k \circ in_0 = q \circ (j \circ in_0)$ και $q \circ j \circ in_1 = k \circ in_1 = id_B$. Συνεπώς ο $j \circ in_1$ είναι ο δεξιά αντίστροφος . Επιπλέον, $j \circ in_1$ είναι συννημάτωση ως σύνθεση δύο τέτοιων και επειδή $q \circ j \circ in_1 = id_B$, q και id_B είναι ασθενείς ισοδυναμίες, από το ΚΜ2 έχουμε ότι $j \circ in_1$ είναι ασθενής ισοδυναμία. Τέλος αν f ασθενής ισοδυναμία,επειδή και η q είναι ασθενής ισοδυναμία και $f = q(j \circ in_0)$, από το ΚΜ2 έχουμε ότι και η $j \circ in_0$ είναι ασθενής ισοδυναμία, άρα ακυκλική συννημάτωση.

2.5.2 Πόρισμα. *Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία μοντέλο. Τότε*

1) Αν $g : C \to D$ είναι μία ασθενής ισοδυναμία μεταξύ συνινωδών και το X είναι ινώδες, τότε ο g επάγει ένα ισομορφισμό μεταξύ των συνόλων των ομοτοπικών κλάσεων κλάσεων μορφισμών, $\pi(D, X)$ και $\pi(C, X)$.

2) Αν $g : X \to Y$ είναι μία ασθενής ισοδυναμία μεταξύ ινωδών και το C είναι συνινώδες, τότε ο g επάγει ένα ισομορφισμό μεταξύ των συνόλων των ομοτοπικών κλάσεων μορφισμών, $\pi(C, X)$ και $\pi(C, Y)$.

Απόδειξη: Αποδεικνύουμε το 1 και η απόδειξη για το 2 είναι δυϊκή.
Επειδή τα C, D είναι συνινώδη και το X είναι ινώδες από την προτασή 2.4.1 έχουμε ότι οι σχέσεις της αριστερής και της δεξιάς σχέσης ομοτοπίας συμπίπτουν στα σύνολα $hom_{\mathcal{C}}(C, X)$ και $hom_{\mathcal{C}}(D, X)$. Σύμφωνα τώρα με το παραπάνω λήμμα παραγοντοποιούμε τον g ως : $C \overset{i}{\underset{\sim}{\hookrightarrow}} A \overset{q}{\underset{\sim}{\twoheadrightarrow}} D$ και θεωρούμε τον $D \overset{j}{\underset{\sim}{\hookrightarrow}} A$ ως δεξιά αντίστροφο τoy q. Από το λήμμα 2.3.9 έχουμε ότι

$$\pi(A, X) \cong \pi(C, X)$$

(συνθέτοντας με i)

και

$$\pi(A, X) \cong \pi(D, X)$$

(συνθέτοντας με j).

Παρατήρηση: Αν $f : A \to X$ είναι ασθενής ισοδυναμία, τότε και ο μορφισμός $fi : C \to X$ είναι ασθενής ισοδυναμία, άρα από την παρατήρηση σελίδα 23, έχουμε ότι η κλάση $[fi]$ αποτελείται από μορφισμούς που είναι ασθενείς ισοδυναμίες.

2.5.3 Πόρισμα. *Έστω $\mathcal{M}$ μία κατηγορία μοντέλο, $\mathcal{C}$ μία κατηγορία και $F : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ ένας συναρτητής. Τότε*

1) Αν ο F αντιστοιχίζει ακυκλικές συννηματώσεις μεταξύ συνινωδών στην $\mathcal{M}$ σε ισομορφισμούς στην $\mathcal{C}$, τότε θα αντιστοιχίζει όλες τις ασθενείς ισοδυναμίες μεταξύ συνινωδών σε ισομορφισμούς στην $\mathcal{C}$

2) Αν ο F αντιστοιχίζει ακυκλικές νηματώσεις μεταξύ ινωδών στην $\mathcal{M}$ σε ισομορφισμούς στην $\mathcal{C}$, τότε θα αντιστοιχίζει όλες τις ασθενείς ισοδυναμίες μεταξύ ινωδών σε ισομορφισμούς στην $\mathcal{C}$

Απόδειξη Έστω $f : A \to B$ μία ασθενής ισοδυναμία μεταξύ συνινωδών. Από το λήμμα K.Brown παραγοντοποιούμε τον f ως:

$$A \overset{i}{\underset{\sim}{\hookrightarrow}} C \overset{\sim}{\underset{q}{\twoheadrightarrow}} B$$

και έστω $B \overset{j}{\underset{\sim}{\hookrightarrow}} C$ ο δεξιά αντίστροφος του q. Το C είναι και αυτό συνινώδες, οπότε από την υπόθεση έχουμε ότι ο $F(i)$ είναι ισομορφισμός και ο $F(j)$ είναι ισομορφισμός, και επειδή $F(q)F(j) = id_{F(B)}$ έχουμε ότι ο $F(q)$ είναι ισομορφισμός. Άρα και ο $F(f) = F(q)F(i)$ είναι ισομορφισμός.

2.5.4 Πρόταση. *α) Κάθε συναρτητής μεταξύ δύο κατηγοριών μοντέλο που διατηρεί συννηματώσεις και ακυκλικές συννηματώσεις, θα διατηρεί και ασθενείς ισοδυναμίες μεταξύ συνινωδών,*

και δυϊκά

β) Κάθε συναρτητής μεταξύ δύο κατηγοριών μοντέλο που διατηρεί νηματώσεις και ακυκλικές νηματώσεις, θα διατηρεί και ασθενείς ισοδυναμίες μεταξύ ινωδών.

Απόδειξη: 1) Έστω $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ένας συναρτητής με τις παραπάνω ιδιότητες, και $f : A \xrightarrow{\sim} B$ μία ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{C}$, όπου τα A, B είναι συνινώδη.

Από το λήμμα K.Brown ο f δέχεται μία παραγοντοποίηση $f = qi$:

$$A \overset{i}{\hookrightarrow} C \overset{q}{\underset{\sim}{\twoheadrightarrow}} B$$

, οπότε από το KM2 έχουμε ότι i είναι ασθενής ισοδυναμία. Επιπλέον ο q έχει δεξιά αντίστροφο μία ακυκλική συννημάτωση $B \overset{p}{\underset{\sim}{\hookrightarrow}} C$

Έχουμε:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, hook, "\sim", "p"'] \arrow[rr, bend left, "id_B"] & C \arrow[r, two heads, "\sim", "q"'] & B \end{tikzcd}$$

και επειδή F διατηρεί ακυκλικές συννηματώσεις, έχουμε:

$$FB \overset{\sim}{\underset{Fp}{\hookrightarrow}} FC \underset{Fq}{\twoheadrightarrow} FB, \quad Fq \circ Fp = id_{FB}$$

οπότε πάλι από το ΚΜ2 έχουμε ότι Fq είναι ασθενής ισοδυναμία. Άρα $Ff = FqFi$ και Fq, Fi ασθενείς ισοδυναμίες άρα και ο Ff είναι ασθενής ισοδυναμία. □

2.6 Προσαρτήσεις

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με ζεύγη προσαρτημένων συναρτητών μεταξύ κατηγοριών μοντέλο.

2.6.1 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{M}$ και $\mathcal{N}$ δύο κατηγορίες μοντέλο και $F : \mathcal{M} \leftrightarrows \mathcal{N} : G$ ένα ζεύγος προσαρτημένων συναρτητών (F ο αριστερά προσαρτημένος και G ο δεξιά προσαρτημένος). Αν $i : A \to B$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{M}$ και $p : X \to Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{N}$, τότε (Fi, p) είναι ζεύγος ανύψωσης-επέκτασης αν και μόνο αν (i, Gp) είναι ζεύγος ανύψωσης-επέκτασης.*

Απόδειξη: Από την προσάρτηση $F \dashv G$ (δες παρατήρηση 3 σελ. 12) έχουμε ότι υπάρχει μία ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ αντιμεταθετικών τετραγώνων της μορφής

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{f} & X \\ {\scriptstyle Fi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ FB & \xrightarrow{g} & Y \end{array} \quad \text{και} \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f^\sharp} & GX \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Gp} \\ B & \xrightarrow{g^\sharp} & GY \end{array}$$

Πάλι από την την προσάρτηση $F \dashv G$ έχουμε ότι υπάρχει μορφισμός $h : FB \to X$ έτσι ώστε τα δύο τρίγωνα που σχηματίζονται στο πρώτο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικά, αν και μόνο αν υπάρχει μορφισμός $h' : B \to GX$ έτσι ώστε τα δύο τρίγωνα που σχηματίζονται στο δεύτερο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικά.

Συνδυάζοντας την παραπάνω πρόταση με την πρόταση 2.1.2 έχουμε το εξής αποτέλεσμα:

2.6.2 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{M}$ και $\mathcal{N}$ κατηγορίες μοντέλο και $F : \mathcal{M} \leftrightarrows \mathcal{N} : G$ ένα ζεύγος προσαρτημένων συναρτητών(F ο αριστερά προσαρτημένος και G ο δεξιά προσαρτημένος). Τότε* *α) Ο αριστερά προσαρτημένος F διατηρεί συννηματώσεις αν και μόνο αν ο δεξιά προσαρτημένος G διατηρεί ακυκλικές νηματώσεις.*

β) Ο αριστερά προσαρτημένος F διατηρεί ακυκλικές συννηματώσεις αν και μόνο αν ο δεξιά προσαρτημένος G διατηρεί νηματώσεις.

2.7 Ομοτοπικές Κατηγορίες

Στην παράγραφο αυτή θα μιλήσουμε για την (Quillen) ομοτοπική κατηγορία που "συνοδεύει" μία κατηγορία μοντέλο η οποία κατασκευάζεται ως ο εντοπισμός της κατηγορίας σε σχέση με την κλάση των ασθενών ισοδυναμιών. Επιπλέον θα γενικεύσουμε την κατασκευή της ομοτοπικής κατηγορίας της **Top**.

2.7.1 Ορισμός. Εντοπισμός (localization) μίας κατηγορίας $\mathcal{C}$, σε σχέση με μία υποκατηγορία $\mathcal{W} \subset \mathcal{C}$, είναι μία κατηγορία $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ εφοδιασμένη με ένα συναρτητή $\gamma : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ έτσι ώστε:

i) Για κάθε μορφισμό $w \in \mathcal{W}$ ο μορφισμός $\gamma(w)$ είναι ένας ισομορφισμός στην $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$.

ii) Αν $\beta : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ είναι ένας συναρτητής για τον οποίο ισχύει ότι $\beta(w)$ είναι ισομορφισμός στην $\mathcal{D}$ για κάθε $w \in \mathcal{W}$, τότε υπάρχει μοναδικός συναρτητής $b : \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}] \to \mathcal{D}$ τέτοιος ώστε $b \circ \gamma = \beta$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\beta"'] & \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}] \arrow[dl, dotted, "b"] \\
\mathcal{D}. &
\end{tikzcd}$$

Παρατηρήσεις: 1) Σε αυτή την εργασία θα μας απασχολήσει ο εντοπισμός μίας κατηγορίας στην ειδική περίπτωση όπου $\mathcal{C}$ είναι μία κατηγορία μοντέλο και $\mathcal{W}$ είναι η υποκατηγορία των ασθενών ισοδυναμιών, την περιγραφή της οποίας δίνουμε παρακάτω.

2) Ένας άλλος συμβολισμός για τον εντοπισμό μίας κατηγορίας $\mathcal{C}$ που συνήθως θα χρησιμοποιούμε είναι: $Ho(\mathcal{C})$.

3) Όπως συνήθως συμβαίνει με τους κατηγορικούς ορισμούς, έχουμε:
Αν $\mathcal{D}$ είναι μία κατηγορία και $\delta : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ένας συναρτητής, έτσι ώστε να πληρούνται οι ιδιότητες i) και ii) του παραπάνω ορισμού, τότε οι κατηγορίες $Ho(\mathcal{C})$ και $\mathcal{D}$ είναι ισοδύναμες.
Δηλαδή ο εντοπισμός μίας κατηγορίας αν υπάρχει είναι μοναδικός μέχρι μοναδικής ισοδυναμίας.

4) Έστω ότι $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ είναι δύο κατηγορίες και $\mathcal{W}$, $\mathcal{W}'$ αντίστοιχα υποκατηγορίες αυτών και $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ ένας συναρτητής που στέλνει την $\mathcal{W}$ στην $\mathcal{W}'$.

Τότε υπάρχει μοναδικός συναρτητής $HoF : Ho(\mathcal{C}) \to Ho(\mathcal{C}')$ έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "F"'] & Ho(\mathcal{C}) \arrow[d, dotted, "HoF"] \\ \mathcal{C}' \arrow[r, "\gamma'"'] & Ho(\mathcal{C}') \end{tikzcd}$$

Η ύπαρξη και μοναδικότητα του συναρτητή $Ho(\mathcal{C}) \to Ho(\mathcal{C}')$ εξασφαλίζεται από την καθολική ιδιότητα του εντοπισμού μίας κατηγορίας, αφού παρατηρήσουμε ότι ο συναρτητής $\gamma' \circ F : \mathcal{C} \to Ho(\mathcal{C}')$ στέλνει τους μορφισμούς της $\mathcal{W}$ σε ισομορφισμούς στην $Ho(\mathcal{C}')$.

5) Δοθείσας μίας κατηγορίας $\mathcal{C}$ και υποκατηγορίας $\mathcal{W}$, η **κλειστότητα** του $\mathcal{W}$, ορίζεται να είναι εκείνη η υπόκατηγορία $\overline{\mathcal{W}}$ της $\mathcal{C}$ που έχει ως μορφισμούς, εκείνους τους μορφισμούς $v \in \mathcal{C}_0$ που έχουν την ιδιότητα: ο $\gamma(v)$ να είναι ισομορφισμός στην $Ho(\mathcal{C})$. Θα καλούμε μία υποκατηγορία $\mathcal{W}$ της $\mathcal{C}$ **κλειστή** στην $\mathcal{C}$ αν ταυτίζεται με την κλειστότητα αυτής στην $\mathcal{C}$.

Σύμφωνα με την προηγούμενη παρατήρηση ο ταυτοτικός συναρτητής της $\mathcal{C}$ επάγει ένα ισομορφισμό μεταξύ των κατηγοριών $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$, $\mathcal{C}[\overline{\mathcal{W}^{-1}}]$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "1_{\mathcal{C}}"'] & \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}] \arrow[d, dotted, shift left] \\ \mathcal{C} \arrow[r, "\overline{\gamma}"] & \mathcal{C}[\overline{\mathcal{W}^{-1}}]. \arrow[u, dotted, shift left] \end{tikzcd}$$

2.7.2 Ορισμός. Η **Quillen ομοτοπική κατηγορία** μίας κατηγορίας μοντέλο $\mathcal{C}$ είναι ο εντοπισμός της $\mathcal{C}$, $Ho(\mathcal{C})$ σε σχέση με την υποκατηγορία των ασθενών ισοδυναμιών της $\mathcal{C}$. Θα συμβολίζουμε επίσης με $Ho(\mathcal{C}_c)$, $Ho(\mathcal{C}_f)$, $Ho(\mathcal{C}_{cf})$ τους εντοπισμούς των κατηγοριών $\mathcal{C}_c$, $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_{cf}$ σε σχέση με τις υποκατηγορίες τους των ασθενών ισοδυναμιών.

2.8 Ινώδης και Συνινώδης Μετατόπιση

Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία μοντέλο και $X \in \mathcal{C}_0$. Θεωρούμε την συναρτητική παραγοντοποίηση (F, α, β). Παραγοντοποιούμε τον μοναδικό μορφισμό $i_X : \emptyset \to X$ ως:

$$\emptyset \xhookrightarrow[\alpha_{i_X}]{} F(i_X) \xrightarrow[\beta_{i_X}]{\sim} X.$$

Συμβολίζοντας το $F(i_X)$ με QX έχουμε ότι το QX είναι συνινώδες.

Αν $f : X \to Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$ και $\varphi =< id_\emptyset, f >$, αν θέσουμε $F\varphi = Qf$, έχουμε το παρακάτω αντιμεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\emptyset \arrow[r, hook, "\alpha_{i_X}"'] \arrow[d, "id_\emptyset"'] & QX \arrow[r, two heads, "\sim", "\beta_{i_X}"'] \arrow[d, "Qf"'] & X \arrow[d, "f"] \\
\emptyset \arrow[r, hook, "\alpha_{i_Y}"'] & QY \arrow[r, two heads, "\sim", "\beta_{i_Y}"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Με βάση τα παραπάνω προσδιορίζεται ένας συναρτητής $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_c$ (**συνινώδης μετατόπιση**), ο οποίος σε κάθε αντικείμενο X της κατηγορίας αντιστοιχίζει ένα συνινώδες αντικείμενο QX όπως προσδιορίστηκε παραπάνω, και ένας φυσικός μετασχηματισμός $p : Q \Rightarrow 1_{\mathcal{C}}$ με $p_X = \beta_{i_X}$ και p_X ακυκλική νημάτωση.

Επιπλέον από την αντιμεταθετικότητα του δεξία τετραγώνου και το ΚΜ2 έχουμε ότι $f : X \to Y$ είναι ασθενής ισοδυναμία αν και μόνο αν $Qf : QX \to QY$ είναι.

Τέλος παρατηρούμε ότι αν το X είναι ινώδες τότε και το QX είναι.

$$\begin{tikzcd}
QX \arrow[r, two heads] \arrow[dr] & X \arrow[d, two heads] \\
& 1
\end{tikzcd}$$

Αν εργαστούμε ανάλογα με την συναρτητική παραγοντοποίηση (G, γ, δ), παραγοντοποιώντας τώρα τον μοναδικό μορφισμό $t_X : X \to 1$ ως

$$X \xhookrightarrow[\gamma_{t_X}]{\sim} G(t_X) \xrightarrow[\delta_{t_X}]{} 1$$

τότε προσδιορίζεται ένας συναρτητής $R : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_f$ (**ινώδης μετατόπιση**) ο οποίος σε κάθε αντικείμενο X της κατηγορίας αντιστοιχίζει ένα ινώδες αντικείμενο RX, και ένας φυσικός μετασχηματισμός $k : 1_{\mathcal{C}} \Rightarrow R$ με $k_X = \gamma_{t_X}$ και k_X ακυκλική συννημάτωση.

Συνέπεια των προτάσεων 2.2.9 και 2.3.9 είναι η παρακάτω:

2.8.1 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία μοντέλο και X, Z, W αντικείμενα αυτής. Τότε:*

1) Αν το W είναι συνινώδες και το X είναι ινώδες τότε ο μορφισμός $p_X : QX \to X$ επάγει ένα ισομορφισμό $(p_X)_* : \pi(W, QX) \to \pi(W, X)$ μεταξύ συνόλων ομοτοπικών κλάσεων, όπου $(p_X)_*([f]) = [p_X f]$.

και δυϊκά

2) Αν το X είναι συνινώδες και το Z είναι ινώδες τότε ο μορφισμός $k_X : X \to RX$ επάγει ένα ισομορφισμό $(k_X)^* : \pi(RX, Z) \to \pi(X, Z)$ μεταξύ συνόλων ομοτοπικών κλάσεων, όπου $(k_X)^*([g]) = [g k_X]$.

Κατασκευή της Quillen ομοτοπικής κατηγορίας

Στην παράγραφο αυτή θα κατασκευάσουμε την Quillen ομοτοπική κατηγορία $Ho(\mathcal{M})$ για μία κατηγορία μοντέλο $\mathcal{M}$.

2.8.2 Θεώρημα. *Αν $\mathcal{M}$ είναι μία κατηγορία μοντέλο, τότε η Quillen ομοτοπική κατηγορία της $\mathcal{M}$ υπάρχει.*

Απόδειξη: Ορίζουμε την κατηγορία $Ho(\mathcal{M})$ ως εξής:

• Τα αντικείμενα της $Ho(\mathcal{M})$ είναι τα ίδια με τα αντικείμενα της $\mathcal{M}$.

• Αν X και Y είναι δύο αντικείμενα της $Ho(\mathcal{M})$ (άρα και της $\mathcal{M}$) τότε $hom_{Ho(\mathcal{M})}(X,Y) = \pi(RQX, RQY)$.

Από το λήμμα 2.2.10 και το λήμμα 2.3.10 η σύνθεση μορφισμών στην $Ho(\mathcal{M})$ είναι καλά ορισμένη.

Ορίζουμε τον συναρτητή $\gamma : \mathcal{M} \to Ho(\mathcal{M})$ να είναι ο ταυτοτικός στα αντικείμενα και αν $f : X \to Y$ στην $\mathcal{M}$, τότε $\gamma(f)$ είναι η ομοτοπική κλάση του RQf.

Αν τώρα f είναι ασθενής ισοδυναμία τότε και η $RQ(f)$ είναι, οπότε σύμφωνα με την πρόταση 2.4.2 θα είναι και ομοτοπική ισοδυναμία, άρα $\gamma(f)$ είναι ισομορφισμός στην $Ho(\mathcal{M})$.

Μένει να δειξουμε ότι αν $\mathcal{N}$ είναι μία κατηγορία και $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ είναι ένας συναρτητής που αντιστοιχίζει ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{M}$ σε ισομορφισμούς στην $\mathcal{N}$ τότε υπάρχει μοναδικός συναρτητής $\delta : Ho(\mathcal{M}) \to \mathcal{N}$, έτσι ώστε $\delta\gamma = F$.

Ορίζουμε τον συναρτητή δ ως εξής:

• Για κάθε αντικείμενο X της $Ho(\mathcal{M})$, $\delta(X) = F(X)$

• Αν $g : X \to Y$ είναι ένας μορφισμός στην $Ho(\mathcal{M})$, τότε g είναι η ομοτοπική κλάση ενός μορφισμού $RQX \to RQY$ στην $\mathcal{M}$. Από την πρόταση 2.4.3 έχουμε ότι ο συναρτητής F αντιστοιχίζει όλα τα στοιχεία αυτής της ομοτοπικής κλάσης στον ίδιο μορφισμό της $\mathcal{N}$. Ορίζουμε λοιπόν:

$$\delta(g) = F(p_Y)(F(k_{QY}))^{-1}F(g)F(k_{QX})(F(p_X))^{-1}$$

(όπου με $F(g)$ εννοούμε την δράση του F σε κάποιο μορφισμό της ομοτοπικής κλάσης g). Με αυτόν τον τρόπο ορίζεται ένας συναρτητής.

Αν τώρα $X \in \mathcal{M}_0$, έχουμε $\delta\gamma(X) = \delta(\gamma(X)) = \delta(X) = F(X)$.

Αν $f : X \to Y$ στην $\mathcal{M}$ τότε έχουμε το παρακάτω αντιμεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
RQX \arrow[r, "RQf"] & RQY \\
QX \arrow[u, "k_{QX}"] \arrow[r, "Qf"] \arrow[d, "p_X"'] & QY \arrow[u, "k_{QY}"'] \arrow[d, "p_Y"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

Επειδή F αντιστοιχίζει ασθενείς ισοδυναμίες σε ισομορφισμούς στην $\mathcal{N}$ από το διάγραμμα έχουμε ότι :

$$F(f) = F(p_Y)(F(k_{QY}))^{-1}F(RQf)F(k_{QX})(F(p_X))^{-1}$$

και επειδή $\gamma(f)$ είναι η ομοτοπική κλάση του RQf έχουμε ότι $F(f) = \delta(\gamma(f))$. Άρα $\delta\gamma = F$. $\square$

Παρατήρηση: Επειδή οι μορφισμοί $QX \to X$ και $X \to RX$ είναι ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{M}$ και ο συναρτητής γ όπως ορίστηκε παραπάνω αντιστοιχίζει ασθενείς ισοδυναμίες της $\mathcal{M}$ σε ισομορφισμούς στην $Ho(\mathcal{M})$, προκύπτει ότι τα αντικείμενα X, QX, RX είναι ισόμορφα ως αντικείμενα της $Ho(\mathcal{M})$.

2.8.3 Ορισμός. Η **κλασική ομοτοπική κατηγορία** μίας κατηγορίας μοντέλο $\mathcal{C}$ είναι η κατηγορία πηλίκο $\mathcal{C}_{cf}/\!\sim$, όπου $\sim$ η σχέση ομοτοπίας (2.4).

Παρατήρηση: Από την πρόταση 2.4.2 ο συναρτήτης $\mathcal{C}_{cf} \xrightarrow{proj} \mathcal{C}_{cf}/\!\sim$ στέλνει ασθενείς ισοδυναμίες σε κλάσεις ομοτοπικών ισοδυναμιών, δηλαδή σε ισομορφισμούς στην κατηγορία $\mathcal{C}_{cf}/\sim$. Από την καθολική ιδιότητα της $Ho(\mathcal{C}_{cf})$ έχουμε την ύπαρξη μοναδικού μορφισμού $Ho(\mathcal{C}_{cf}) \to \mathcal{C}_{cf}/\sim$ έτσι ώστε το παρακάτω τρίγωνο να είναι αντιμεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_{cf} \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dr, "proj"] & \\
Ho(\mathcal{C}_{cf}) \arrow[r, dotted, "F"] & \mathcal{C}_{cf}/\!\sim
\end{tikzcd}$$

Επιπλέον από την πρόταση 2.4.3, έχουμε λόγω της καθολικής ιδιότητας της κατηγορίας πηλίκο ότι υπάρχει μοναδικός συναρτητής $\mathcal{C}_{cf}/\!\sim\longrightarrow Ho(\mathcal{C}_{cf})$ έτσι ώστε και το παρακάτω τρίγωνο να είναι αντιμεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_{cf} \arrow[d, "proj"] \arrow[dr, "\gamma"] & \\
\mathcal{C}_{cf}/\!\sim \arrow[r, dotted, "G"] & Ho(\mathcal{C}_{cf})
\end{tikzcd}$$

2.8.4 Πρόταση. *Οι κατηγορίες $Ho(\mathcal{C}_{cf})$ και $\mathcal{C}_{cf}/\sim$ είναι ισοδύναμες.*

Απόδειξη: Προκύπτει άμεσα από την παραπάνω παρατήρηση.

Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε την ισοδυναμία των κατηγοριών $Ho(\mathcal{C})$ και $\mathcal{C}_{cf}/\sim$. Σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση, αρκεί να δείξουμε την ισοδυναμία των κατηγοριών $Ho(\mathcal{C})$ και $Ho(\mathcal{C}_{cf})$.

2.8.5 Ορισμός. Αν $\mathcal{A}$ είναι μία υποκατηγορία της $\mathcal{B}$ και η εμφύτευση $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ είναι ισοδυναμία κατηγοριών, τότε υπάρχει ένας συναρτητής $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ ο οποίος είναι φυσικά ισόμορφος με τον $1_{\mathcal{B}}$. Σε αυτή την περίπτωση καλούμε την $\mathcal{A}$ **συσταλτική παραμόρφωση (deformation retract)** της $\mathcal{B}$.

2.8.6 Ορισμός. Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία και $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{W}$ υποκατηγορίες της. Τότε η $\mathcal{C}_0$ καλείται **αριστερή** (αντ.**δεξιά**) **συσταλτική παραμόρφωση** της $\mathcal{C}$ σε σχέση με την $\mathcal{W}$, αν υπάρχει ένας συναρτήτης $R : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_0$ και ένας φυσικός μετασχηματισμός $s : R \Rightarrow 1_{\mathcal{C}}$ (αντ. $s : 1_{\mathcal{C}} \Rightarrow R$) έτσι ώστε:

i) R στέλνει την $\mathcal{W}$ στην $\mathcal{W} \cap \mathcal{C}_0$.

ii) Για κάθε αντικείμενο C στην $\mathcal{C}$, ο μορφισμός sC είναι στην $\mathcal{W}$.

iii) Για κάθε αντικείμενο C_0 στην $\mathcal{C}_0$, ο μορφισμός sC_0 είναι στην $\mathcal{W} \cap \mathcal{C}_0$.

Ένα τέτοιο ζευγάρι (R, s) καλείται αριστερή (αντ. δεξιά) συσταλτική παραμόρφωση από την $\mathcal{C}$ στην $\mathcal{C}_0$.

Παρατήρηση: Στον παραπάνω ορισμό αν η υποκατηγορία $\mathcal{W}$ ικανοποιεί το "δύο από τρία" αξίωμα ΚΜ2, τότε αν ισχύει η ii) θα ισχύει και η i). Πράγματι, έστω $w : C_1 \to C_2$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{W}$. Επειδή ο s είναι φυσικός μετασχηματισμός, το παρακάτω διάγραμμα θα είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} RC_1 \arrow[r, "s_{C_1}"] \arrow[d, "Rw"'] & C_1 \arrow[d, "w"] \\ RC_2 \arrow[r, "s_{C_2}"'] & C_1 \end{tikzcd}$$

και επειδή οι μορφισμοί sC_1, sC_2, w είναι στην $\mathcal{W}$ έχουμε ότι μορφισμός Rw είναι στην $\mathcal{W} \cap \mathcal{C}_0$. Αν επιπλέον $\mathcal{C}_0$ είναι πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{C}$, τότε θα ισχύει και η iii). Τέλος αν $\mathcal{W}$ είναι η υπόκατηγορία των ισομορφισμών της $\mathcal{C}$, τότε οι έννοιες της αριστερής, δεξιάς συσταλτικής παραμόρφωσης ταυτίζονται με την έννοια της συσταλτικής παραμόρφωσης.

2.8.7 Λήμμα. *Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία και $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{W}$ υποκατηγορίες της, έτσι ώστε η $\mathcal{C}_0$ να είναι αριστερή (αντ. δεξιά) συσταλτική παραμόρφωση της $\mathcal{C}_0$ σε* *σχέση με την $\mathcal{W}$. Τότε ο Hos είναι φυσικός ισομορφισμός μεταξύ των HoR και $Ho1_{\mathcal{C}}$ και ο $Ho(s|\mathcal{C}_0)$ είναι φυσικός ισομορφισμός μεταξύ των $Ho(R|\mathcal{C}_0)$ και $Ho1_{\mathcal{C}_0}$, οπότε $Ho(\mathcal{C}_0)$ είναι συσταλτική παραμόρφωση της $Ho(\mathcal{C})$.*

Απόδειξη: Έχουμε το παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "R"'] \arrow[rr, bend left, "1_{\mathcal{C}}"] \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{C}}"] & \mathcal{C}_0 \arrow[r, "i"'] \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{C}_0}"] & \mathcal{C} \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{C}}"] \\
Ho(\mathcal{C}) \arrow[r, "HoR"] \arrow[rr, bend right, "Ho1_{\mathcal{C}}"'] & Ho(\mathcal{C}_0) \arrow[r, "Hoi"] & Ho(\mathcal{C})
\end{tikzcd}$$

όπου $Hos : HoR \Rightarrow Ho1_{\mathcal{C}}$ είναι ο φυσικός μετασχηματισμός, όπου η C-συντεταγμένη του είναι: $(Hos)_C = \gamma(s_C)$. Ο μορφισμός s_C ανήκει στην υποκατηγορία $\mathcal{W}$, άρα από τον ορισμό του συναρτητή γ, έχουμε ότι ο μορφισμός $(Hos)_C$ είναι ισομορφισμός για κάθε $C \in \mathcal{C}$.

2.8.8 Λήμμα. *Αν $\mathcal{C}$ είναι μία κατηγορία μοντέλο, τότε οι κατηγορίες $\mathcal{C}_{cf}$ και $\mathcal{C}_c$ είναι αριστερά συσταλτικές παραμορφώσεις των $\mathcal{C}_f$ και $\mathcal{C}$ αντίστοιχα, σε σχέση με την υποκατηγορία των ασθενών ισοδυναμίων,*

και δυϊκά

$\mathcal{C}_{cf}$ και $\mathcal{C}_f$ είναι δεξιά συσταλτικές παραμορφώσεις των $\mathcal{C}_c$ και $\mathcal{C}$ αντίστοιχα, σε σχέση με την υποκατηγορία των ασθενών ισοδυναμίων.

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια αυτών που ειπώθηκαν στην αρχή της παραγράφου 2.8. Για παράδειγμα για την απόδειξη ότι η $\mathcal{C}_c$ είναι αριστερή συσταλτική παραμόρφωση της $\mathcal{C}$, έχουμε ότι το ζεύγος (Q, p) είναι αριστερή συσταλτική παραμόρφωση από την $\mathcal{C}$ στην $\mathcal{C}_c$. □

Συνέπεια του παραπάνω λήμματος και του λήμματος 2.8.7 είναι η παρακάτω πρόταση:

2.8.9 Πρόταση. *Οι εμφυτεύσεις*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C}_c \arrow[dr] & \\
\mathcal{C}_{cf} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathcal{C} \\
 & \mathcal{C}_f \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

επάγουν ένα αντιμεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & Ho(\mathcal{C}_c) \arrow[dr] & \\ Ho(\mathcal{C}_{cf}) \arrow[ur] \arrow[dr] & & Ho(\mathcal{C}) \\ & Ho(\mathcal{C}_f) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

στο οποίο όλοι οι συναρτητές είναι ισοδυναμίες κατηγορίων.

Συνδυάζοντας τώρα την παραπάνω πρόταση και την 2.8.4 έχουμε οτι:
Η κλασική ομοτοπική κατηγορία μίας κατηγορίας μοντέλο $\mathcal{C}$ είναι ισοδύναμη με την Quillen ομοτοπική κατηγορία της $\mathcal{C}$.

2.9 Συναρτητές Quillen

Στην παράγραφο αυτή θα ορίσουμε την "κατάλληλη" έννοια μορφισμού μεταξύ κατηγοριών μοντέλο. Αυτό που θα περιμέναμε να συνιστά ένα μορφισμό μεταξύ δύο κατηγοριών μοντέλο $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ είναι ένας συναρτητής $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, ο οποίος θα είναι συμβατός με την δομή των $\mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$, δηλαδή ένας συναρτητής που διατηρεί τις συννηματώσεις, τις νηματώσεις και τις ασθενείς ισοδυναμίες. Όμως οι συναρτητές που συνήθως "εμφανίζονται" μεταξύ κατηγοριών μοντέλο δεν έχουν αυτή την ιδιότητα. Αλλά πολλοί από αυτούς είναι *ένας από ενα ζεύγος προσαρτημένων συναρτητών*, ώστε ο αριστερά προσαρτημένος διατηρεί συννηματώσεις και ακυκλικές συννηματώσεις, ενώ ο δεξιά προσαρτημένος διατηρεί νηματώσεις και ακυκλικές νηματώσεις.

2.9.1 Ορισμός. Αν $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ είναι δύο κατηγορίες μοντέλο, ένας συναρτητής $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ καλείται **αριστερός Quillen συναρτητής** αν
i) Ο F έχει δεξιά προσαρτημένο, και
ii) Ο F διατηρεί συννηματώσεις και ακυκλικές συννηματώσεις
και δυϊκά
ένας συναρτητής $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ καλείται **δεξιός Quillen συναρτητής** αν
i) Ο G έχει αριστερά προσαρτημένο, και
ii) Ο G διατηρεί νηματώσεις και ακυκλικές νηματώσεις.

Με τον όρο **ζεύγος προσαρτημένων συναρτητών Quillen** εννοούμε ένα ζεύγος προσαρτημένων συναρτητών μεταξύ δύο κατηγοριών μοντέλο, όπου ο αριστερά προσαρτημένος είναι αριστερός Quillen συναρτητής και ο δεξιά προσαρτημένος είναι δεξιός Quillen συναρτητής.

Συνέπεια της πρότασης 2.6.2 είναι το παρακάτω:

2.9.2 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{M}$ και $\mathcal{N}$ είναι δύο κατηγορίες μοντέλο και $F : \mathcal{M} \leftrightarrows \mathcal{N} : G$ ένα ζεύγος προσαρτημένων συναρτητών (F ο αριστερά προσαρτημένος και G ο δεξιά προσαρτημένος). Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

α) (F, G) είναι ζευγάρι Quillen συναρτητών.

β) Ο αριστερά προσαρτημένος F διατηρεί συννηματώσεις και ακυκλικές συνηματώσεις.

γ) Ο δεξιά προσαρτημένος G διατηρεί νηματώσεις και ακυκλικές νηματώσεις.

δ) Ο αριστερά προσαρτημένος F διατηρεί συννηματώσεις και ο δεξιά προσαρτημένος G διατηρεί νηματώσεις.

ε) Ο αριστερά προσαρτημένος F διατηρεί ακυκλικές συννηματώσεις και ο δεξιά προσαρτημένος G διατηρεί ακυκλικές νηματώσεις.

2.9.3 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{M}$ και $\mathcal{N}$ είναι δύο κατηγορίες μοντέλο και $F : \mathcal{M} \leftrightarrows \mathcal{N} : U$ ένα ζεύγος προσαρτημένων συναρτητών Quillen (F ο αριστερά προσαρτημένος και U ο δεξιά προσαρτημένος). Τότε:*

1) Ο F αντιστοιχίζει ασθενείς ισοδυναμίες μεταξύ συνινωδών στην $\mathcal{M}$ σε ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{N}$ και

2) Ο U αντιστοιχίζει ασθενείς ισοδυναμίες μεταξύ ινωδών στην $\mathcal{N}$ σε ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{M}$.

Απόδειξη: Είναι άμεση συνέπεια της πρότασης 2.5.4.

2.9.4 Λήμμα. *Έστω $\mathcal{M}$ και $\mathcal{N}$ είναι δύο κατηγορίες μοντέλο και $F : \mathcal{M} \leftrightarrows \mathcal{N} : U$ ένα ζεύγος προσαρτημένων συναρτητών Quillen (F ο αριστερά προσαρτημένος και U ο δεξιά προσαρτημένος). Τότε*

1) Αν το B είναι συνινώδες στην $\mathcal{M}$ και $B \sqcup B \xrightarrow{i} B \wedge I \xrightarrow{w} B$ είναι ένα καλό κυλινδρικό αντικείμενο για το B, τότε $FB \sqcup FB \xrightarrow{Fi} F(B \wedge I) \xrightarrow{Fw} FB$ είναι ένα καλό κυλινδρικό αντικείμενο για το FB.

2) Αν το X είναι ινώδες στην $\mathcal{N}$ και $X \xrightarrow{w} X^I \xrightarrow{p} X \times X$ είναι ένα καλό μονοπάτι αντικειμένων για το X, τότε $UX \xrightarrow{Uw} UX^I \xrightarrow{Up} UX \times UX$ είνα ένα καλό μονοπάτι αντικειμένων για το UX.

Απόδειξη: Αποδεικνύουμε το 1, και η απόδειξη για το 2 είναι δυϊκή.

Αφού το B είναι συνινώδες ο μορφισμός $i_0 : B \to B \wedge I$ είναι ακυκλική συνινηματωση (δες λήμμα 2.2.2), και επειδή ο F ως αριστερά Quillen συναρτητής θα διατηρεί ακυκλικές συνινηματώσεις έχουμε :

$$\begin{tikzcd} FB \arrow[r, hook, "\sim"', "F(i_0)"'] \arrow[rr, bend left, "id_{FB}"] & F(B \wedge I) \arrow[r, "Fw"'] & FB \end{tikzcd}$$

όποτε από το KM2 έχουμε ότι ο μορφισμός $F(B \wedge I) \to FB$ είναι ασθενής ισοδυναμία. Επιπλέον ο F ώς αριστερά προσαρτημένος θα διατηρεί συνόρια και ειδικότερα συν-γινόμενα, άρα

$$F(B \sqcup B) \simeq FB \sqcup FB,$$

και με αυτή την παρατήρηση αποδεικνύεται το ζητούμενο.

2.9.5 Λήμμα. *Έστω $\mathcal{M}$ και $\mathcal{N}$ είναι δύο κατηγορίες μοντέλο και $F : \mathcal{M} \leftrightarrows \mathcal{N} : U$ ένα ζεύγος προσαρτημένων συναρτητών Quillen (F ο αριστερά προσαρτημένος και U ο δεξιά προσαρτημένος). Τότε*

1)Αν $f \sim^l g : A \to B$ είναι αριστερά ομοτοπικοί μορφισμοί στην $\mathcal{M}$ και το A είναι συνινώδες, τότε οι μορφισμοί Ff και Fg είναι αριστερά ομοτοπικοί μορφισμοί στην $\mathcal{N}$.

2)Αν $f \sim^r g : X \to Y$ είναι δεξιά ομοτοπικοί μορφισμοί στην $\mathcal{N}$ και το Y είναι ινώδες, τότε οι μορφισμοί Uf και Ug είναι δεξιά ομοτοπικοί μορφισμοί στην $\mathcal{M}$.

Απόδειξη: Αν H είναι μία καλή αριστερή ομοτοπία από τον f στον g, τότε σύμφωνα και με το παραπάνω λήμμα $F(H)$ είναι η ζητούμενη αριστερή ομοτοπία.

2.9.6 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{M}$ και $\mathcal{N}$ είναι δύο κατηγορίες μοντέλο και $F : \mathcal{M} \leftrightarrows \mathcal{N} : U$ ένα ζεύγος προσαρτημένων συναρτητών Quillen (F ο αριστερά προσαρτημένος και U ο δεξιά προσαρτημένος). Αν το X είναι συνινώδες στην $\mathcal{M}$ και το Y είναι ινώδες στην $\mathcal{N}$, τότε τα σύνολα $\pi(FX, Y)$ και $\pi(X, UY)$ είναι ισόμορφα.*

Απόδειξη: Από την προσάρτηση μεταξύ των F και U έχουμε ένα ισομορφισμό μεταξύ των συνόλων $hom_{\mathcal{N}}(FX, Y)$ και $hom_{\mathcal{M}}(X, UY)$, και θέλουμε να δείξουμε ότι αυτός ο ισομορφισμός μεταφέρεται και στις ομοτοπικές κλάσεις.

Επειδή ο F είναι αριστερά προσαρτημένος (διατηρεί συνόρια) και το X είναι συνινώδες έχουμε ότι και το FX είναι συνινώδες. Όμοια έχουμε ότι το UY είναι ινώδες. Από την παρατήρηση 2.4.1 (σελ. 32) έχουμε ότι για αυτό το πακέτο μορφισμών η αριστερή και η δεξιά σχέση ομοτοπίας συμπίπτουν. Από το λήμμα 2.9.4 αν δύο μορφισμοί $X \to UY$ είναι αριστερά ομοτοπικοί στην $\mathcal{M}$, τότε και οι αντίστοιχοι (λόγω προσάρτησης) $FX \to Y$ είναι αριστερά ομοτοπικοί στην $\mathcal{N}$, και αν δύο μορφισμοί $FX \to Y$ είναι δεξιά ομοτοπικοί στην $\mathcal{N}$, τότε και οι αντίστοιχοι $X \to UY$ είναι δεξιά ομοτοπικοί στην $\mathcal{M}$. □

2.9.7 Ορισμός. Ένα ζεύγος προσαρτημένων συναρτητών Quillen $F : \mathcal{M} \leftrightarrows \mathcal{N} : G$ καλείται **ζεύγος (προσαρτημένων) Quillen ισοδυναμιών** και ο αριστερά προσαρτημένος καλείται **αριστερή Quillen ισοδυναμία** και ο δεξιά προσαρτημένος καλείται **δεξιά Quillen ισοδυναμία**, αν

i) Για κάθε ζευγάρι αντικειμένων $A \in \mathcal{M}_c$, $X \in \mathcal{N}_f$, ένας μορφισμός $A \to GX \in \mathcal{M}$ είναι ασθενής ισοδυναμία αν και μόνο αν ο προσαρτημένος $FA \to X \in \mathcal{N}$ είναι ασθενής ισοδυναμία.

Αν οι συναρτητές F, G διατηρούν ασθενείς ισοδυναμίες τότε είναι ισοδύναμο να απαιτήσουμε :

ii) Για κάθε ζευγάρι αντικειμένων $B \in \mathcal{M}_{cf}$, $Y \in \mathcal{N}_{cf}$ οι κανονικοί μορφισμοί $B \to GFB \in \mathcal{M}$ και $FGY \to Y \in \mathcal{N}$ είναι ασθενείς ισοδυναμίες.

Ιδιότητες των συναρτητών Quillen

i) Η σύνθεση δύο αριστερά Quillen συναρτητών είναι αριστερός Quillen συναρτητής και η σύνθεση δύο δεξιά Quillen συναρτητών είναι δεξιός Quillen συναρτητής.

ii) Ο ταυτοτικός μορφισμός μίας κατηγορίας μοντέλο είναι αριστερός και δεξιός Quillen συναρτητής.

iii) Ο δεξιά προσαρτημένος ενός αριστερά Quillen συναρτητή είναι δεξιός Quillen συναρτητής και ο αριστερά προσαρτημένος ενός δεξιά Quillen συναρτητή είναι αριστερός Quillen συναρτητής.

iv) Τα παραπάνω ισχύουν αν μιλήσουμε για αριστερές και δεξιές Quillen ισοδυναμίες.

2.10 Παράγωγοι Συναρτητές

2.10.1 Ορισμός. Έστω $\mathcal{M}$ μία κατηγορία μοντέλο, $\mathcal{C}$ μία κατηγορία, $F : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ ένας συναρτητής και $\gamma_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to Ho(\mathcal{M})$ ο συναρτητής προς την ομοτοπική κατηγορία της $\mathcal{M}$.
1) Ένας **αριστερά παράγωγος συναρτητής** για τον F, είναι (αν υπάρχει) η δεξιά Kan επέκταση του F κατά μήκος του $\gamma_{\mathcal{M}}$, δηλαδή θα είναι ένα ζεύγος (LF, ε), όπου $LF : Ho(\mathcal{M}) \to \mathcal{C}$ και $\varepsilon : LF \circ \gamma_{\mathcal{M}} \Rightarrow F$, έτσι ώστε για κάθε συναρτητή $G : Ho(\mathcal{M}) \to \mathcal{C}$ και κάθε φυσικό μετασχηματισμό $\zeta : G \circ \gamma_{\mathcal{M}} \Rightarrow$

F, θα υπάρχει μοναδικός φυσικός μετασχηματισμός $\theta : G \Rightarrow LF$ τέτοιος ώστε $\zeta = \varepsilon \circ (\theta\gamma_{\mathcal{M}})$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r, "\gamma_{\mathcal{M}}"] \arrow[dr, "F"'] & Ho(\mathcal{M}) \arrow[d, "LF"] \\ & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

Δυϊκά

2) Ένας **δεξιά παράγωγος συναρτητής** για τον F, είναι (αν υπάρχει) η αριστερή Kan επέκταση του F κατά μήκος της $\gamma_{\mathcal{M}}$, δηλαδή θα είναι ένα ζεύγος (RF, ε), όπου $RF : Ho(\mathcal{M}) \to \mathcal{C}$ και $\varepsilon : F \Rightarrow RF \circ \gamma_{\mathcal{M}}$, έτσι ώστε για κάθε συναρτητή $G : Ho(\mathcal{M}) \to \mathcal{C}$ και κάθε φυσικό μετασχηματισμό $\zeta : F \Rightarrow G\circ\gamma_{\mathcal{M}}$, θα υπάρχει μοναδικός φυσικός μετασχηματισμός $\theta : RF \Rightarrow G$ τέτοιος ώστε $\zeta = (\theta\gamma_{\mathcal{M}}) \circ \varepsilon$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r, "\gamma_{\mathcal{M}}"] \arrow[dr, "F"'] & Ho(\mathcal{M}) \arrow[d, "RF"] \\ & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

Παρατήρηση: Ο αριστερά (αντ. δεξιά) παράγωγος ενός συναρτητή F, αν υπάρχει είναι μοναδικός μέχρι μοναδικής φυσικής ισοδυναμίας.

Αν η κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι πλήρης, τότε ο αριστερά παράγωγος συναρτητής για τον F υπάρχει και γνωρίζουμε την κατασκευή του (ως μία δεξιά Kan επέκταση). Όμοια αν η κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι συν-πλήρης, τότε υπάρχει ο δεξιά παράγωγος συναρτητής για τον F. Ειδικότερα αν $F : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ και $\mathcal{M}$ μία κατηγορία μοντέλο, τότε για την ύπαρξη του αριστερά ή του δεξιά παράγωγου συναρτητή για τον F έχουμε την παρακάτω πρόταση:

2.10.2 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{M}$ μία κατηγορία μοντέλο, $\mathcal{C}$ είναι μία κατηγορία και $F : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ είναι ένας συναρτητής. Ισχύουν τα ακόλουθα:*

1) Αν ο F αντιστοιχίζει ακυκλικές συννηματώσεις μεταξύ συνινωδών σε ισομορφισμούς στην $\mathcal{C}$, τότε ο αριστερά παράγωγος συναρτητής του F υπάρχει,

και δυϊκά

2) Αν ο F αντιστοιχίζει ακυκλικές νηματώσεις μεταξύ ινωδών σε ισομορφισμούς στην $\mathcal{C}$, τότε ο δεξιά παράγωγος συναρτητής του F υπάρχει.

Απόδειξη: Αποδεικνύουμε το 1 και η απόδειξη για το 2 είναι δυϊκή.

Θεωρούμε τον συναρτητή $F \circ Q = D : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ (Q είναι η συνινώδης μετατόπιση (2.8)). Αν τώρα $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ είναι μία ασθενής ισοδυναμία, τότε

$Qf : QX \to QY$ είναι ασθενής ισοδυναμία μεταξύ συνινωδών, όποτε σύμφωνα με το πόρισμα 2.5.3 και την υπόθεση της πρότασης, έχουμε ότι ο $F(Qf) = Df$ είναι ισομορφισμός στην $\mathcal{C}$. Άρα από την καθολική ιδιότητα της ομοτοπικής κατηγορίας της $\mathcal{M}$ θα υπάρχει ένας συναρτητής $LF : Ho(\mathcal{M}) \to \mathcal{C}$ τέτοιος ώστε $LF \circ \gamma_{\mathcal{M}} = D$.

Επιπλέον θεωρούμε τον φυσικό μετασχηματισμό $\varepsilon : LF \circ \gamma_{\mathcal{M}} \Rightarrow F$ όπου η X-συντεταγμένη αυτού είναι $\varepsilon_X = F(p_X) : (LF \circ \gamma)(X) = D(X) = F(QX) \to F(X)$.

Το ζεύγος (LF, ε) αποτελεί τον αριστερά παράγωγο συναρτητή για τον F.

Πράγματι έστω $G : Ho(\mathcal{M}) \to \mathcal{C}$ ένας συναρτητής και $\zeta : G \circ \gamma \Rightarrow F$ ένας φυσικός μετασχηματισμός, τότε λόγω φυσικότητας του ζ το παρακάτω διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
G \circ \gamma(QX) \arrow[r, "\zeta_{QX}"] \arrow[d, "G\circ\gamma(p_X)"'] & F(QX) = (LF \circ \gamma)(X) . \arrow[d, "\varepsilon_X"] \\
G \circ \gamma(X) \arrow[r, "\zeta_X"'] & F(X)
\end{tikzcd}$$

Ορίζουμε το φυσικό μετασχηματισμό $\theta : G \Rightarrow LF$, με $\theta_X = \zeta_{QX} \circ ((G \circ \gamma)(p_X))^{-1}$. (Ο μορφισμός $(G \circ \gamma)(p_X)$ είναι αντιστρέψιμος γιατί, p_X είναι ασθενής ισοδυναμία στην $\mathcal{M}$ άρα $\gamma(p_X)$ είναι ισομορφισμός στην $Ho(\mathcal{M})$, συνεπώς $(G \circ \gamma)(p_X)$ ισομορφισμός στην $\mathcal{C}$ αφού ο G είναι συναρτητής.)

$$\begin{tikzcd}
G \circ \gamma(QX) \arrow[r, "\zeta_{QX}"] \arrow[d, "G\circ\gamma(p_X)"'] & F(QX) = (LF \circ \gamma)(X) . \arrow[d, "\varepsilon_X"] \\
G \circ \gamma(X) \arrow[r, "\zeta_X"'] \arrow[ur, dotted, "\theta_X"] & F(X)
\end{tikzcd}$$

Αν τώρα το X είναι συνινώδες, τότε από την υπόθεση της πρότασης έχουμε ότι ο μορφισμός $F(p_X)$ είναι ισομορφισμός, οπότε θ_X είναι η μόνη επιλογή μορφισμού που κάνει το παραπάνω διάγραμμα αντιμεταθετικό. Όμως από παρατήρηση σελίδα 42 έχουμε ότι $X \simeq QX$ για κάθε αντικείμενο X στην κατηγορία $Ho(\mathcal{M})$, και με αυτή την παρατήρηση αποδεικνύεται η μοναδικότητα του θ γενικά. $\square$

Ολικά παράγωγοι συναρτητές

2.10.3 Ορισμός. Έστω $\mathcal{M}$ και $\mathcal{N}$ είναι δύο κατηγορίες μοντέλο και $F : \mathcal{M} \to N$ ένας συναρτητής. Τότε ένας **ολικά αριστερά παράγωγος συναρτητής** για τον F, είναι ο αριστερά παράγωγος συναρτητής για τον συναρτητή $\gamma_{\mathcal{N}} \circ F : \mathcal{M} \to Ho(\mathcal{N})$. Δηλαδή ένας ολικά αριστερά παράγωγος συναρτητής για τον F αποτελείται από ένα συναρτητή $\mathbf{L}F : Ho(\mathcal{M}) \to Ho(\mathcal{N})$ και ένα φυσικό μετασχηματισμό $\varepsilon : \mathbf{L}F \circ \gamma_{\mathcal{M}} \Rightarrow \gamma_{\mathcal{N}} \circ F$, έτσι ώστε να πληρούνται οι καθολικές ιδιότητες που περιγράφονται στον ορισμό 2.10.1.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M} \arrow[r, "\gamma_{\mathcal{M}}"] \arrow[d, "F"'] & Ho(\mathcal{M}) \arrow[ddl, "\mathbf{L}F"] \\
\mathcal{N} \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{N}}"'] & \\
Ho(\mathcal{N}) &
\end{tikzcd}$$

Δυϊκά ένας **ολικά δεξιά παράγωγος συναρτητής** για τον F, είναι ο δεξιά παράγωγος συναρτητής για τον συναρτητή $\gamma_{\mathcal{N}} \circ F : \mathcal{M} \to Ho(\mathcal{N})$ Δηλαδή ένας ολικά δεξιά παράγωγος συναρτητής για τον F αποτελείται από ένα συναρτητή $\mathbf{R}F : Ho(\mathcal{M}) \to Ho(\mathcal{N})$ και ένα φυσικό μετασχηματισμό $\varepsilon : \gamma_{\mathcal{N}} \circ F \Rightarrow \mathbf{R}F \circ \gamma_{\mathcal{M}}$, έτσι ώστε να πληρούνται οι καθολικές ιδιότητες που περιγράφονται στον ορισμό 2.10.1.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M} \arrow[r, "\gamma_{\mathcal{M}}"] \arrow[d, "F"'] & Ho(\mathcal{M}) \arrow[ddl, "\mathbf{R}F"] \\
\mathcal{N} \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{N}}"'] & \\
Ho(\mathcal{N}) &
\end{tikzcd}$$

Παρατήρηση: Ο ολικά αριστερά (αντ. δεξιά) παράγωγος ενός συναρτητή F, αν υπάρχει είναι μοναδικός μέχρι μοναδικής φυσικής ισοδυναμίας.

Από την πρόταση 2.10.2 και το γεγονός ότι ο συναρτητής $\gamma_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \to Ho(\mathcal{N})$ στέλνει ασθενείς ισοδυναμίες σε ισομορφισμούς στην $Ho(\mathcal{N})$, έχουμε την παρακάτω πρόταση για την ύπαρξη ολικά αριστερά (αντ. δεξιά) παράγωγου συναρτητή.

2.10.4 Πρόταση. *Αν $\mathcal{M}$ και $\mathcal{N}$ είναι δύο κατηγορίες μοντέλο και $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ ένας συναρτητής, τότε*

1) Αν ο F αντιστοιχίζει ακυκλικές συννηματώσεις μεταξύ συνινωδών στην $\mathcal{M}$ σε ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{N}$, τότε ο ολικά αριστερά παράγωγος συναρτητής του F υπάρχει,

και δυϊκά

2) Αν F αντιστοιχίζει ακυκλικές νηματώσεις μεταξύ ινωδών στην $\mathcal{M}$ σε ασθενείς ισοδυναμίες στην $\mathcal{N}$, τότε ο ολικά δεξιά παράγωγος συναρτητής του F υπάρχει.

2.10.5 Θεώρημα. *Έστω $\mathcal{M}$ και $\mathcal{N}$ κατηγορίες μοντέλο και $F : \mathcal{M} \leftrightarrows \mathcal{N} : U$ ένα ζεύγος προσαρτημένων συναρτητών Quillen (F ο αριστερά προσαρτημένος και U ο δεξιά προσαρτημένος). Τότε*

1) Ο ολικά αριστερά παράγωγος συναρτητής $\mathbf{L}F : Ho(\mathcal{M}) \to Ho(\mathcal{N})$ για τον F υπάρχει.

2) Ο ολικά δεξιά παράγωγος συναρτητής $\mathbf{R}U : Ho(\mathcal{N}) \to Ho(\mathcal{M})$ για τον U υπάρχει.

3) Οι συναρτητές $\mathbf{L}F$ και $\mathbf{R}U$ είναι ένα ζεύγος προσαρτημένων συναρτητών.

Απόδειξη: Για τα 1, 2 αρκεί να συνδυάσουμε τις προτάσεις 2.9.3 και την παραπάνω πρόταση.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M} \arrow[r, shift right, "F"'] \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{M}}"'] & \mathcal{N} \arrow[l, shift right, "U"'] \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{N}}"] \\
Ho(\mathcal{M}) \arrow[r, shift left, "\mathbf{L}F"] & Ho(\mathcal{N}) \arrow[l, shift left, "\mathbf{R}U"]
\end{tikzcd}$$

Για την προσάρτηση των $\mathbf{L}F$ και $\mathbf{R}U$, αν με R και Q συμβολίσουμε την ινώδη και τη συνινώδη μετατόπιση στην $\mathcal{M}$ και με R' και Q' συμβολίσουμε την ινώδη και τη συνινώδη μετατόπιση στην $\mathcal{N}$, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
hom_{Ho\mathcal{N}}(\mathbf{L}FX, Y) &= hom_{Ho\mathcal{N}}(FQX, Y)\,(1) \\
&= \pi(R'Q'F(QX), R'Q'Y)\,(2) \\
&\cong \pi(F(QX), R'Q'Y)\,(3) \\
&\cong \pi(F(QX), R'Y)\,(4) \\
&\cong \pi(QX, UR'Y)\,(5) \\
&\cong \pi(RQX, UR'Y)\,(6) \\
&\cong \pi(RQX, RQUR'Y)\,(7) \\
&= hom_{Ho\mathcal{M}}(X, UR'Y)\,(8) \\
&= hom_{Ho\mathcal{M}}(X, \mathbf{R}UY)
\end{aligned}$$

Οι παραπάνω ισχυρισμοί αιτιολογούνται ως εξής:

(1) $\to$ (2) Ορισμός

(2) $\to$ (3) Έχουμε $R'Q'FQX \tilde{\to} Q'FQX \tilde{\to} FQX$ και RQY ινώδες και χρησιμοποιούμε το 2.5.2 i)

(3) $\to$ (4) Αντιστοιχο με το παραπάνω, χρησιμοποιώντας το 2.5.2 ii)

(4) $\to$ (5) Λόγω προσάρτησης και 2.9.6

(5) $\to$ (6) Χρησιμοποώντας το 2.8.1

(6) $\to$ (7) Αντίστροφη πορεία του (2) $\to$ (3)

(7) $\to$ (8) Ορισμός

2.10.6 Θεώρημα. *Έστω $\mathcal{M}$ και $\mathcal{N}$ είναι δύο κατηγορίες μοντέλο και $F : \mathcal{M} \leftrightarrows \mathcal{N} : U$ ένα ζεύγος Quillen ισοδυναμιών (F ο αριστερά προσαρτημένος και U ο δεξιά προσαρτημένος). Τότε ο ολικά αριστερά παράγωγος συναρτητής $\mathbf{L}F$ και ο ολικά δεξιά παράγωγος συναρτητής $\mathbf{R}U$ είναι μία ισοδυναμία μεταξύ των ομοτοπικών κατηγοριών $Ho(\mathcal{M})$ και $Ho(\mathcal{N})$.*

Απόδειξη: Από το παραπάνω θεώρημα έχουμε την προσάρτηση μεταξύ των συναρτητών: $\mathbf{L}F : Ho(\mathcal{M}) \leftrightarrows Ho(\mathcal{M}) : \mathbf{R}U$. Για να δείξουμε ότι οι συναρτητές $\mathbf{L}F$ και $\mathbf{R}U$ αποτελούν ισοδυναμία μεταξύ των ομοτοπικών κατηγοριών $Ho(\mathcal{M})$ και $Ho(\mathcal{N})$, αρκεί να δείξουμε ότι:

1) Για κάθε αντικείμενο X στην $Ho(\mathcal{M})$, ο φυσικός μορφισμός

$$\eta_X : X \to \mathbf{R}U \circ \mathbf{L}F(X)$$

είναι ισομορφισμός

και

2) Για κάθε αντικείμενο Y στην $Ho(\mathcal{N})$, ο φυσικός μορφισμός

$$\varepsilon_Y : \mathbf{L}F \circ \mathbf{R}U(Y) \to Y$$

είναι ισομορφισμός.

Αποδεικνύουμε το 1) και η απόδειξη για το 2) είναι παρόμοια. Αρχικά παρατηρούμε ότι κάθε μορφισμός στην $Ho(\mathcal{M})$ (αντ. στην $Ho(\mathcal{N})$) είναι η ομοτοπική κλάση κάποιου μορφισμού στη $\mathcal{M}$ (αντ.στην $\mathcal{N}$). Επιπλέον παρατηρούμε αν αυτός ο μορφισμός στη $\mathcal{M}$ είναι ασθενής ισοδυναμία, τότε ο αντίστοιχος στη $Ho(\mathcal{M})$ θα είναι ισομορφισμός.

Για την απόδειξη του 1, έχουμε ότι ο μορφισμός $\eta_X : X \to \mathbf{R}U \circ \mathbf{L}F(X)$, αντιστοιχεί λόγω της προσάρτησης στον ταυτοτικό μορφισμό $1_{\mathbf{L}F(X)} : \mathbf{L}F(X) \to \mathbf{L}F(X)$ και αυτός ο ταυτοτικός μορφισμός αντιστοιχεί στην ομοτοπική κλάση του ταυτοτικού μορφισμού του αντικειμένου $R'Q'F(QX)$. Από την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος ($\pi(R'Q'F(QX), R'Q'F(QX)) \cong \pi(F(QX), R'F(QX))$, δες $2 \to 3 \to 4$) και την παρατήρηση σελίδα 35, το αντίστοιχο στοιχείο του

$$\pi(F(QX), R'F(QX))$$

αποτελείται από ασθενείς ισοδυναμίες, οπότε από την υποθεσή μας ((F, U) ζεύγος Quillen ισοδυναμιών) και το αντίστοιχο στοιχείο του

$$\pi(QX, U(R'F(QX)))$$

αποτελείται από ασθενείς ισοδυναμίες. Πάλι τώρα με το ίδιο σκεπτικό έχουμε ότι και το αντίστοιχο στοιχείο του

$$\pi(RQX, RQU(R'F(QX))) = hom_{Ho(\mathcal{M})}(X, \mathbf{R}U \circ \mathbf{L}F(X))$$

αποτελείται από ασθενείς ισοδυναμίες άρα ο αντίστοιχος μορφισμός στη $Ho(\mathcal{M})$ (ο $\eta_X : X \to \mathbf{R}U \circ \mathbf{L}F(X)$) είναι ισομορφισμός. $\square$

Κεφάλαιο 3

ΜΟΝΟΠΛΟΚΑ ΣΥΝΟΛΑ ΚΑΙ KELLEY ΧΩΡΟΙ

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την κατηγορία των **μονόπλοκων συνόλων** (simplicial sets), καθώς και με την κατηγορία των συμπαγώς γεννώμενων Hausdorff χώρων, οι οποίες όπως θα δούμε, συνδέονται με ένα ζεύγος προσαρτημένων συναρτητών.

3.1 Συναρτητές με τιμές στα σύνολα

Έστω $\mathcal{C}$ μία μικρή κατηγορία. Τότε ένας ανταλλοίωτος συναρτητής $F : \mathcal{C}^{op} \to Set$ καλείται **προδράγμα (preasheaf)** της $\mathcal{C}$. Η κατηγορία $[\mathcal{C}^{op}, Set]$, με αντικείμενα τέτοιους συναρτητές και μορφισμούς φυσικούς μετασχηματισμούς μεταξύ αυτών καλείται η κατηγορία των προδραγμάτων της $\mathcal{C}$ στα σύνολα.

3.1.1 Θεώρημα. *Έστω $\mathcal{C}$ μία μικρή κατηγορία, $[\mathcal{C}^{op}, Set]$ η κατηγορία των προδραγμάτων. Τότε κάθε προδράγμα F είναι ισόμορφο με ένα συνόριο αναπαραστάσιμων συναρτήτων.*

Απόδειξη: Έχουμε ότι, $F \cong colim\{\ y \downarrow F \xrightarrow{\pi} \mathcal{C} \xrightarrow{y} [\mathcal{C}^{op}, Set]\ \}$ όπου $y \downarrow F$ είναι η κατηγορία με:

$(y \downarrow F)_0 = \{\ yC \xrightarrow{\alpha} F\ |C \in \mathcal{C}_0\}$ και

$$(y \downarrow F)_1 = \{\ \begin{tikzcd} yC \arrow[rr, "yf"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & yC' \arrow[dl, "\beta"] \\ & F & \end{tikzcd}\ , f : C \to C' \ \textit{και}\ \beta \circ yf = \alpha\},$$

όπου π είναι ο (επιλήσμων) συναρτητής: $\pi(\ yC \xrightarrow{\alpha} F\ ) = C$ και y ο συναρτητής Yoneda.

Παρατηρήσεις: 1) Η κατηγορία $y \downarrow F$ είναι ισοδύναμη με την κατηγορία elF στην οποία αναφερόμαστε ως η κατηγορία των στοιχείων του F, και ορίζεται ως εξής:

$(elF)_0 = \{(A, x) | A \in \mathcal{C}\ \textit{και}\ x \in FA\}$

$(elF)_1 = \{\ (A, x) \xrightarrow{f} (B, y)\ | f : A \to B\ \textit{και}\ Ff(y) = x\}$

Η ισοδυναμία προκύπτει από το λήμμα του Yoneda.

2) Αν $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ είναι ένας συναρτητής, και $\mathcal{X}$ μία κατηγορία, τότε επάγεται ένας συναρτητής: $-\circ F : [\mathcal{D}, \mathcal{X}] \longrightarrow [\mathcal{C}, \mathcal{X}]$ μεταξύ των δύο συναρτητικών κατηγοριών, με την εξής δράση:
στα αντικείμενα: Αν $G : \mathcal{D} \to \mathcal{X}$, τότε: $(- \circ F)(G) = G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{X}$
στους μορφισμούς: Αν $\theta : G \Rightarrow H$, τότε $(- \circ F)(\theta)$ είναι ο φυσικός μετασχηματισμός : $G \circ F \Rightarrow H \circ F$, όπου η C-συντεταγμένη του ($C \in \mathcal{C}_0$) είναι: $\theta_{FC} : G(FC) \to H(FC)$.

3.1.2 Θεώρημα. *Έστω $\mathcal{X}$ μία συν-πλήρης κατηγορία και $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ένας συναρτητής μεταξύ μικρών κατηγοριών. Τότε ο συναρτητής: $- \circ F : [\mathcal{D}, \mathcal{X}] \longrightarrow [\mathcal{C}, \mathcal{X}]$, έχει αριστέρα προσαρτημένο.*

Απόδειξη: Ο συναρτητής που θα περιγράψουμε την κατασκευή του θα συμβολίζεται με Lan_F και η τιμή του $Lan_F(X)$ σε κάποιο συναρτητή $X : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{X}$ λέγεται η **αριστερή Kan επέκταση** του X κατά μήκος του F.

Έστω $X : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{X}$. Τότε ορίζουμε τον συναρτητή $Lan_F(X)$ στα αντικείμενα της $\mathcal{C}$ ως εξής:

$$Lan_F(X)(D) = colim\{\ F \downarrow D \xrightarrow{\pi} \mathcal{C} \xrightarrow{X} \mathcal{X}\ \},$$

όπου $\pi(FC \to D) = C$

Για την δράση του $Lan_F(X)$ στους μορφισμούς της $\mathcal{D}$ εργαζόμαστε ως εξής: Έστω $g\colon D \to D'$ ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{D}$, και θέλουμε να ορίσουμε τον μορφισμό $Lan_F(X)(g)\colon Lan_F(X)(D) \to Lan_F(X)(D')$ στην κατηγορία $\mathcal{X}$. Η δείκτρια κατηγορία για το συνορίο που μας ορίζει το $Lan_F(X)(D)$

είναι η $F \downarrow D$. Μέσω του μορφισμού g επάγεται ο συναρτητής:

$$g \circ -: F \downarrow D \to F \downarrow D',$$

με την προφανή δράση.

Κάθε C που το $X(C)$ συμμετέχει στο συνόριο βρίσκεται εκεί λόγω κάποιου μορφισμού $FC \xrightarrow{\alpha} D$ και συβολίζουμε ένα τέτοιο C ως C_α. Επιπλέον για κάθε τέτοιο $\alpha \in (F \downarrow D)_0$, έχουμε $g \circ \alpha \in (F \downarrow D')_0$, και οι ταυτοτικοί μορφισμοί: $X(C_\alpha) \to X(C_{g\circ\alpha})$, επάγουν μορφισμόύς προς το συνόριο $Lan_F(X)(D)$, οπότε από την καθολική ιδιότητα του συνορίου $Lan_F(X)(D')$, θα υπάρχει ένας μορφισμός : $Lan_F(X)(D) \to Lan_F(X)(D')$ έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να αντιμετατίθεται:

$$\begin{tikzcd}
X(C_\alpha) \arrow[r, "id"] \arrow[d, "in_\alpha"] & X(C_{g\circ\alpha}) \arrow[d, "in_{g\circ\alpha}"'] \\
colim_{\alpha\in F\downarrow D} X(C_\alpha) \arrow[r, dotted, "Lan_F X(g)"] & colim_{\beta\in F\downarrow D'} X(C_\beta)
\end{tikzcd}$$

Για την προσάρτηση $Lan_F \dashv - \circ F$ περιγράφουμε την μονάδα της προσάρτησης $\eta : 1_{[\mathcal{C}\to\mathcal{X}]} \to (- \circ F) \circ Lan_F$.

Αν $X : \mathcal{C} \to \mathcal{X}$, τότε $\eta_X : X \to Lan_F X \circ F$ είναι ο φυσικός μετασχηματισμός όπου η C-συντεταγμένη αυτού: $\eta_X(C) : X(C) \to Lan_F X(FC)$ είναι $\eta_X(C) = in_{id_{FC}}$, ο μορφισμός δηλαδή από το $X(C)$ προς το συνόριο $colim_{\alpha\in F\downarrow FC} X(C_\alpha)$.

Παρατήρηση: Αν δούμε αναλυτικότερα το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι, αν $\mathcal{X}$ είναι μία συν-πλήρης κατηγορία και $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ένας συναρτητής μεταξύ δύο μικρών κατηγοριών, τότε για οποιοδήποτε συναρτητή $X : \mathcal{C} \to \mathcal{X}$, θα υπάρχει ένας συναρτητής (η αριστερή Kan επέκταση του X κατά μήκος του F) $Lan_F X : \mathcal{D} \to \mathcal{X}$ και ένας φυσικός μετασχηματισμός $\eta : X \Rightarrow Lan_F X \circ F$ έτσι ώστε αν $K : \mathcal{D} \to \mathcal{X}$ ένας συναρτητής και $\varepsilon : X \Rightarrow K \circ F$ ένας φυσικός μετασχηματισμός, τότε (λόγω της προσάρτησης) θα υπάρχει ένας φυσικός μετασχηματισμός $\hat{\varepsilon} : Lan_F X \Rightarrow K$, έτσι ωστε $\varepsilon = (\hat{\varepsilon} F) \circ \eta$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "X"'] & \mathcal{D} \arrow[dl, "Lan_F X"] \\
\mathcal{X} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, Rightarrow, "\eta"] \arrow[d, Rightarrow, "\varepsilon"'] & Lan_F X \circ F . \arrow[dl, Rightarrow, "\hat{\varepsilon}\circ F"] \\
K \circ F &
\end{tikzcd}$$

Το παραπάνω θεώρημα έχει και την δυϊκή του μορφή και συγκεκριμένα έχουμε:

Έστω $\mathcal{X}$ είναι μία πλήρης κατηγορία και $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ένας συναρτητής μεταξύ δύο μικρών κατηγοριών. Τότε για οποιοδήποτε συναρτητή $X : \mathcal{C} \to \mathcal{X}$ θα υπάρχει ένας συναρτητής (η δεξιά Kan επέκταση του X κατά μήκος του F) $Ran_F X : \mathcal{D} \to \mathcal{X}$ και ένας φυσικός μετασχηματισμός $\theta : Ran_F X \circ F \Rightarrow X$ έτσι ώστε αν $K : \mathcal{D} \to \mathcal{X}$ ένας συναρτητής και $\varepsilon : K \circ F \Rightarrow X$ ένας φυσικός μετασχηματισμός, τότε (λόγω της προσάρτησης) θα υπάρχει ένας φυσικός μετασχηματισμός $\hat{\varepsilon} : K \Rightarrow Ran_F X$ έτσι ωστε $\varepsilon = \theta \circ (\hat{\varepsilon} F)$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "X"'] & \mathcal{D} \arrow[dl, "Ran_F X"] \\ \mathcal{X} & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Ran_F X \circ F \arrow[r, Rightarrow, "\theta"] & X \\ K \circ F \arrow[u, Rightarrow, "\hat{\varepsilon} \circ F"] \arrow[ur, Rightarrow, "\varepsilon"'] & \end{tikzcd}$$

Εφαρμογή: Η Kan επέκταση κατά μήκος ενός συναρτητή $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, υπάρχει και σε περιπτώσεις που οι κατηγορίες $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ δεν είναι μικρές. Για παράδειγμα, έστω $\mathcal{C}$ μία (μικρή) κατηγορία και $y : \mathcal{C} \to [\mathcal{C}^{op}, Set]$ ο συναρτητής Yoneda. Τότε αν $\mathcal{D}$ είναι μία συν-πλήρης κατηγορία και $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ένας συναρτητής, τότε έχουμε τον συναρτητή: $Lan_y F : [\mathcal{C}^{op}, Set] \to \mathcal{D}$ (η αριστερή Kan επέκταση του F κατά μήκος του y), με:

$$Lan_y F(X) = colim\{\, y \downarrow X \xrightarrow{\pi} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \,\}.$$

Επιπλέον το παρακάτω διάγραμμα αντιμετατίθεται

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "y"] \arrow[dr, "F"'] & & {[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]} \arrow[dl, "Lan_y F"] \\ & \mathcal{D} & \end{tikzcd}$$

Πράγματι αν $C \in \mathcal{C}$ τότε:

$$Lan_y F(yC) = colim\{\, y \downarrow yC \xrightarrow{\pi} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \,\} \cong FC,$$

γιατί η κατηγορία $y \downarrow yC$ έχει τελικό αντικείμενο τον ταυτοτικό μορφισμό $yC \to yC$, οπότε το συνόριο είναι η τιμή του συναρτητή $F \circ \pi$ σ' αυτό. Μία επιπλέον ιδιότητα που έχει η αριστερή Kan επέκταση του F κατά μήκος του συναρτητή Yoneda, $Lan_y F$ είναι ότι έχει δεξιά προσαρτημένο τον συναρτητή: $S : \mathcal{D} \to [\mathcal{C}^{op}, Set]$, με $S(D)$ να είναι ο hom-συναρτητής: $hom_{\mathcal{C}}(F(-), D)$. Τέλος παρατηρούμε οτι ο $Lan_y F$ ως αριστερά προσαρτημένος συναρτητής θα διατηρεί συνορία.

3.2 Η κατηγορία Δ

Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψουμε την κατηγορία $\mathbf{\Delta}$ των πεπερασμένων διατακτικών αριθμών.

Θα συμβολίζουμε με $[n]$ το διατεταγμένο σύνολο $\{0 \leq 1 \leq 2 \leq 3 \leq ... \leq n\}$, με $n+1$ στοιχεία. Η κατηγορία $\mathbf{\Delta}$ ορίζεται να είναι η κατηγορία με αντικείμενα τους πεπερασμένους διατακτικούς $[n]$ και μορφισμούς μεταξύ αυτών συναρτήσεις που διατηρούν την διάταξη.

Θεωρούμε τώρα τους εξής μορφισμούς στην $\mathbf{\Delta}$:
• Αν $0 \leq i \leq n+1$ έχουμε τις συναρτήσεις:
$\delta_i : [n] \to [n+1]$ με

$$\delta_i(j) = \begin{cases} j & ,j < i \\ j+1 & ,j \geq i \end{cases} \tag{3.1}$$

δηλαδή δεν παίρνει την τιμή i
και
• Αν $0 \leq i \leq n-1$ έχουμε τις συναρτήσεις:
$\sigma_i : [n] \to [n-1]$ με

$$\sigma_i(j) = \begin{cases} j & ,j \leq i \\ j-1 & ,j > i \end{cases} \tag{3.2}$$

δηλαδή στέλνει τα i, $i+1$ στο i.

Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις δ_i είναι 1-1 και οι συναρτήσεις σ_i είναι επί.

Για τις συναρτήσεις αυτές ισχύουν οι λεγόμενες συν-μονόπλοκες ταυτότητες:

• $\delta_j\delta_i = \delta_i\delta_{j-1}$, αν $i < j$
• $\sigma_j\sigma_i = \sigma_i\sigma_{j+1}$, αν $i \leq j$
• $\sigma_j\delta_i = \delta_i\sigma_{j-1}$, αν $i < j$
• $\sigma_j\delta_i =$ ταυτοτική, αν $i = j$ ή $i = j+1$
• $\sigma_j\delta_i = \delta_{i-1}\sigma_j$, αν $i > j+1$.

3.2.1 Πρόταση. *Κάθε μορφισμός $\alpha : [n] \to [m]$ στην $\mathbf{\Delta}$ δέχεται μοναδική παραγοντοποίηση $\alpha = i \circ \pi$, όπου π είναι επί και i 1-1, και*
$\pi = \sigma_{j_1}\sigma_{j_2}...\sigma_{j_t}$, $0 \leq j_1 < j_2 < ... < j_t < n$
$i = \delta_{i_1}\delta_{i_2}...\delta_{i_s}$, $0 \leq i_s < i_{s-1} < ... < i_1 \leq m$

Απόδειξη: Έστω $j_1 < j_2 < ... < j_k$ είναι εκείνα τα στοιχεία του $[n]$ για τα οποία ισχύει $\alpha(j) = a(j+1)$

και $i_s < i_{s-1} < ... < i_1$ τα στοιχεία του $[m]$ που δεν ανήκουν στην εικόνα του α.

Τότε ο μορφισμός α παραγοντοποιείται μέσω του διατακτικού $[n-t] = [m-s]$ όπως ακριβώς αναφέρεται παραπάνω.

3.3 Η κατηγορία Simp

3.3.1 Ορισμός. Θα συμβολίζουμε με $|\Delta^k| := \{(a_0, a_1, ..., a_k) \in [0,1]^{k+1} | a_0 + a_1 + ... + a_k = 1\}, k \geq 0$ τον τοπολογικό υπόχωρο του $\mathbf{R}^{k+1}$ και αναφερόμαστε σε αυτόν ως το **σύμπλοκο** διάστασης k.

Παρατηρήσεις 1) Γεωμετρικά το σύμπλοκο διάστασης 0, $|\Delta^0|$ παριστάνει ένα σημείο, το σύμπλοκο διάστασης 1, $|\Delta^1|$ ένα ευθύγραμμο τμήμα, το σύμπλοκο διάστασης 2, $|\Delta^2|$ ένα τρίγωνο, το σύμπλοκο διάστασης 3, $|\Delta^3|$ ένα τετράεδρο κ.ο.κ.

Επίσης το σύνορο του $|\Delta^k|$ αποτελείται από την ένωση $k+1$ σύμπλοκων διάστασης $k-1$, το καθένα από τα οποία αντιστοιχεί στην συνοριακή συνθήκη $\alpha_i = 0, i = 0, 1, ..., k$.

2) Συμβολίζουμε με $e_i = (0, 0, ...0, 1, 0, ...0)$ το σημείο του $|\Delta^k|$, όπου το 1 βρίσκεται στην i-θέση. Κορυφές του $|\Delta^k|$ καλούμε τα σημεία $e_0, e_1, ..., e_k$.

Άρα κάθε σημείο του $|\Delta^k|$ γράφεται ως: $\sum\limits_{i=0}^{k} \alpha_i e_i$ με $\sum\limits_{i=0}^{k} \alpha_i = 1$.

3.3.2 Ορισμός. Μία συνάρτηση $f : |\Delta^k| \to |\Delta^l|$ καλείται **αφινική** αν για κάθε σημείο του $|\Delta^k|$ ικανοποιείται η σχέση: $f(\sum\limits_{i=0}^{k} \alpha_i e_i) = \sum\limits_{i=0}^{k} \alpha_i f(e_i)$.

Τέλος διατάσουμε τις κορυφές ως εξής:

$e_i \leq e_j$ αν $i \leq j$.

3.3.3 Ορισμός. Συμβολίζουμε με **Simp** την υποκατηγορία εκείνη της **Top**, η οποία έχει ως αντικείμενα τα σύμπλοκα $|\Delta^k|$, $k \geq 0$ και μορφισμούς αφινικές συναρτήσεις που διατηρούν την διάταξη στις κορυφές (δηλαδη αν $e_i \leq e_j$, τότε $f(e_i) \leq f(e_j)$).

Παρατηρουμε ότι οι μορφισμοί στην **Simp** είναι συνεχείς απεικονίσεις μεταξύ τοπολογικών χώρων.

3.3.4 Πρόταση. *Οι κατηγορίες* $\mathbf{\Delta}$ *και* **Simp** *είναι ισοδύναμες.*

Απόδειξη: Θεωρουμε τον συναρτητή $\Gamma : \mathbf{\Delta} \to \mathbf{Simp}$ με την εξής δράση:

Στα αντικείμενα: $[n] \mapsto |\Delta^n|$

Στους μορφισμούς: $f : [n] \to [m] \mapsto \Gamma(f) : |\Delta^n| \to |\Delta^m|$

με $\Gamma(f)(\sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i e_i) = \sum\limits_{i=0}^{m} \alpha_i e_{f(i)}$

Ο συναρτητης Γ όπως ορίστηκε παραπάνω είναι μία ισοδυναμία μεταξύ αυτών των κατηγοριών.

Στην κατηγορία **Simp** έχουμε την εξής χρήσιμη συλλογή μορφισμών:

- $n+1$ συναρτήσεις όψεως $\widetilde{\delta_i} : |\Delta^n| \to |\Delta^{n+1}|, \quad i = 0, 1, ..., n$ (για κάθε n) και
- $n-1$ συναρτήσεις εκφυλισμού $\widetilde{\sigma_i} : |\Delta^n| \to |\Delta^{n-1}|, \quad i = 0, 1, ..., n-1$ (για κάθε n),

όπου $\widetilde{\delta_i}$ είναι ο περιορισμός της μοναδικής γραμμικής συνάρτησης $\mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^{n+2}$ η οποία στέλνει το e_j στο e_j αν $j < i$ και στο e_{j+1} αν $j \geq i$,

και $\widetilde{\sigma_i}$ είναι ο περιορισμός της μοναδικής γραμμικής συνάρτησης $\mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^n$ η οποία στέλνει το e_j στο e_j αν $j \leq i$ και στο e_{j-1} αν $j > i$.

Οι συναρτήσεις αυτές έχουν τύπους

$$\widetilde{\delta_i}(\sum_i t_i e_i) = \sum_{0 \leq j < i} t_j e_j + \sum_{i \leq j \leq n} t_j e_{j+1}$$

$$\widetilde{\sigma_i}(\sum_i t_i e_i) = \sum_{0 \leq j \leq i} t_j e_j + \sum_{i < j \leq n} t_j e_{j-1}$$

Για αυτές τις συναρτήσεις ισχύουν οι συν-μονόπλοκες ταυτότητες (παράγραφος 2).

Παρατήρηση: Με απλό υπολογισμό προκύπτει ότι $\Gamma(\delta_i) = \widetilde{\delta_i}$ και $\Gamma(\sigma_i) = \widetilde{\sigma_i}$, οπότε λόγω της ισοδυναμίας των κατηγοριών $\mathbf{\Delta}$ και **Simp** δεν θα γίνεται διάκριση μεταξύ των δ_i και $\widetilde{\delta_i}$ όπως και μεταξύ των σ_i και $\widetilde{\sigma_i}$.

Τέλος με βάση αυτή την παρατήρηση εχουμε και το ανάλογο αποτέλεσμα της πρότασης 3.2.2 για την κατηγορία **Simp**.

3.4 Μονόπλοκα Σύνολα (Simplicial Sets)

3.4.1 Ορισμός. Ένα **μονόπλοκο σύνολο (simplicial set)** είναι ένας συναρτητής $F : \mathbf{\Delta}^{op} \to \mathbf{Set}$. Με **SSet** θα συμβολίζουμε την συναρτητική κατηγορία $[\mathbf{\Delta}^{op}, \mathbf{Set}]$, με αντικείμενα τέτοιους συναρτητές και μορφισμούς φυσικούς μετασχηματισμούς μεταξύ αυτών.

• Αν $F \in [\mathbf{\Delta}^{op}, \mathbf{Set}]$ και $[n] \in \mathbf{\Delta}_0$, τότε το σύνολο $F([n])$ θα συμβολίζεται με F_n και τα στοιχεία του F_n θα τα καλούμε n-σύμπλοκα.

• Αν $[n] \in \mathbf{\Delta}_0$, τότε οι συναρτήσεις

$\vartheta_i : F_n \to F_{n-1},\ 0 \leq i \leq n$ και $s_i : F_n \to F_{n+1},\ \ 0 \leq i \leq n$

με $\ \vartheta_i = F(\delta_i)$ και $\ s_i = F(\sigma_i)$

(όπου δ_i και σ_i είναι οι μορφισμοί της $\mathbf{\Delta}$ όπως αυτοί ορίστηκαν στην παράγραφο 2), ικανοποιούν τις λεγόμενες μονόπλοκες ταυτότητες.

δηλαδή:

• $\vartheta_\iota \vartheta_j = \vartheta_{j-1}\vartheta_i$, αν $i < j$

• $s_i s_j = s_{j+1} s_i$, αν $i \leq j$

• $\vartheta_i s_j = s_{j-1}\vartheta_i$, αν $i < j$

• $\vartheta_i s_j =$ ταυτοτική, αν $i = j$ ή $i = j + 1$

• $\vartheta_i s_j = s_j \vartheta_{i-1}$, αν $i > j + 1$

• Οι συναρτήσεις θ_i καλούνται **συναρτήσεις όψεως (face maps)** και οι συναρτήσεις s_i καλούνται **συναρτήσεις εκφυλισμού (degeneracy maps)**.

Επιπλέον αν X είναι ένα μονόπλοκο σύνολο και x ένα σύμπλοκο του X τότε κάθε εικόνα του x από δράσεις συναρτήσεων όψης καλείται *όψη* του x. Όμοια κάθε εικόνα του x από δράσεις συναρτήσεων εκφυλισμού καλείται *εκφυλισμός* του x. Θεώρουμε και την περίπτωση καμίας δράσης τέτοιων συναρτήσεων, οπότε έχουμε ότι το τυχαίο σύμπλοκο x είναι όψη και εκφυλισμός του εαυτού του.

Τέλος ενα σύμπλοκο x καλείται *μη εκφυλισμένο* αν είναι εκφυλισμός μόνο του εαυτού του.

Παρατηρήσεις 1) Σύμφωνα με την πρόταση 3.2.2 και επειδή ο F είναι συναρτητής έχουμε ότι γνωρίζοντας μόνο τις συναρτήσεις ϑ_i, s_i μπορούμε να γνωρίζουμε την συνάρτηση $F(\alpha)$ για κάθε μορφισμό α στην Δ.

Σύμφωνα με την παραπάνω παρατήρηση ένα μονόπλοκο σύνολο $\mathbf{K}$ μπορεί να ειδωθεί ως μία παραμετρικοποιημένη από το σύνολο των φυσικών αριθμών οικογένεια συνόλων, εφοδιασμένη με συναρτήσεις $\vartheta_q : \mathbf{K}_q \to \mathbf{K}_{q-1}$, $s_q : \mathbf{K}_q \to \mathbf{K}_{q+1}, 0 \leq i \leq q$ οι οποίες ικανοποιούν τις μονόπλοκες ιδιότητες.

Για παράδειγμα αν X είναι ένας τοπολογικός χώρος, τότε για κάθε $n \in \mathbf{N}$ ορίζουμε $K_n = hom_{\mathbf{Top}}(|\Delta^n|, X)$(το σύνολο δηλαδή των συνεχών συναρτήσεων από το $|\Delta^n|$ στο X) και $\vartheta_i = hom_{\mathbf{Top}}(\delta_i, X)$, $s_i = hom_{\mathbf{Top}}(\sigma_i, X)$

2) Για κάθε σύμπλοκο x ενός μονόπλοκου συνόλου X υπάρχει ένα μοναδικό μη εκφυλισμένο σύμπλοκο y του X ετσι ώστε το x να είναι εκφυλισμός

του y. Πράγματι, διαλέγουμε y το σύμπλοκο με την μικρότερη διάσταση έτσι ώστε το το x είναι εκφυλισμός του y. Από τις μονόπλοκες ταυτότητες έχουμε ότι ένα τέτοιο σύμπλοκο είναι μοναδικό και ότι κάθε σύμπλοκο z που είναι και εκφυλισμός του x είναι εκφυλισμός του y.

3) Αν X και Y δύο μονόπλοκα σύνολα. Το μονόπλοκο σύνολο $X \times Y$ με:

$$(X \times Y)([n]) = X([n]) \times Y([n])$$

είναι το γινόμενο των X και Y στην **SSet**.

3.5 Γεωμετρική Πραγματοποίηση

Αν με $\iota : \mathbf{Simp} \to \mathbf{Top}$ συμβολίσουμε τον συναρτητή που εμφυτεύει την **Simp** στην **Top**, τότε αν συμβολίσουμε $\Delta = \iota \circ \Gamma$ θα έχουμε ένα συναρτητή από την κατηγορία $\mathbf{\Delta}$ προς την συν-πλήρη κατηγορία **Top**, οπότε σύμφωνα με την εφαρμογή σελ 58, έχουμε ότι το παρακάτω τρίγωνο είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{\Delta} \arrow[rr, "y"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & {[\mathbf{\Delta}^{op}, \mathrm{Set}]} \arrow[dl, "Lan_y \Delta"] \\ & \mathbf{Top} & \end{tikzcd}$$

Η αριστερή Kan επέκταση του Δ κατά μήκος της εμφύτευσης του Yoneda $Lan_y\Delta$, καλείται **γεωμετρική πραγματοποίηση** και θα συμβολίζεται με $|-|$.

Παρατηρήσεις: 1) Η γεωμετρική πραγματοποίηση διατηρεί συνόρια (ως αριστερά προσαρτημένος συναρτητής).
2) Απο την αντιμεταθετικότητα του διαγράμματος έχουμε ότι $|hom_{\mathbf{\Delta}}(-,[n])| = |\Delta^n|$, οπότε υιοθετούμε τον συμβολισμό $\Delta^n = hom_{\mathbf{\Delta}}(-,[n])$.
3) Για την αναλυτική περιγραφή του συναρτητή ερμηνεύουμε το αποτέλεσμα του θεωρήματος 3.1.2:

Έστω X ένα μονόπλοκο σύνολο, τότε

$$|X| = colim\{\, y \downarrow X \xrightarrow{\pi} \mathbf{\Delta} \xrightarrow{\Delta} \mathbf{Top} \,\} = colim_{x:\Delta^n \to X} |\Delta(n)|.$$

Το συνόριο αυτό που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι ένα συνόριο στην κατηγορία των τοπολογικών χώρων και είναι (1.1.11) ο συνεξισωτής του παρακάτω διαγράμματος:

$$\delta, \tau : \coprod_{f \in (elX)_1} \Delta(\vartheta_0 f) \rightrightarrows \coprod_{m \in (elX)_0} \Delta(m) \twoheadrightarrow Coeq(\delta, \tau)$$

και έχουμε

$$\coprod_{m\in(elX)_0} \Delta(m) = \coprod_{m\in\Delta_0}\coprod_{\alpha\in X(m)} \Delta(m) = \coprod_{m\in\Delta_0} X(m)\times\Delta(m) := \overline{X}$$

και η δ δρα ταυτοτικά, δηλαδή $\delta(x) = ((Xf)(\alpha), x)$

ενώ για την τ έχουμε: $\tau(x) = (\alpha, (\Delta f)(x))$

όπου $x \in \coprod_{f\in(elX)_1} \Delta(\vartheta_0 f)$ και $f : (n,\beta) \to (m,\alpha)$ με $Xf(\alpha) = \beta$

Ο συνεξισωτής που ψάχνουμε θα είναι ο χώρος πηλίκο $\overline{X}/\sim$, όπου $\sim$ είναι η ελάχιστη σχέση ισοδυναμίας που σχετίζει τα στοιχεία $\delta(x)$ και $\tau(x)$. Αν εξειδικεύσουμε για $f = \delta_i$ έχουμε:

$$(\vartheta_i\alpha, x) \sim (\alpha, \delta_i(x)) \quad (1)$$

ένω για $f = \sigma_i$ έχουμε:

$$(s_i\alpha, x) \sim (\alpha, \sigma_i(x)) \quad (2)$$

Θα δείξουμε χρησιμοποιώντας την πρόταση 1.3.2 ότι οι (1), (2) είναι οι μόνοι αναγκαίοι συσχετισμοί που χρειάζονται, δηλαδη θα δείξουμε ότι μόνο με τις (1), (2) έχουμε ότι για την τυχαία f ότι $((Xf)(\alpha), x) \sim (\alpha, (\Delta f)(x))$

Πράγματι έχουμε:

$$\begin{aligned}
((Xf)(\alpha), x) &= (X(\delta_{i_1}...\delta_{i_s}\sigma_{j_1}...\sigma_{j_r})\alpha, x)\\
&= (s_{j_r}...s_{j_1}\vartheta_{i_s}...\vartheta i_s\alpha, x)\\
&\sim (s_{jr-1}...s_{j_1}\vartheta_{i_s}...\vartheta_{i_1}\alpha, \sigma_{j_r}x)\\
&\sim ...\\
&\sim (\vartheta_{i_s}...\vartheta_{i_1}\alpha, \sigma_{j_1}...\sigma_{j_r}x)\\
&\sim (\vartheta_{i_{s-1}}...\vartheta_{i_1}\alpha, \delta_{i_s}\sigma_{j_1}...\sigma_{j_r}x)\\
&\sim ...\\
&\sim (\alpha, \delta_{i_1}...\delta_{i_s}\sigma_{j_1}...\sigma_{j_r}x)\\
&\sim (\alpha, (\Delta f)(x))
\end{aligned}$$

4) Ο δεξιά προσαρτημένος συναρτητής της γεωμετρικής πραγματοποίησης θα συμβολίζεται με $Sing$: $\mathbf{Top} \to [\boldsymbol{\Delta}^{op}, \mathbf{Set}]$ και καλείται ο **ιδιάζων (singular)** συναρτητής.

$\mathrm{Sing}(D) = hom_{\mathbf{Top}}(\Delta(-), D)$, όπου D είναι ένας τοπολογικός χώρος.

3.6 Χώροι Kelley

Δοθείσας μίας συνάρτησης $X \times Y \to Z$, όπου X, Y, Z τοπολογικοί χώροι, θα θέλαμε να εφοδιάσουμε το σύνολο $C(Y, Z)$, των συνεχών συναρτήσεων από το Y στο Z, με μία τοπολογία έτσι ώστε η f να είναι συνεχής αν και μόνο αν η (προσαρτημένη) συνάρτηση

$$\tilde{f} : X \to C(Y, Z),\ \tilde{f}(x)(y) = f(x, y)$$

είναι συνεχής.
Για παράδειγμα θα θέλαμε μία ομοτοπία $f : I \times Y \to Z$ να αντιστοιχεί σε ένα μονοπάτι $\tilde{f} : I \to C(Y, Z)$ από συναρτήσεις.
Όμως μία τέτοια τοπολογία στο σύνολο $C(Y, Z)$ δεν είναι εφικτή, ακόμα και για Hausdorff τοπολογικούς χώρους. Η κατηγορία των χώρων Kelley μας παρέχει ένα πλαίσιο που μας επιτρέπει να κάνουμε τέτοιες κατασκευές.

3.6.1 Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται **συμπαγώς γεννώμενος**, αν για οποιοδήποτε υποσυνολό του A που τέμνει κάθε συμπαγές υποσύνολο του X σε ένα κλειστό σύνολο είναι και το ίδιο κλειστό. Δηλαδή αν $A \cap C$=κλειστό, για κάθε C συμπαγές, τότε A κλειστό.

Ένας συμπαγώς γεννώμενος χώρος που είναι και Hausdorff θα λέγεται **Kelley** χώρος.

-Παραδείγματα τέτοιων χώρων είναι οι μετρικοποιήσιμοι χώροι και οι τοπικά συμπαγείς Hausdorff χώροι (κατά συνέπεια και οι συμπαγείς χώροι Hausdorff).

3.6.2 Ορισμός. Με **CGHaus** (ή **K**) θα συμβολίζουμε την κατηγορία που έχει για αντικείμενα όλους τους χώρους Kelley και μορφισμούς τις συνεχείς απεικονίσεις μεταξύ αυτών.

3.6.3 Πρόταση. **CGHaus** *είναι μία πλήρης, συνανακλαστική υποκατηγορία της* **Haus**.

Απόδειξη: Η **CGHaus** είναι πλήρης υποκατηγορία της **Haus** εξ'ορισμού.
Έστω Y ένας Hausdorff χώρος. Ορίζουμε τον χώρο KY (Kellyfication του Y) ως εξής:
Έχει το ίδιο υποκείμενο σύνολο με τον Y (δηλαδή τα ίδια σημεία) και
$A \subseteq KY$ ($A \subseteq Y$) θα είναι κλειστό στον KY, αν και μόνο αν το $A \cap C$ είναι κλειστό υποσύνολο του Y για όλα τα συμπαγή υποσύνολα, $C \subseteq Y$.

Ο KY είναι τοπολογικός χώρος και επιπλέον ισχύουν:
1) Αν F είναι ένα κλειστό υποσύνολο του Y τότε F είναι κλειστό υποσύνολο

του KY (γιατί σε Hausdorff χώρους η τομή ενός κλειστού με συμπαγές είναι κλειστό σύνολο). Άρα και τα ανοικτά υποσύνολα του Y είναι ανοικτά στον KY
2) Άμεση συνέπεια είναι ότι αν C είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του KY, τότε το C είναι συμπαγές στον Y και ότι ο KY είναι Hausdorff χώρος.
Πράγματι, έστω $C \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i$ όπου G_i, $i \in I$ είναι ανοικτά υποσύνολα του Y. Σύμφωνα τώρα με την 1, τα G_i, $i \in I$ είναι και ανοικτά υποσύνολα του KY.Όμως το C είναι συμπαγές υποσύνολο του KY, οπότε $C \subseteq G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup ...G_{i_k}$, $i_1, i_2, ...i_k \in I$.
3) Από την κατασκευή του χώρου KY, έχουμε ότι είναι συμπαγώς γεννώμενος χώρος (άρα και Kelley χώρος σύμφωνα με το 2).
4) Από το 1 έχουμε ότι η ταυτοτική συνάρτηση $\varepsilon_Y : Y \to KY$ είναι συνεχής.
5) Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : X \to Y$ όπου X είναι ένας Kelley χώρος παραγοντοποιείται μονοσήμαντα ως εξής:

$$\begin{tikzcd} KY \arrow[r, "\epsilon_Y"] & Y \\ X \arrow[u, dotted, "f'"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

όπου $f' : X \to KY$ είναι η ίδια συνάρτηση με την f και είναι συνεχής επειδή ο X είναι συμπαγώς γεννώμενος (δες Παρατήρηση 1, παρακάτω).

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι ο συναρτητής K : $\mathbf{Haus} \to \mathbf{CGHaus}$, $(Y \mapsto KY)$ είναι δεξιά προσαρτημένος της εμφύτευσης $\mathbf{CGHaus} \hookrightarrow \mathbf{Haus}$ και η συν-μονάδα της προσάρτησης είναι η $\varepsilon : i \circ K \Rightarrow 1_{\mathbf{Haus}}$ με συντεταγμένες $\varepsilon_Y : KY \to Y$ όπως ορίστηκε παραπάνω. □

Παρατηρήσεις: 1) Αν X είναι ένας Kelley χώρος, Y ένας τοπολογικός χώρος και $f : X \to Y$ είναι μία συναρτηση, τότε η f θα είναι συνεχής αν ο περιορισμός της f στα συμπαγή υποσύνολα του X, $f_{|_C} : C \to Y$ είναι συνεχής για κάθε συμπαγές υποσύνολο του X.
Πράγματι, έστω F ένα κλειστό υποσύνολο του Y. Αν C είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του X, θεωρούμε την συνάρτηση: $f_{|_C} : C \to Y$. Το σύνολο $f_{|_C}^{-1}(F) = f^{-1}(F) \cap C$ είναι κλειστό υποσύνολο του υπόχωρου C. Συνεπώς $f^{-1}(F) \cap C = A \cap C$, όπου το A είναι κλειστό υποσύνολο του X, και επειδή το C είναι συμπαγές, έχουμε ότι το $A \cap C$ είναι κλειστό υποσύνολο του X. Άρα για το τυχαίο συμπαγές υποσύνολο του X το σύνολο $f^{-1}(F) \cap C$, είναι κλειστό υποσύνολο του X και επειδή ο X είναι χώρος Kelley, το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό στον X.

2) Αποδεικνύεται ότι οι ομοτοπικές ομάδες των χώρων Y και KY είναι οι ίδιες.

3.6.4 Πρόταση. *Η κατηγορία* **CGHaus** *είναι πλήρης και συν-πλήρης.*

Απόδειξη: Η κατηγορία **Haus** είναι πλήρης και συν-πλήρης. Από την παρατήρηση σελίδα 13, έχουμε ότι και η **CGHaus** ως συνανακλαστική υποκατηγορία της **Haus** θα είναι πλήρης και συν-πλήρης. Το συνόριο ενός διαγράμματος στην **CGHaus** είναι το ίδιο με το συνόριο του διαγράμματος αν αυτό ειδωθεί ως ένα διάγραμμα στην **Haus**. Για το όριο τώρα ενός διαγράμματος στην **CGHaus**, υπολογίζουμε το όριο του διαγράμματος στην **Haus** και στην συνέχεια η δράση του συναρτητή K, μας δίνει το όριο του διαγράμματος στην **CGHaus**.
Πιο, συγκεκριμένα αν X και Y είναι δύο αντικείμενα στην **CGHaus** τότε:

$$X \square Y =: X \times_{\mathbf{CGHaus}} Y = K(X \times_{\mathbf{Haus}} Y)$$

Για τον εξισωτή τώρα ενός παράλληλου ζεύγους μορφισμών στην **CGHaus** έχουμε ότι ο εξισωτής αυτού του διαγράμματος στην **Haus** είναι ο εξισωτής του διαγράμματος στην **CGHaus** (χωρίς δηλαδή να δράσει ο συναρτητής K). Πράγματι, έστω $f, g : X \rightrightarrows Y$ ένα παράλληλο ζεύγος μορφισμών στην **CGHaus**, και $e : Z \to X$ ο εξισωτής στην **Haus**, όπου $Z = \{x \in X | f(x) = g(x)\} \subseteq X$. Επειδή ο X είναι Hausdorff χώρος το Z είναι κλειστό υποσύνολο αυτού. Θα δείξουμε ότι $Z \in (\mathbf{CGHaus})_0$.
Έστω $A \subseteq Z$ με την ιδιότητα ότι για κάθε συμπαγές υποσύνολο C του Z ισχύει ότι το $A \cap C$ είναι κλειστό υποσύνολο του Z. Επειδή όμως Z είναι υπόχωρος του X, έχουμε ότι $A \cap C = B \cap Z$, όπου το B είναι ένα κλειστό υποσύνολο του X, και επειδή το Z είναι κλειστό στον X έχουμε ότι το $A \cap C$ είναι κλειστό υποσύνολο του X για κάθε συμπαγές υποσύνολο του Z, άρα και για κάθε συμπαγές υποσύνολο του X. Όμως ο X είναι συμπαγώς γεννώμενος χώρος, άρα το A είναι κλειστό στο X. Συνεπώς $A = A \cap Z$ κλειστό στο Z.

3.6.5 Ορισμός. Αν X, Y είναι χώροι Hausdorff, τότε συμβολίζουμε με $C(X, Y)$ τον χώρο των συνεχών συναρτήσεων $X \to Y$, εφοδιασμένο με την **συμπαγή-ανοικτή (compact-open)** τοπολογία η οποία ορίζεται ως εξης: Αν A είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του X και U ένα ανοικτό υποσύνολο του Y, θεωρούμε το σύνολο $N(A, U)$ των $f \in C(X, Y)$ με $f(A) \subseteq U$. Η συλογή ολων αυτών των συνόλων αποτελεί την υποβάση για την τοπολογία αυτή.

Παρατήρηση: Υπάρχουν παραδείγματα τα οποία δείχνουν ότι μπορεί οι χώροι X, Y να ανήκουν στην **CGHaus** αλλά ο χώρος $C(X, Y)$ όχι. Συνεπώς θα πρέπει βρούμε άλλο τρόπο (απο αυτόν της γενίκευσης) για να ορίσουμε τα εκθετικά αντικείμενα στην **CGHaus**, και ο τρόπος αυτός θα είναι να χρησιμοποιήσουμε τον συναρτητή K.

3.6.6 Πρόταση. CGHaus *είναι μία καρτεσιανά κλειστή κατηγορία.*

Απόδειξη: Αν X, Y είναι Kelley χώροι, ορίζουμε $X^Y = K(C(Y, X))$ και $e : X^Y \Box Y \to X$ την συνάρτηση αποτίμησης ως εξής:

$< f, y > \mapsto f(y)$. Θα δείξουμε ότι η e είναι συνεχής. Όμως σύμφωνα με την παρατήρηση 4 αρκεί να δείξουμε ότι η $e : X^Y \times Y \to X$ είναι συνεχής στα συμπαγή υποσύνολα του $X^Y \times Y$, δηλαδή αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι συνεχής σε κάθε σύνολο της μορφής $D \times C$, όπου D είναι συμπαγές στον $C(X, Y)$ και C είναι συμπαγές στον Y.
Θεωρούμε ένα $< f, y > \in D \times C$, και έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του X που περιέχει το $e(< f, y >) = f(y)$. Αφού η $f : Y \to X$ είναι συνεχής, υπάρχει μία περιοχή M του y στο C τέτοια ώστε $f(\overline{M}) \subseteq U$. Αλλά $N(\overline{M}, U)$ είναι ένα σύνολο της υποβάσης για τον $C(Y, X)$ και $[N(\overline{M}, U) \cap D] \times M$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $D \times C$, περιέχει το $< f, y >$, και $e([N(\overline{M}, U) \cap D] \subseteq U$. Άρα η e είναι συνεχής.

Μένει να αποδείξουμε την καθολικότητα της συνάρτησης e. Έστω λοιπόν μια οποιαδήποτε συνάρτηση $h : Z \Box Y \to X$ στην κατηγορία **CGHauss**. Στην συνέχεια θεωρούμε την συνάρτηση $k : Z \to \mathbf{Set}(X, Y)$, όπου $k = h^\sharp$, δηλαδή $(k(z))(y) = h(z, y)$, για όλα τα $z \in Z$ και $y \in Y$. Αποδεικνύεται (δες [ML] σελ.187), ότι η συνάρτηση $k(z) : Y \to X$ είναι συνεχής, άρα $k(z) \in X^Y$. Επιπλέον αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση $Z \to X^Y$ με $z \mapsto k(z)$ είναι συνεχής.

Τώρα επειδή η **Set** είναι καρτεσιανά κλειστή κατηγορία έχουμε το παρακάτω αντιμεταθετικό διάγραμμα στην **Set**

$$\begin{tikzcd} X^Y \Box Y \arrow[r, "e"] & X \\ Z \Box Y \arrow[u, "k \Box 1_Y"] \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

και αφου η k είναι συνεχής, εχούμε την καθολικότητα της e και συνεπώς έχουμε την προσάρτηση:

$$hom_{\mathbf{CGHaus}}(Z \Box Y, X) \cong hom_{\mathbf{CGHaus}}(Z, X^Y).$$

Παρατήρηση: Η γεωμετρική πραγματοποίηση του Δ^n (δηλαδή το σύμπλοκο διάστασης n), είναι ένας συμπαγής Hausdorff χώρος άρα είναι ένα αντικείμενο της κατηγορίας **K**, και αφού η **K** είναι συν-πλήρης (ή αλλιως, η **K** είναι κλειστή ως προς τα συνόρια στην **Top**) συμπεραίνουμε ότι η γεωμετρική πραγματοποίηση μπορεί να ειδωθεί ως ένας συναρτητής στην **K**.
Επιπλέον συμφώνα με την περιγραφή του συναρτητή αυτού αποδεικνύεται ότι αν X ένα μονόπλοκο σύνολο τότε ο χώρος $|X|$ είναι ένα CW-complex.

Λήμμα Ο "φυσικός" μορφισμός $|\Delta^m \times_{\mathbf{SSet}} \Delta^n| \to |\Delta^m| \times_{\mathbf{K}} |\Delta^n|$ είναι ένας ομοιομορφισμός (δηλαδή ισομορφισμός στην $\mathbf{K}$).

Για την απόδειξη τού λήμματος δες [Ho] (λήμμα 3.1.8 σελ. 77).

Λήμμα: Αν X είναι ένα μονόπλοκο σύνολο και $m \geq 0$, τότε ο φυσικός μορφισμός $|X \times \Delta^m| \to |X| \times |\Delta^m|$ είναι ισομορφισμός (στη $\mathbf{K}$).

Απόδειξη: Γράφουμε το X ως συνόριο αναπαραστάσιμων, $X = colim_{x:\Delta^n \to X} \Delta^n$ και χρησιμοποιώντας την συμβατότητα του γινομένου με συνόρια προδραγμάτων και το γεγονός ότι ο συναρτητής γεωμετρική πραγματοποίηση ως αριστερά προσαρτημένος διατηρεί συνόρια, έχουμε σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση:

$$\begin{aligned}
|X \times \Delta^n| &\cong |(colim_{x:\Delta^n \to X} \Delta^n) \times \Delta^m| \\
&\cong |colim_{x:\Delta^n \to X} (\Delta^n \times \Delta^m)| \\
&\cong colim_{x:\Delta^n \to X} (|\Delta^n \times \Delta^m|) \\
&\cong colim_{x:\Delta^n \to X} (|\Delta^n| \times |\Delta^m|) \\
&\cong (colim_{x:\Delta^n \to X} |\Delta^n|) \times |\Delta^m| \\
&\cong |X| \times |\Delta^m|
\end{aligned}$$

όπου ο προτελευταίος ισομορφισμός δικαιολογείται από το ότι ο συναρτητής $(-) \times Y$ είναι αριστερά προσαρτημένος (του $(-)^Y$), άρα διατηρεί συνόρια.

3.6.7 Πρόταση. *Έστω X και Y δύο μονόπλοκα σύνολα. Τότε $|X \times Y| \cong |X| \times |Y|$*

Απόδειξη: Έχουμε:

$$\begin{aligned}
|X \times Y| &\cong |(colim_{x:\Delta^n \to X} \Delta^n) \times Y| \\
&\cong |colim_{x:\Delta^n \to X} (\Delta^n \times Y)| \\
&\cong colim_{x:\Delta^n \to X} |\Delta^n \times Y)| \\
&\cong colim_{x:\Delta^n \to X} (|\Delta^n| \times |Y|) \\
&\cong (colim_{x:\Delta^n \to X} |\Delta^n|) \times |Y| \\
&\cong |X| \times |Y|
\end{aligned}$$

Παρατήρηση: Το σύμβολο $\times$ στην πρώτη ισοδυναμία δηλώνει το γινόμενο στην κατηγορία **SSet**, ενώ στην τελευταία ισοδυναμία δηλώνει το γινόμενο στην **K**.

3.6.8 Πρόταση. *Ο συναρτητής γεωμετρική πραγματοποίηση διατηρεί εξισωτές.*

Για την απόδειξη της πρότασης δες [Ho] (λήμμα 3.2.4 σελ. 80).

Παρατήρηση: Από τις προτάσεις 3.6.7, 3.6.8 και το θεώρημα 1.1.10 έχουμε ότι ο συναρτητής γεωμετρική παραγματοποίηση θα διατηρεί όλα τα πεπερασμένα όρια.

3.6.9 Ορισμός. Μία **μονόπλοκη ομοτοπία** μεταξύ δύο μορφισμών $f, g : X \rightrightarrows Y$ ανάμεσα σε μονόπλοκα σύνολα είναι ένας μορφισμός $h : X \times \Delta^1 \to Y$, έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να αντιμετατίθεται

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_0"] \arrow[dr, "f"'] & X \times \Delta^1 \arrow[d, "h"] & X \arrow[l, "i_1"'] \arrow[dl, "g"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

όπου i_0, i_1 είναι οι μορφισμοί (φυσικοί μετασχηματισμοί) που επάγονται απο τους δύο μορφισμούς $\Delta^0 \rightrightarrows \Delta^1$. Οι δύο μορφισμοί καλούνται ομοτοπικοί.

3.6.10 Πρόταση. *Αν οι f, g είναι ομοτοπικοί μορφισμοί μεταξύ μονόπλοκων συνόλων, τότε οι $|f|, |g|$ είναι ομοτοπικές συναρτήσεις μεταξύ τοπολογικών χώρων.*

Απόδειξη: Έστω $f, g : X \rightrightarrows Y$ δύο συναρτήσεις μεταξύ μονόπλοκων συνόλων έτσι ώστε το διάγραμμα του παραπάνω ορισμού να αντιμετατίθεται. Όμως η γεωμετρική πραγματοποίηση είναι συναρτητής και σύμφωνα και με το παραπάνω λήμμα έχουμε ότι το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} {|X|} \arrow[r, "i_0"] \arrow[dr, "|f|"'] & {|X| \times |\Delta^1|} \arrow[d, "|h|"] & {|X|} \arrow[l, "i_1"'] \arrow[dl, "|g|"] \\ & {|Y|} & \end{tikzcd}$$

αντιμετατίθεται. Τέλος παρατηρώντας ότι: $|\Delta^1| \cong [0, 1]$ έχουμε ότι $|f|$ και $|g|$ είναι ομοτοπικά ισοδύναμες συναρτήσεις μεταξύ τοπολογικών χώρων.

Κεφάλαιο 4

Η SSET ΩΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε ότι η κατηγορία **SSet** αποκτά την δομή κατηγορίας μοντέλο, με κατάλληλη επιλογή των τριών κλάσεων μορφισμών (ασθενείς ισοδυναμίες, νηματώσεις, συννηματώσεις) και επιπλέον πως αυτή ως κατηγορία μοντέλο συνδέεται με την κατηγορία των τοπολογικών χώρων.

4.1 Kan νηματώσεις

4.1.1 Ορισμός. Στην κατηγορία **SSet** θεωρούμε τα εξής σύνολα:

• $\Delta_i^n, 0 \leq i \leq n$, είναι εκείνο το υπομονόπλοκο σύνολο του Δ^n, για το οποίο ισχύει: $\Delta_i^n(n-1) = \{n-1 \to n\} - \{\delta_i : n-1 \to n\}$
και

• $\Lambda_k^n = \bigcup_{i \neq k} \Delta_i^n$

4.1.2 Ορισμός. Αν M, N είναι δύο μονόπλοκα σύνολα, τότε ένας μορφισμός $p : M \to N$ καλείται **Kan νημάτωση**, αν έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης σε σχέση με κάθε εμφύτευση $i_k^n : \Lambda_k^n \hookrightarrow \Delta^n$, $n > 0$, $0 \leq k \leq n$. Δηλαδή για κάθε αντιμεταθετικό τετράγωνο

$$\begin{tikzcd} \Lambda_k^n \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i_k^n"'] & M \arrow[d, "p"] \\ \Delta^n \arrow[r, "v"'] & N \end{tikzcd}$$

υπάρχει μοναδική $h : \Delta^n \to M$, έτσι ώστε τα δύο τρίγωνα που σχηματίζονται να είναι αντιμεταθετικά.

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_k \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i^n_k"'] & M \arrow[d, "p"] \\ \Delta^n \arrow[r, "v"'] \arrow[ur, dotted, "h"] & N \end{tikzcd}$$

Παρατήρηση: Αν $N = \Delta^0$, τότε επειδή το Δ^0 είναι τελικό αντικείμενο στην **SSet**, έχουμε ότι ο (μοναδικός) μορφισμός $p : M \to \Delta^0$ είναι Kan νημάτωση αν και μόνο αν για κάθε i^n_k, $n > 0$, $0 \leq k \leq n$ και για κάθε μορφισμό $g : \Lambda^n_k \to M$ υπάρχει ένας μορφισμός $h : \Delta^n \to M$ έτσι ώστε το παρακάτω τρίγωνο να γίνεται αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_k \arrow[rr, "i^n_k"] \arrow[dr, "g"'] & & \Delta^n \arrow[dl, dotted, "h"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

(Το άλλο τρίγωνο που έχουμε στον ορισμό είναι τετριμένα αντιμεταθετικό, γιατί το Δ^0 είναι τελικό αντικείμενο). Τέτοια μονόπλοκα σύνολα (για τα οποία ο μοναδικός μορφισμός προς το τελικό αντικείμενο είναι Kan νημάτωση) καλούνται **συμπλέγματα Kan (Kan complexes)**.

4.1.3 Ορισμός. Ένας μορφισμός $f : A \to B$ μεταξύ μονόπλοκων συνόλων καλείται **ανώδυνη επέκταση (anodyne extension)**, αν έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης σε σχέση με κάθε Kan νημάτωση, δηλαδή αν $p : M \to N$ είναι Kan νημάτωση και το παρακάτω διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "v"'] & N, \end{tikzcd}$$

τότε υπάρχει $h : B \to M$ έτσι ώστε τα δύο τρίγωνα που σχηματίζονται να είναι αντιμεταθετικά.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[d, "p"'] \\ B \arrow[r, "v"] \arrow[ur, dotted, "h"] & N \end{tikzcd}$$

4.1.4 Ορισμός. Ένας μορφισμός $f \in (\mathbf{SSet})_1$ καλείται **ασθενής ομοτοπική ισοδυναμία** αν η γεωμετρική πραγματοποιησή του, $|f| \in \mathbf{K}$ είναι ομοτοπική ισοδυναμία.

Οι Kan νηματώσεις είναι οι μορφισμοί που θα παίξουν το ρολο των νηματώσεων και οι ανώδυνες επεκτάσεις των ακυκλικών συννηματώσεων για την δομή κατηγορίας μοντέλο που θέλουμε για την **SSet**.

4.2 Προσιτές κατηγορίες

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε κάποια στοιχεία για τις προσιτές κατηγορίες καθώς και ένα θεώρημα που οφείλεται στον J. Rosický [R] και αποτελεί γενίκευση ενός κλασικού επιχειρήματος στην ομοτοπική θεωρία, το οποίο φέρει το όνομα "small object argument". Στο αποτέλεσμα αυτό θα βασιστούμε για να δείξουμε ότι η κατηγορία **SSet** είναι κατηγορία μοντέλο.

4.2.1 Ορισμός. Ένα αντικείμενο K μίας κατηγορίας $\mathcal{K}$ καλείται **λ-παρουσιάσιμο**, όπου λ ένας κανονικός πληθάριθμος, αν ο hom-συναρτητής $hom_{\mathcal{K}}(K,-)$ διατηρεί λ-κατευθυνόμενα συνόρια.

4.2.2 Ορισμός. Μία κατηγορία $\mathcal{K}$ καλείται **λ-προσιτή** αν:

1) $\mathcal{K}$ έχει λ-κατευθυνόμενα συνόρια,

2) Στην $\mathcal{K}$ υπάρχει ένα σύνολο $\mathcal{A}$ που αποτελείται από λ-παρουσιάσιμα αντικείμενα, έτσι ώστε κάθε αντικείμενο της $\mathcal{K}$ να είναι ένα λ-κατευθυνόμενο συνόριο αντικειμένων του $\mathcal{A}$.

Αν επιπλέον η κατηγορία $\mathcal{K}$ είναι συν-πλήρης, τότε θα λέμε ότι η $\mathcal{K}$ είναι **τοπικά λ-παρουσιάσιμη**.

Μία κατηγορία $\mathcal{K}$ θα λέγεται **προσιτή** αν είναι λ-προσιτή για κάποιο κανονικό πληθάριθμο λ, και θα λέγεται **τοπικά παρουσιάσιμη** αν είναι τοπικά λ-παρουσιάσιμη για κάποιο κανονικό πληθάριθμο λ.

Παραδείγματα 1) Η κατηγορία **SSet** είναι $\aleph_0$-προσιτή. Το σύνολο $\mathcal{A}$ περιέχει αντικείμενα που είναι πεπερασμένα συνόρια από μονόπλοκα σύνολα της μορφής $\Delta^n, n \geq 0$ (δες [AR]).

2) Η κατηγορία **SSet** $\downarrow N$, όπου το N είναι ένα μονόπλοκο σύνολο είναι $\aleph_0$-προσιτή. Το σύνολο $\mathcal{A}$ περιέχει μορφισμούς $f : A \to N$, όπου A είναι $\aleph_0$-παρουσιάσιμο αντικείμενο στην **SSet**.

Και οι δύο παραπάνω κατηγορίες **SSet** και **SSet** $\downarrow N$ είναι συν-πλήρεις κατηγορίες.

4.2.3 Ορισμός. Αν $\mathcal{H}$ είναι μία κλάση μορφισμών μίας κατηγορίας θεωρούμε τα εξής σύνολα:

$\mathcal{H}^{\Box} = \{g | g$ έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης σε σχέση με κάθε $f \in \mathcal{H}\}$.

${}^{\Box}\mathcal{H} = \{f | f$ έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης σε σχέση με κάθε $g \in \mathcal{H}\}$.

4.2.4 Ορισμός. Έστω $\mathcal{H}$ μία οποιαδήποτε κλάση μορφισμών σε μία συνπλήρη κατηγορία $\mathcal{K}$. Η κλάση $\mathcal{H}$ θα λέγεται **κορεσμένη (saturated)** αν:

1) Αν το παρακάτω αντιμεταθετικό τετράγωνο:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \xrightarrow[\xi]{} & Y', \end{array}$$

είναι διάγραμμα εξώθησης και η ανήκει στην $\mathcal{H}$, τότε και ξ ανήκει στην $\mathcal{H}$.

2) Αν $f : A \to B$ και $g : B \to C$ είναι δύο μορφισμοί που ανήκουν στην $\mathcal{H}$, τότε και η σύνθεση τους $g \circ f : A \to C$ ανήκει στην $\mathcal{H}$.

3) Αν

$$A_1 \xrightarrow{\alpha_{1,2}} A_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_i \xrightarrow{\alpha_{i,i+1}} A_{i+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow colim_{i\in I} A_i$$

είναι ένα κατευθυνόμενο συνόριο στην $\mathcal{C}$ και για κάθε i οι μορφισμοί $\alpha_{i,i+1}$ ανήκουν στην $\mathcal{H}$, τότε και ο μορφισμός κάθε αντικειμένου A_i προς το συνόριο $A_i \to colim_{i\in I} A_i$, ανήκει και αυτός στην $\mathcal{H}$.

4.2.5 Πρόταση. *Αν οι κλάσεις $\mathcal{H}_i, i \in I$ είναι κορεσμένες τότε και η κλάση $\bigcap_{i\in I} \mathcal{H}_i$ είναι.*

4.2.6 Πόρισμα. *Για κάθε σύνολο μορφισμών $\mathcal{H}$ υπάρχει ένα ελάχιστο σύνολο μορφισμών $\bar{\mathcal{H}}$ (ο κορεσμός του $\mathcal{H}$) που είναι κορεσμένο και $\mathcal{H} \subseteq \bar{\mathcal{H}}$*

Παρατήρηση: Ο κορεσμός $\bar{\mathcal{H}}$ του $\mathcal{H}$ είναι το σύνολο: $\bigcup_\alpha \mathcal{H}_\alpha$, α διατακτικός, όπου $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$ και $\mathcal{H}_{\alpha+1}$ είναι το σύνολο $\mathcal{H}_\alpha$ μαζί με:

1) Το σύνολο των μορφισμών $\xi : X' \to Y'$, όπου $\xi : X' \to Y'$ είναι μορφισμός σε διάγραμμα εξώθησης

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta} & Y\ , \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \xrightarrow[\xi]{} & Y', \end{array}$$

με $\eta \in \mathcal{H}_\alpha$.

2) Το σύνολο των μορφισμών $g \circ f : A \to C$, όπου $f : A \to B$ και $g : B \to C$ ανήκουν στο $\mathcal{H}_\alpha$.

3) Το σύνολο των μορφισμών $\alpha_i : A_i \to colim_{i\in I} A_i$, όπου

$$A_1 \xrightarrow{\alpha_{1,2}} A_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_i \xrightarrow{\alpha_{i,i+1}} A_{i+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow colim_{i\in I} A_i$$

είναι κατευθυνόμενο συνόριο και οι μορφισμοί $\alpha_{i,i+1} : A_i \to A_{i+1}$ ανήκουν στο $\mathcal{H}_\alpha$.

Τέλος αν λ είναι οριακός διατακτικός, τότε $\mathcal{H}_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathcal{H}_\alpha$. Αν η $\mathcal{K}$ είναι τοπικά παρουσιάσιμη και η κλάση $\mathcal{H}$ είναι σύνολο, τότε η παραπάνω επαναληπτική διαδικασία τερματίζει (δηλαδή, υπάρχει ένας διατακτικός β τέτοιος ώστε $\mathcal{H}_{\beta+1} = \mathcal{H}_\beta$). Ειδικότερα αυτό συμβαίνει όταν οι μορφισμοί της $\mathcal{H}$ έχουν πεδίο και συν-πεδίο που ανήκουν στο σύνολο των (λ-παρουσιάσιμων, για κάποιο λ) γεννητόρων της $\mathcal{K}$.

4.2.7 Πρόταση. *Για οποιοδήποτε σύνολο μορφισμών $\mathcal{H}$, ισχύει ότι:*

$$\bar{\mathcal{H}} \subseteq \Box(\mathcal{H}^\Box)$$

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει με (υπερπεπερασμένη) επαγωγή. Προφανώς $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H} \subseteq \Box(\mathcal{H}^\Box)$. Στην συνέχεια δείχνουμε ότι αν $f \in \mathcal{H}_{\alpha+1}$ και $\mathcal{H}_\alpha \subseteq \Box(\mathcal{H}^\Box)$, τότε $f \in \Box(\mathcal{H}^\Box)$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:
Περίπτωση 1: f είναι εξώθηση ενός $h \in \mathcal{H}_\alpha$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d] & Y , \arrow[d] \\ X' \arrow[r, "f"] & Y', \end{tikzcd}$$

Περίπτωση 2: $f = g \circ h$, όπου g και h μορφισμοί στο $\mathcal{H}_\alpha$.
Περίπτωση 3: $f : A_i \to colim_{i\in I} A_i$, όπου

$$A_1 \xrightarrow{\alpha_{1,2}} A_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_i \xrightarrow{\alpha_{i,i+1}} A_{i+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow colim_{i\in I} A_i$$

είναι κατευθυνόμενο συνορίο και οι μορφισμοί $\alpha_{i,i+1} : A_i \to A_{i+1}$ ανήκουν στην $\mathcal{H}_\alpha$.

Αποδεικνύουμε την περίπτωση 1) και οι άλλες δύο αποδεικνύονται παρόμοια.
Έστω λοιπόν ότι ο f είναι εξώθηση ενός $h \in \mathcal{H}_\alpha$, συνεπώς από την υπόθεση της επαγωγής $h \in \Box(\mathcal{H}^\Box)$. Δείχνουμε ότι $f \in \Box(\mathcal{H}^\Box)$.
Έστω λοιπόν $g \in \mathcal{H}^\Box$. Θεωρούμε το παρακάτω αντιμεταθετικό τετράγωνο.

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\lambda_2"'] & Y' \arrow[d, "k_2"] \\ X'' \arrow[r, "g"'] & Y'' \end{tikzcd}$$

Αναζητούμε ένα μορφισμό $\varphi : Y' \to X''$, έτσι ώστε $g \circ \varphi = k_2$ και $\varphi \circ f = \lambda_2$. Θεωρούμε το παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\lambda_1"'] & Y \arrow[d, "k_1"] \arrow[ddl, dotted] \\
X' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\lambda_2"'] & Y' \arrow[d, "k_2"] \\
X'' \arrow[r, "g"'] & Y''
\end{tikzcd}$$

Το εξωτερικό τετράγωνο είναι αντιμεταθετικό (αφού τα δύο εσωτερικά είναι), οπότε αφού $h \in \Box(\mathcal{H}^{\Box})$ και $g \in \mathcal{H}^{\Box}$, θα υπάρχει ένας μορφισμός $k : Y \to X''$, έτσι ώστε $k \circ h = \lambda_2 \circ \lambda_1$ και $g \circ k = k_2 \circ k_1$.
Αφού $k \circ h = \lambda_2 \circ \lambda_1 : X \to X''$, χρησιμοποιώντας της καθολική ιδιότητα της εξώθησης, θα υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\varphi : Y' \to X''$, έτσι ώστε $\varphi \circ k_1 = k$ και $\varphi \circ f = \lambda_2$. Μένει να δείξουμε ότι: $g \circ \varphi = k_2$.
Επειδή τώρα, $g \circ k \circ h = g \circ \lambda_2 \circ \lambda_1 : X \to Y''$ (γιατί $k \circ h = \lambda_2 \circ \lambda_1$), πάλι από την καθολική ιδιότητα της εξώθησης, θα υπάρχει μοναδικός μορφισμός: $y : Y' \to Y''$, έτσι ώστε $y \circ k_1 = g \circ k$ και $y \circ f = g \circ \lambda_2$. Όμως οι μορφισμοί k_2, $g \circ \phi$ πληρούν αυτές τις προυποθέσεις, άρα λόγω της μοναδικότητας έχουμε ότι: $g \circ \varphi = k_2$.

Ομοίως, αν ο λ είναι οριακός διατακτικός και για κάθε $\alpha < \lambda$ έχουμε ότι $\mathcal{H}_\alpha \subseteq \Box(\mathcal{H}^{\Box})$, αποδεικνύεται ότι αν $f \in \mathcal{H}_\lambda$, τότε θα είναι και $f \in \Box(\mathcal{H}^{\Box})$.

4.2.8 Ορισμός. Έστω $\mathcal{H}$ μία κλάση μορφισμών σε μία κατηγορία $\mathcal{C}$. Ένα αντικείμενο M της $\mathcal{C}$ καλείται **$\mathcal{H}$-ενριπτικό**, αν για κάθε μορφισμό $f : A \to B$ στην $\mathcal{H}$ και κάθε μορφισμό $g : A \to M$, υπάρχει ένας μορφισμός $h : B \to M$ έτσι ώστε $hf = g$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & B \arrow[dl, dotted, "h"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

Παραδείγματα: 1) Τα συμπλέγματα Kan είναι $\mathcal{H}$-ενριπτικά αντικείμενα στην **SSet**, αν ως $\mathcal{H}$ θεωρήσουμε το σύνολο των ανώδυνων επεκτάσεων.
Παρατήρηση: Αν θεωρήσουμε ως $\mathcal{H}$ τις εμφυτεύσεις $i_k^n : \Lambda_k^n \hookrightarrow \Delta^n$, τότε πάλι τα συμπλέγματα Kan αποτελούν τα $\mathcal{H}$-ενριπτικά αντικείμενα για την κλάση $\mathcal{H}$.

2) Έστω N ένα μονόπλοκο σύνολο. Τότε οι Kan νηματώσεις (με συν-πεδίο το N) είναι $\mathcal{H}$-ενριπτικά αντικείμενα στην **SSet** $\downarrow N$ και η $\mathcal{H}$ αποτελείται από

μορφισμούς $f : (A,\alpha) \to (B,\beta)$, όπου $f : A \to B$ είναι ανώδυνη επέκταση. Πράγματι, έστω

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & B \arrow[dl, "\beta"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

ένας μορφισμός στην $\mathcal{H}$. Αν τώρα, $p : M \to N$ είναι Kan νημάτωση και $g : (A,\alpha) \to (M,p)$, τότε το παρακάτω τετράγωνο είναι αντιμεταθετικό (γιατί τα δύο εσωτερικά τρίγωνα είναι αντιμεταθετικά).

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "\alpha"] & M \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & N \end{tikzcd}$$

Από τον ορισμό 4.1.3 έχουμε ότι υπάρχει $h : (B,\beta) \to (M,p)$, τέτοια ώστε $hf = g$.

4.2.9 Θεώρημα. *Έστω $\mathcal{K}$ μία τοπικά παρουσιάσιμη κατηγορία και $\mathcal{H}$ ένα σύνολο μορφισμών στην $\mathcal{K}$. Τότε για κάθε αντικείμενο K στην $\mathcal{K}$, υπάρχει ένας μορφισμός $K \to M$, όπου το M είναι ένα $\mathcal{H}$-ενριπτικό αντικείμενο.*

Απόδειξη: Αφού η $\mathcal{K}$ είναι προσιτή θα υπάρχει ένας κανονικός πληθάριθμος λ, έτσι ώστε η $\mathcal{K}$ να είναι λ-προσιτή και κάθε μορφισμός στην $\mathcal{H}$, να έχει λ-παρουσιάσιμο πεδίο (δες [AR]).
Έστω K ένα αντικείμενο της $\mathcal{K}$ και $\mathcal{X}_K$ το σύνολο όλων των διαγραμμάτων της μορφής:

$$\begin{tikzcd} K & \\ C \arrow[u, "u"] \arrow[r, "g"] & D \end{tikzcd} \qquad (*)$$

με $g \in \mathcal{H}$.
Παραμετρικοποιούμε αυτά τα διαγράμματα με διατακτικούς $i < \mu_K = card\mathcal{X}_K$. Ορίζουμε μία αλυσίδα $k_{ij} : K_i \to K_j$ με την ακόλουθη διαδικασία υπερπεπερασμένης επαγωγής:

<u>Βήμα πρώτο:</u> $K_0 = K$.

<u>Στους επόμενους διατακτικούς:</u> K_{i+1} δίνεται από το παρακάτω διάγραμμα εξώθησης:

$$\begin{tikzcd} K_i \arrow[r, "k_{i,i+1}"] & K_{i+1} \\ C_i \arrow[u, "k_{0i}\cdot u_i"] \arrow[r, "g_i"'] & D_i \arrow[u] \end{tikzcd}$$

όπου $k_{0,i+1} = k_{i,i+1} \cdot k_{0i}$.

Στους οριακούς διατακτικούς: Αν i είναι ένας οριακός διατακτικός τότε K_i είναι το (κατευθυνόμενο) συνόριο του διαγράμματος:

$$K_0 \xrightarrow{k_{01}} K_1 \xrightarrow{k_{12}} \cdots \qquad K_j \xrightarrow{k_{j,j+1}} \cdots \quad (**)$$

όπου $j < i$ και $k_{0i} : K_0 \to K_i$ ο μορφισμός του K_0 προς το συνόριο.

Το αντικείμενο K_{μ_K} θα το συμβολίζουμε με K^* και τον μορφισμό $k_{0\mu_K} : K \to K^*$ με t_K. Από την κατασκευή έχουμε ότι για κάθε $(u_i, g_i) \in \mathcal{X}_K$, το παρακάτω διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "t_K"] & K^* \\ C_i \arrow[u, "u_i"] \arrow[r, "g_i"] & D_i \arrow[u] \end{tikzcd}.$$

Τώρα ορίζουμε μία αλυσίδα $m_{i,k} : M_i \to M_j$, $i \leq k \leq \lambda$ χρησιμοποιώντας και πάλι υπερπεπερασμένη επαγωγή:

Βήμα πρώτο: $M_0 = K$.

Στους επόμενους διατακτικούς: $m_{i,i+1} : M_i \to M_{i+1}$ είναι ο μορφισμός $t_{M_i} : M_i \to M_i^*$ (δηλαδή $M_1 = K^*$, $M_2 = (K^*)^*$ κ.ο.κ).

Στους οριακούς διατακτικούς: Αν i είναι ένας οριακός διατακτικός τότε M_i είναι το (κατευθυνόμενο) συνόριο του διαγράμματος:

$$M_0 \xrightarrow{m_{01}} M_1 \xrightarrow{m_{12}} \cdots \qquad M_j \xrightarrow{m_{j,j+1}} \cdots \quad (1)$$

όπου $j < i < \lambda$ και M_λ είναι το (κατευθυνόμενο) συνόριο του διαγράμματος (1) για $i = \lambda$.

Θα δείξουμε ότι $m_{0\lambda} : K \to M_\lambda$ είναι ο ζητούμενος μορφισμός (δηλαδή το M_λ είναι $\mathcal{H}$-ενριπτικό αντικείμενο).

Θεωρούμε ένα διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} M_\lambda & \\ C \arrow[u, "u"] \arrow[r, "g"] & D \end{tikzcd}$$

με $g \in \mathcal{H}$.
Αφού το αντικείμενο C είναι λ-παρουσιάσιμο και M_λ είναι το κατευθυνόμενο συνόριο των M_i , $i < \lambda$ ο μορφισμός u παραγοντοποιείται ως :

$$\begin{tikzcd} M_\lambda & \\ C \arrow[u, "u"] \arrow[r, "u'"'] & M_i \arrow[ul, "m_{i\lambda}"'] \end{tikzcd}$$

Επιπλέον αφού το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} M_i & \\ C \arrow[u, "u'"'] \arrow[r, "g"] & D \end{tikzcd}$$

ανήκει στο σύνολο $\mathcal{X}_{M_i}$, το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "m_{i,i+1}"] & M_{i+1} \\ C \arrow[u, "u'"'] \arrow[r, "g"] & D \arrow[u, "v"] \end{tikzcd}$$

είναι αντιμεταθετικό, και επιπλέον (λόγω ότι $M_\lambda = colim_{i<\lambda} M_i$) το παρακάτω τρίγωνο είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd} M_\lambda & \\ M_i \arrow[u, "m_{i,\lambda}"] \arrow[r, "m_{i,i+1}"'] & M_{i+1} \arrow[ul, "m_{i+1,\lambda}"'] \end{tikzcd}$$

Έχουμε:
$u = m_{i\lambda} \cdot u' = m_{i+1,\lambda} \cdot m_{i,i+1} \cdot u' = m_{i+1,\lambda} \cdot v \cdot g.$
Άρα ο u παραγοντοποιείται μέσω της g, συνεπώς M_λ είναι $\mathcal{H}$-ενριπτικό αντικείμενο. $\square$

Παρατήρηση: Το παραπάνω θεώρημα διατυπώνεται και αποδεικνύεται στην εργασία [R], σε μία γενικότερη μορφή στην οποία δεν απαιτείται η ύπαρξη όλων των συνορίων. Αρκεί η κατηγορία $\mathcal{K}$ να είναι προσιτή και αντί της ύπαρξης εξωθήσεων, αρκεί τα διαγράμματα (*) να συμπληρώνονται σε αντιμεταθετικά τετράγωνα και οι αλυσίδες (**) να έχουν "φράγμα", δηλαδή σε κάθε τέτοια αλυσίδα να υπάρχει ένα αντικείμενο K^* το οποίο να αποτελεί κώνο του διαγράμματος.

Εφαρμογές

1) Η κατηγορία **SSet** είναι $\aleph_0$-προσιτή και έχει όλα τα συνόρια. Αν $\mathcal{H}$ είναι το σύνολο των εμφυτεύσεων $\Lambda_k^n \hookrightarrow \Delta^n, 0 \leq k \leq n$, τότε, επειδή όπως είδαμε τα συμπλέγματα Kan είναι $\mathcal{H}$-ενριπτικά αντικείμενα, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα (4.2.9) έχουμε ότι για κάθε μονόπλοκο σύνολο A υπάρχει ένας μορφισμός $m : A \to M$ όπου M είναι ένα σύμπλεγμα Kan. Επειδή η **SSet** έχει όλα τα συνόρια σύμφωνα με την απόδειξη του θεωρήματος έχουμε ότι $m \in \bar{\mathcal{H}}$, άρα από την πρόταση 4.2.7 έχουμε: $m \in \Box(\mathcal{H}^\Box)$ (*). Αν ερμηνεύσουμε την (*) έχουμε: $m \in \Box(\mathcal{H}^\Box)$ δηλαδή ο m έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης σε σχέση με κάθε $g \in \mathcal{H}^\Box$. Όμως $g \in \mathcal{H}^\Box$, δηλαδή g έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης σε σχέση με κάθε $f \in \mathcal{H}$, δηλαδή g είναι Kan νημάτωση. Άρα ο m έχει την ιδιότητα της αριστερής ανύψωσης σε σχέση με κάθε Kan νημάτωση, **δηλαδή m είναι ανώδυνη επέκταση**.

2)Αν εργαστούμε τώρα στην κατηγορία **SSet** $\downarrow N$ όπου το σύνολο $\mathcal{H}$ περιέχει τους μορφισμούς

$$(\Lambda_k^n, \alpha) \xrightarrow{i_k^n} (\Delta^n, b)$$

Εφαρμόζοντας πάλι το θεώρημα 4.2.9 έχουμε ότι αν

$$A \xrightarrow{f} N \in (\mathbf{SSet} \downarrow N)_0$$

τότε υπάρχει ένα αντικείμενο $B \xrightarrow{p} N$ και ένας μορφισμός $(A, f) \xrightarrow{m} (B, p)$ όπου $B \xrightarrow{p} N$ είναι $\mathcal{H}$-ενριπτικό δηλαδή p είναι Kan νημάτωση,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, "p"] \\ N & \end{tikzcd}$$

και σύμφωνα με την εφαρμογή 1 η m είναι ανώδυνη επέκταση.

Δείξαμε λοιπόν ότι, **κάθε μορφισμός $f : A \to N$ στην κατηγορία SSet δέχεται μία παραγοντοποίηση**

$$A \xrightarrow{m} B \xrightarrow{p} N$$

όπου m είναι ανώδυνη επέκταση και p είναι Kan νημάτωση (KM5 ii)).

Αν τώρα ως σύνολο μορφισμών $\mathcal{H}$ στην κατηγορία **SSet**, θεωρήσουμε το σύνολο των μονομορφισμών της **SSet**, τότε έχουμε ότι: $\bar{\mathcal{H}} = \mathcal{H}$. Αν εφαρμόσουμε το θεώρημα 4.2.9 στην κατηγορία **SSet**, με $\mathcal{H}$ το παραπάνω σύνολο, τότε για κάθε μονόπλοκο σύνολο A υπάρχει ένας μορφισμός $m : A \to M$, όπου M είναι ένα $\mathcal{H}$-ενριπτικό αντικείμενο. Επιπλέον $m \in \bar{\mathcal{H}} = \mathcal{H}$, άρα ο m είναι μονομορφισμός.

Αν εργαστούμε τώρα στην κατηγορία $\mathbf{SSet} \downarrow N$ όπου το σύνολο $\mathcal{H}$ περιέχει τους μονομορφισμούς $A \rightarrowtail N$, τότε τα $\mathcal{H}$-ενριπτικά αντικείμενα σε αυτή την κατηγορία είναι οι μορφισμοί $A \to N$, και αυτοί είναι οποσδήποτε Kan νηματώσεις.

Πράγματι, έστω $f : (A, a) \to (B, b)$ ένας μορφισμός στην $\mathbf{SSet} \downarrow N$, (M, p) ένα $\mathcal{H}$-ενριπτικό αντικείμενο και $g : (A, a) \to (M, p)$, τότε αφού το παρακάτω τετράγωνο είναι αντιμεταθετικό (γιατί τα δύο εσωτερικά τρίγωνα είναι αντιμεταθετικά)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "a"] & M \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "b"'] & N \end{tikzcd}$$

και το (M, p) είναι $\mathcal{H}$-ενριπτικό αντικείμενο, θα υπάρχει μορφισμός $h : (B, b) \to (M, p)$, έτσι ώστε τα δύο εσωτερικά τρίγωνα που σχηματίζονται να είναι αντιμεταθετικά

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] \arrow[ur, dotted, "h"] & N \end{tikzcd}$$

Συνεπώς ο μορφισμός $p : M \to N$ έχει την ιδιότητα της δεξιάς ανύψωσης σε σχέση με κάθε μονομορφισμό, και ειδικότερα σε σχέση με τις εμφυτεύσεις $\Lambda^n_k \hookrightarrow \Delta^n$, δηλαδή (ορισμός 4.1.2) είναι Kan νημάτωση.
Αποδεινύεται (δες [Ho] 3.2.5, 3.2.6), χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο συναρτητητής γεωμετρική πραγματοποίηση $| - | : \mathbf{SSet} \to \mathbf{K}$ διατηρεί πεπερασμένα όρια, ότι **τα $\mathcal{H}$-ενριπτικά αντικείμενα είναι οι μορφισμοί που είναι Kan νηματώσεις και ασθενείς ομοτοπικές ισοδυναμίες.**

Παρατήρηση: Στις παραπάνω περιπτώσεις, επειδή $\lambda = \aleph_0$, τότε το $M_\lambda = M$ είναι αριθμήσιμο συνόριο $\aleph_0$-παρουσιάσιμων, άρα είναι $\aleph_1$-παρουσιάσιμο.

4.3 Παραδείγματα Κατηγοριών Μοντέλο

Με τα όσα έχουν ειπώθει μέχρι τώρα έχουμε ότι η κατηγορία **SSet** επιδέχεται δομή κατηγορίας μοντέλο στην οποία

i) Ένας μορφισμός είναι ασθενής ισοδυναμία αν είναι ασθενής ομοτοπική ισοδυναμία.

ii)Ένας μορφισμός είναι νημάτωση αν είναι Kan νημάτωση.

iii) Ένας μορφισμός είναι συννημάτωση αν είναι μονομορφισμός.

Παρατήρηση: Παρατηρούμε ότι η δομή κατηγορίας μοντέλο που ορίστηκε για τα μονόπλοκα σύνολα είναι συνδεδεμένη με την κατηγορία των Kelley χώρων, αφού οι ασθενείς ισοδυναμίες εχουν οριστεί (ορισμός 4.1.4) με την βοήθεια του συναρτητή γεωμετρική πραγματοποίηση.

Η κατηγορία **K** των Kelley χώρων επιδέχεται και αυτή δομή κατηγορίας μοντέλο ως εξής:

i) Ένας μορφισμός (συνεχής συνάρτηση) είναι ασθενής ισοδυναμία αν η συνάρτηση $\pi_n(f,x) : \pi_n(X,x) \to \pi_n(Y, f(x))$ είναι ισομορφισμός για όλα τα $n \geq 0$ και όλα τα $x \in X$ (δηλαδή ισομορφισμός συνόλων αν $n = 0$ και ισομορφισμός ομάδων αν $n \geq 1$).

ii)Ένας μορφισμός είναι νημάτωση αν είναι Serre νημάτωση.

iii) Ένας μορφισμός είναι συννημάτωση αν έχει την LLP σε σχέση με τους μορφισμούς που είναι ασθενείς ισοδυναμίες και Serre νηματώσεις.

Παρατήρηση: Οι ασθενείς ισοδυναμίες όπως ορίστηκαν παραπάνω αναφέρονται στην αλγεβρική τοπολογία ως ασθενείς ομοτοπικές ισοδυναμίες.

Στην εργασία αυτή δεν θα δώσουμε αναλυτική απόδειξη του γεγονότος ότι η **K** έχει την δομή κατηγορίας μοντέλο.

Στην παράγραφο 3.5 είδαμε ότι οι κατηγορίες **SSet** και **K** συνδέονται με ένα ζεύγος προσαρτημένων συναρτητών (την γεωμετρική πραγματοποίηση και τον ιδιάζοντα συναρτητή). Αποδεικνύεται ότι το ζευγάρι αυτό είναι ένα ζεύγος Quillen ισοδυναμιών, οπότε από το θεώρημα 2.10.6 έχουμε το εξής βασικό αποτέλεσμα:

4.3.1 Θεώρημα. *Οι κατηγορίες $Ho(\mathbf{SSet})$ και $Ho(\mathbf{K})$ είναι ισοδύναμες.*

Παρατηρήσεις: 1) Την ίδια δομή μπορεί να έχει και η ευρύτερη κατηγορία **Top**. Σε αυτή την κατηγορία μοντέλο όλα τα αντικείμενα είναι ινώδη και τα συνινώδη είναι τα CW-complexes. Επιπλέον η **K** ως κατηγορία μοντέλο είναι Quillen ισοδύναμη με την **Top** ως κατηγορία μοντέλο.

2) Αν εφαρμόσουμε την πρόταση 2.4.2 σε αυτή την κατηγορία μοντέλο, έχουμε ως συνέπεια το θεώρημα του Whitehead, δηλαδή ότι κάθε ασθενής ομοτοπική ισοδυναμία μεταξύ CW-complexes είναι ομοτοπική ισοδυναμία.

4.4 Επιπλέον Παραδείγματα

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε μερικές ακόμα κατηγορίες που επιδέχονται δομή κατηγορίας μοντέλο.

Τοπολογικοί χώροι: Στην κατηγορία των τοπολογικών χώρων ορίζεται και μία άλλη δομή κατηγορίας μοντέλο (δες [S]), στην οποία οι ασθενείς ισοδυναμίες είναι οι ομοτοπικές ισοδυναμίες.

4.4.1 Ορισμός. 1) Μία συνεχής συνάρτηση $p : E \to B$ μεταξύ τοπολογικών χώρων καλείται Hurewicz νημάτωση, αν για κάθε αντιμεταθετικό τετράγωνο συνεχών συναρτήσεων της μορφής:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "H"] & B \end{tikzcd}$$

υπάρχει ανύψωση $\widehat{H} : Y \times I \to E$, έτσι ώστε $\widehat{H} i_0 = h$ και $p\widehat{H} = H$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dotted, "\widehat{H}"] & B \end{tikzcd}$$

2) Αν X είναι ένας τοπολογικός χώρος και A κλειστός υπόχωρος αυτού, τότε η εμφύτευση $i : A \hookrightarrow X$ καλείται (κλειστή) Hurewicz συννημάτωση αν για κάθε αντιμεταθετικό τετράγωνο συνεχών συναρτήσεων της μορφής:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "K"] \arrow[d, "i"'] & Y^I \arrow[d, "p_0"] \\ X \arrow[r, "k"] & Y \end{tikzcd}$$

υπάρχει συνεχής συνάρτηση $\widehat{K} : X \to Y^I$, έτσι ώστε $\widehat{K} i = K$ και $p_0 \widehat{K} = k$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "K"] \arrow[d, "i"'] & Y^I \arrow[d, "p_0"] \\ X \arrow[r, "k"] \arrow[ur, dotted, "\widehat{K}"] & Y \end{tikzcd}$$

Στο παραπάνω ορισμό, με I συμβολίζουμε το κλειστό διάστημα $[0,1]$, $i_0 : Y \to Y \times I$ τη συνάρτηση με τύπο $i_0(y) = (y,0)$ και $p_0 : Y^I \to Y$ τη συνάρτηση με τύπο $p_0(f) = f(0)$.

Διατυπώνουμε τώρα το ακόλουθο θεώρημα:

4.4.2 Θεώρημα. *Η κατηγορία* **Top** *των τοπολογικών χώρων δέχεται δομή κατηγορίας μοντέλο, στην οποία:*
Ασθενείς ισοδυναμίες είναι οι ομοτοπικές ισοδυναμίες.
Νηματώσεις είναι οι Hurewicz νηματώσεις.
Συννηματώσεις είναι οι (κλειστές) Hurewicz συννηματώσεις.

Παρατήρησεις: 1) Στην κατηγορία αυτή όλα τα αντικείμενα είναι ινώδη και συνινώδη, και για αυτό το λόγο οι σχέσεις της αριστερής και της δεξιάς ομοτοπίας είναι σχέσεις ισοδυναμίας και επιπλέον συμπίπτουν (δες 2.4.1).

2) Η ομοτοπική κατηγορία της **Top** ως προς την δομή κατηγορίας μοντέλο του θεωρημάτος 4.4.2 είναι ισοδύναμη με την ομοτοπική κατηγορία της **Top** σε σχέση με την δομή κατηγορίας μοντέλο που ορίστηκε στην **Top** στην προηγούμενη παράγραφο.

3) Οι ομοτοπικές ισοδυναμίες είναι και ασθενείς ομοτοπικές ισοδυναμίες.

Αλυσωτά συμπλέγματα: Αν R είναι ένας μοναδιαίος αντιμεταθετικός δακτύλιος τότε δομή κατηγορίας μοντέλο έχουμε και στην κατηγορία $\mathbf{Ch}_R$ των αλυσωτών συμπλεγμάτων (chain complexes) από R-modules. Η κατηγορία $\mathbf{Ch}_R$ έχει:

αντικείμενα:Ένα αντικείμενο M (δηλαδή ένα αλυσωτό σύμπλεγμα) της κατηγορίας, είναι μία συλλογή $\{M_k\}_{k\geq 0}$ από R-modules, μαζί με (συνοριακές) συναρτήσεις $\vartheta : M_k \to M_{k-1}, k \geq 1$ έτσι ώστε $\vartheta^2 = 0$.

μορφισμούς:Ένας μορφισμός $f : M \to N$ είναι μία συλλογή από R-module ομομορφισμούς $f_k : M_k \to N_k$ έτσι ώστε $f_{k-1}\vartheta = \vartheta f_k$

4.4.3 Ορισμός. Για ένα αντικείμενο M της κατηγορίας $\mathbf{Ch}_R$, το module των κύκλων διάστασης k, C_kM, ορίζεται να είναι M_0 αν $k = 0$ και $ker(\vartheta : M_k \to M_{k-1})$ αν $k \geq 1$ και το module των συνόρων διάστασης k, B_kM, ορίζεται να είναι να είναι η εικόνα $Im(\vartheta : M_{k+1} \to M_k)$. Θεωρούμε επίσης τους συναρτητές $H_k : \mathbf{Ch}_R \to \mathbf{Mod}_R$ (ένα για κάθε $k \geq 0$), με $H_k(M) = C_kM/B_kM$. Ένα αλυσωτό σύμπλεγμα M για το οποίο $H_k(M) = 0$ για κάθε $k \geq 0$, λέγεται ακυκλικό.

Θυμίζουμε ότι ένα R-module P καλείται **προβολικό** αν για κάθε μορφισμό $f : P \to N$ και κάθε επιμορφισμό $g : M \to N$, υπάρχει μορφισμός $h : P \to M$, έτσι ωστε το παρακάτω τρίγωνο να γίνεται αντιμεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "h"'] \arrow[d, "f"] \\ M \arrow[r, "g"] & N \end{tikzcd}$$

Η κατηγορία $\mathbf{Ch}_R$ έχει την δομή κατηγορίας μόντελο, στην οποία ένας μορφισμός $f : M \to N$ είναι:

1) ασθενής ισοδυναμία αν ο μορφισμός f επάγει, για κάθε $k \geq 0$ ισομορφισμους $H_k M \to H_k N$ μεταξύ R-modules.

2) νημάτωση αν για κάθε $k > 0$ η συνάρτηση $f_k : M_k \to N_k$ είναι επιμορφισμός.

3) συννημάτωση αν για κάθε $k \geq 0$ η συνάρτηση $f_k : M_k \to N_k$ είναι μονομορφισμός και ο συν-πυρήνας αυτής είναι ένα προβολικό R-module.

Βιβλιογραφία

[AR] J. Adámek and J. Rosický, *Locally presentable and accesible categories*, Cambridge University Press 1994.

[Du] D. Dugger, Universal homotopy theories, *Advances in Mathematics*, 164, 144-171 (2001)

[DS] W. G. Dwyer and J. Spalinski, Homotopy theories and model categories, *Handbook of Algebraic Topology*, Elsevier Science B.V., 1995.

[DHK] W. G. Dwyer, P. S. Hirschhorn, and D. M. Kan, Model categories and more general abstract homotopy theory, Preprint, διαθέσιμο στην http://www-math.mit.edu/˜psh.

[GZ] P. Gabriel and M. Zisman, *Calculus of fractions and homotopy theory*, Ergenbnisse in Math.and Grenzgebiete 35, Springer-Verlag 1967.

[GJ] P. Goerss F. Jardine, *Simplicial Homotopy Theory*, Birkhauser (2001)

[He] K. Hess, Model Categories in Algebraic Topology, *Appl. Categ. Structures* 10 (2002), no. 3, 195–220

[H] P. H. Hirschhorn, *Model Categories and Their Localizations*, Mathematical Surveys and Monographs, vol 99, Amer. Math. Soc., 2002.

[Ho] M. Hovey, *Model Categories*, Mathematical Surveys and Monographs, vol 63, Amer. Math. Soc., 1999.

[K1] Π. Καραζέρης, Κατηγορίες για άμεση χρήση, διαθέσιμο στην http://www.math.upatras.gr/˜pkarazer/

[K2] P. Karazeris, Flatness and the left exactness of geometric realization, Preprint (διαθέσιμο ως www.maths.gla.ac.uk/ tl/pssl/karazeris.pdf)

[ML] S. MacLane, *Categories for the working mathematician*, Grad. Texts in Math., vol. 5, Springer-Verlag, New York, 1971.

[Q] D. G. Quillen, *Homotopical Algebra*, Lect.Notes in Math., vol. 43. Springer Verlag, Berlin, 1967

[R] J. Rosický, Injectivity and accesible categories, *Cubo Mathematica Educacional*, 4 (2002), 201-211

[S] N. E. Steenrod, A convenient category of topological spaces, *Michigan Math. J.* 14 (1967), 133-152.

[ST] A. Strøm, The homotopy category is a homotopy category, *Arch. Math.* 23 (1972), 435-441