Κώστας Α. ΔΡΟΣΟΣ

Σ Τ Ο Ι Χ Ε Ι Α

Θ Ε Ω Ρ Ι Α Σ   Μ Ο Ν Τ Ε Λ Ω Ν

&

Α Π Ε Ι Ρ Ο Σ Τ Ι Κ Η Σ   Α Ν Α Λ Υ Σ Η Σ

Πάτρα 2003

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΜΟΝΤΕΛΩΝ

1.1 Εισαγωγή

Η εισαγωγή και ανάπτυξη των τυπικών ή φορμαλιστικών γλωσσών (formal languages), είχε σαν κίνητρο τη «δυτική» αντίληψη ότι επιστημονικό είναι μόνον το ακριβές και αυτό που μπορεί να μετρηθεί. Για να αποφευχθούν λοιπόν η ασάφειες και ανακρίβειες της φυσικής γλώσσας εισήχθηκαν και αναπτύχθηκαν οι τυπικές γλώσσες. Υπάρχει όμως και εδώ ένα είδος εντροπίας. 'Οτι κανείς κερδίζει σε ακρίβεια το χάνει σε εκφραστική ικανότητα. Οι φορμαλιστικές γλώσσες εξυπηρέτησαν σε πολύ μεγάλο βαθμό τα απόλυτα ή Καντοριανά μαθηματικά. Τελευταία όμως κάτω από την ένταση και πίεση που δημιουργούνται από την ανάπτυξη της πληροφορικής, και ιδιαίτερα της τεχνητής νοημοσύνης και ρομποτικής, έχουν εισαχθεί και αναπτύσσονται επιστημονικά αντικείμενα όπως η «ασαφής λογική» , και γενικότερα οι «πλειότιμες λογικές» (many-valued logics), καθώς επίσης και οι αντίστοιχες μη-Καντοριανές μαθηματικές θεωρίες. Μια άλλη εξέλιξη που αξίζει να μνημονευθεί είναι η «εκτασιακή σημασιολογία» (denotational semantics), που είναι για τις γλώσσες προγραμματισμού, ότι είναι η Θεωρία Μοντέλων για τη Λογική Πρώτης Τάξης.

Ο πυρήνας των δραστηριοτήτων αυτών περιγράφεται ως ακολούθως: Ξεκινώντας από τις κλασικές μαθηματικές θεωρίες και τις αντίστοιχες δίτιμες λογικές, φθάνουμε στις μη-Καντοριανές θεωρίες και στις πλειότιμες λογικές, αποκαθιστώντας έτσι τουλάχιστον ένα μέρος από την εκφραστική ικανότητα των φυσικών γλωσσών. Με τον τρόπο αυτό ολοκληρώνεται ένας απαραίτητος κύκλος: Με την «ειδετική αναγωγή» και την χρήση του ενεστωτικού απείρου δημιουργούμε τα απόλυτα Καντοριανά-Πλατωνικά μαθηματικά, και στη συνέχεια με αφετηρία αυτά τα καλώς ορισμένα αντικείμενα και με την χρήση του δυναμικού απείρου και της ασάφειας που συνεπάγεται, αναπτύσσουμε διάφορες «όψεις» της φυσικής πραγματικότητας. Αυτές οι διάφορες «όψεις» ή «θεάσεις» μέσα από τις οποίες μπορούμε να αντιληφθούμε την «την απόλυτη πραγματικότητα» αποτελούν στην ουσία τα διάφορα μοντέλα της απόλυτης θεωρίας. Από την άποψη λοιπόν των θεμελίων των εφαρμοσμένων μαθηματικών, για να οριστεί ένα «φυσικό» αντικείμενο, θα πρέπει πρώτα να αναπαρασταθεί στα κλασσικά μαθηματικά και στη συνέχεια να μετασχηματιστεί σε ένα μη - Καντοριανό ανάλογο.

Τα μαθηματικά της πρώτης βιομηχανικής επανάστασης ήταν τα λεγόμενα «Νευτωνιακά μαθηματικά» που βασίζονταν πάνω στο «συνεχές» και το «αφηρημένο», το «ενεστωτικό άπειρο» κλ.π. με κύριο και βασικό προιόν τον Απειροστικό Λογισμό, με τις τεράστιες σε αριθμό εφαρμογές.

Σήμερα τα πράγματα αλλάζουν. Τα Νευτωνιακά μαθηματικά, που στη βάση τους ήταν «ποσοτικά» εμπλουτίζονται και εναρμονίζονται με τα λεγόμενα «ποιοτικά μαθηματικά», αλλά και με ένα σοβαρό ενδιαφέρον για τα «πεπερασμένα μαθηματικά», όπου με τον όρο «πεπερασμένο» δεν εννοούμε αναγκαστικά «ποσοτικά πεπερασμένο». Μία από τις κύριες αιτίες γι' αυτό είναι η εισβολή των υπολογιστών οι οποίοι ανοίγουν απίστευτες ενοποιητικές και συνθετικές δυνατότητες. Η λειτουργία των υπολογιστών βασίζεται σε πεπερασμένα μαθηματικά συστήματα. Ο υπολογιστής χρησιμοποιεί μόνο ρητούς αριθμούς, στη μορφή περίπου που τους γνώριζαν και οι Πυθαγόρειοι, δεν καταλαβαίνει τι είναι μηδέν, το δε άπειρο το υποδηλώνει ως «overflow» κάτι σαν το «ακατανόητο» στά μη-συμβατικά μαθηματικά.

Η ισότητα στον υπολογιστή είναι τελείως δυναμική και δεν είναι αντιμεταθετική. Συγκρίνοντας τα μαθηματικά του υπολογιστή με τα Νευτωνιακά μαθηματικά παρατηρούμε τις ακόλουθες αντιστοιχίες:

Απειροστικός Λογισμός	$\leftrightarrow$	Λογική και «Πεπερασμένα» μαθηματικά
Συναρτήσεις	$\leftrightarrow$	Αλγόριθμοι
Πίνακες	$\leftrightarrow$	Δομές Δεδομένων
Πρωτοβάθμιες Εξισώσεις	$\leftrightarrow$	Stacks και Ουρές
Δευτεροβάθμιες Εξισώσεις	$\leftrightarrow$	Συναρμολογημένες λίστες και δυαδικά Δέντρα

Βλέπουμε λοιπόν οτι η σχέση της Πληροφορικής και της Λογικής στη γενική της μορφή, είναι περίπου υης ίδιας φύσης με την σχέση μεταξύ της Ανάλυσης και της Φυσικής, που υπάρχει στα Νευτωνιακά-Καντοριανά Μαθηματικά.

Ας έρθουμε τώρα στα βασικά εννοιολογικά στοιχεία της μαθηματικής λογικής. Διακρίνουμε συνήθως τους ακόλουθους τύπους αντικειμένων:

1) **Συντακτικά αντικείμενα.** Η κεντρική έννοια εδώ είναι αυτή της τυπικής ή φορμαλιστικής γλώσσας. Η σύνταξη των καλοσχηματισμένων εκφράσεων της γλώσσας, η λογική μορφή αυτών των εκφράσεων, η έννοια της απόδειξης και η έννοια της θεωρίας, είναι όλες συντακτικές έννοιες. Θα μπορούσε κανείς χοντρικά να ισχυριστεί, ότι ένα μαθηματικό βιβλίο που διαπραγματεύεται μια μαθηματική θεωρία, δεν είναι τίποτα άλλο παρά μια συντακτική έκφραση αυτής της θεωρίας, σε μια γλώσσα, που είναι ανάμιξη τυπικής γλώσσας και μεταγλώσσας, που στην περίπτωσή μας είναι η Ελληνική γλώσσα.

   Συνοψίζοντας λοιπόν, οι βασικές συντακτικές έννοιες αποτελούνται από:

   (i) Μια **τυπική γλώσσα** $\mathscr{L}$ που απαρτίζεται: Από τα λογικά σύμβολα «$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$» από μεταβλητές $V = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$, ποσοδείκτες «$\forall, \exists$», το σύμβολο της ισότητας «$\approx$», και σύμβολα στίξης «$(,), [,], \ldots$», καθώς επίσης και κάποιους συντακτικούς κανόνες για των σχηματισμό αποδεκτών εκφράσεων και τέλος από τα μη-λογικά σύμβολα των κατηγορημάτων, των συναρτήσεων και των σταθερών.

   (ii) **Την έννοια της απόδειξης ή λογικής παραγωγής**, που προϋποθέτει ότι έχουμε δεχτεί κάποιους λογικούς κανόνες (π.χ. modus ponens) και κάποιες προτάσεις σαν λογικά αξιώματα πρώτης τάξης.

   (iii) Μια **θεωρία** είναι ένα σύνολο προτάσεων T, που είναι κλειστό ως προς την αποδειξιμότητα, δηλαδή αν μια πρόταση μπορεί να αποδειχτεί από τις προτάσεις στην T τότε η πρόταση αυτή ανήκε ήδη στο T, συμβολικά, για κάθε $\mathscr{L}$-πρόταση με $T \vdash \varphi$ έχουμε ότι $\varphi \in T$. Ενα υποσύνολο A του T θα λέγεται ένα **σύνολο αξιωμάτων** για την T αν όλες οι προτάσεις της T μπορούν να αποδειχτούν με την χρήση μόνον των προτάσεων στο A.

   Από την άλλη μεριά έχουμε τις σημαντικές ή σημασιολογικές έννοιες:

2) **Σημαντικά ή σημασιολογικά αντικείμενα.** Αυτά είναι τα βασικά μαθηματικά αντικείμενα, Σύνολα, Γεωμετρία, Αλγεβρα, Ανάλυση, και γενικά οι μαθηματικές δομές. Μπορούμε ακόμα να θεωρούμε και τις τυπικές γλώσσες σαν μαθηματικό αντικείμενο, που διαθέτουν «μορφή» παρόμοια με την μορφή των γεωμετρικών αντικειμένων, αλλά και συγκεκριμένη δομή.

   Τα αντικείμενα αυτά πρέπει να εκλαμβάνονται σαν αφαιρέσεις και ειδετικές αναγωγές του κόσμου της εμπειρίας και σαν τέτοια είναι **νοητικές κατασκευές** και έχουν μια ρεαλιστική οντολογική διάσταση. Θα μπορούσαμε ίσως να πούμε ότι **η κεντρική μαθηματική έννοια είναι η έννοια της μαθηματικής δομής και οι διάφορες γενικεύσεις της**. Από την άλλη μεριά θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι, **τα βασικά μαθηματικά αντικείμενα αποτελούνται από τα γεωμετρικά αντικείμενα και την γλωσσική τους περιγραφή από μιά κατάλληλη γλώσσα, δηλάδη η βάση των μαθηματικών είναι η ένταση που δημιουργείται από το διαλεκτικό σχήμα: Γεωμετρία-Λογική.** Η η μεν αναλυτικολογική έκφρασή του διαλεκτικού αυτού σχήματος δίνει την Ανάλυση, η δε δομικο-ολιστική έκφρασή του, την Αλγεβρα. Στη συνέχεια θα θεωρούμε την έννοια της μαθηματικής δομής σαν την κεντρική σημαντική ($\equiv$ σημασιολογική) έννοια.

Συνοψίζοντας λοιπόν οι βασικές σημαντικές έννοιες αποτελούνται από:

(i) **Την έννοια της $\mathscr{L}$-ερμηνείας ή $\mathscr{L}$-δομής**, που είναι μια μαθηματική δομή με ομόλογο ως προς τον γλωσσικό οπλισμό της τυπικής γλώσσας $\mathscr{L}$, σημαντικό οπλισμό.

(ii) **Την έννοια της ικανοποιησιμότητας** που είναι η ομόλογη έννοια της απόδειξης, και βασίζεται στη παραδοχή κάποιων αξιωμάτων για την δομή, και τέλος,

(iii) **Την έννοια του μοντέλου μιας θεωρίας** που είναι ακριβώς μια δομή στην οποία ικανοποιείται μια θεωρία.

Τα βασικά θεωρήματα της Θεωρίας Μοντέλων είναι τα Θεωρήματα Πληρότητας/Συμπαγίας, που συνδέουν θεωρίες και μοντέλα και μας εξασφαλίζουν, ότι κάθε συνεπής θεωρία έχει ένα τουλάχιστον μοντέλο, τα θεωρήματα των Löwenheim-Skolem, καθώς επίσης και διάφοροι τρόποι κατασκευής μοντέλων για συγκριμένες θεωρίες, ένας εκ των οποίων είναι και **η μέθοδος των υπεργινομένων**, με τον οποίο θα ασχοληθούμε περισσότερο εδώ.

Συνοψίζοντας λοιπόν, οι βασικές έννοιες της μοντελοθεωρίας είναι:

(i) Μια πρωτοβάθμια γλώσσα $\mathscr{L}$ μαζί με τους όρους, τις προτάσεις και τους τύπους της.

(ii) Οι ερμηνείες-πραγματώσεις [1] ή $\mathscr{L}$-δομές $\mathfrak{A}$, της $\mathscr{L}$.

(iv) Η έννοια της ικανοποιησιμότητας στη δομή $\mathfrak{A}$, δηλαδή $\mathfrak{A} \models \varphi$ (η φ ικανοποιείται στην $\mathfrak{A}$).

Τα βασικά θεωρήματα είναι:

1.1.1 Θεώρημα. **(Συμπαγίας)** *Αν Σ είναι ένα σύνολο από $\mathscr{L}$-προτάσεις, και κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του Σ έχει ένα μοντέλο, τότε και το Σ έχει ένα μοντέλο.*

[1] Μιά τέτοια ερμηνεία-πραγμάτωση θα μπορούσε να ονομασθεί και **«σημασιοδότηση»** .

1.1.2 Θεώρημα. (Καθοδικό Θεώρημα των Löwenheim - Skolem) *Αν T έχει ένα μοντέλο M με πληθάριθμο $k \geq \mathrm{card}\,(\mathscr{L})$, και X είναι ένα υποσύνολο του M, τότε υπάρχει μια υποδομή N του M με, $X \subseteq N \subseteq M, N \models T$, και* $\mathrm{card}\,(N) = \max[\mathrm{card}\,(X), \mathrm{card}\,(\mathscr{L})]$.

1.1.3 Θεώρημα. (Ανοδικό Θεώρημα των Löwenheim-Skolem) *Αν T έχει ένα μοντέλο M με πληθάριθμο $k \geq \aleph_0$ τότε η T έχει ένα μοντέλο για κάθε πληθάριθμο* $\geq \mathrm{card}\,(\mathscr{L})$.

1.1.4 Σχόλιο. (i) Τα Θεωρήματα Löwenheim-Skolem έχουν τεράστιες επιπτώσεις για τα Θεμέλια των Μαθηματικών, αφού στα θεωρήματα αυτά στηρίζεται η ύπαρξη μη-συμβατικών μοντέλων. Είναι ακόμα φανερό ότι οι έννοιες του «πεπερασμένου», του «αριθμήσιμου» καθώς επίσης και του «μη-αριθμήσιμου» δεν είναι πρωτοβαθμίως ορίσιμες, και επομένως είναι σχετικές από μοντέλο σε μοντέλο. Ορισμένες από αυτές τις έννοιες είναι ορίσιμες σε λογικές ανώτερης τάξης.

(ii) Από το βασικό αποτέλεσμα του P. Lindström (On model- completenes, *Theoria*, 30, (194), 183-196) γνωρίζουμε ότι η λογική πρώτης τάξης είναι η μόνη λογική, που είναι κλειστή ως προς τις λογικές πράξεις $\wedge, \neg, \exists$ και ικανοποιεί, το Καθοδικό Θεώρημα των Löwenheim - Skolem, και το Θεώρημα της Συμπαγότητας. Επομένως για τις λογικές ανώτερης τάξης χρειαζόμαστε καινούργιες ιδέες και βαθιά εννοιολογική κατανόηση των συνεπειών των ανωτέρω δύο αποτελεσμάτων. Αξίζει ακόμα να προσθέσουμε ότι το Θεώρημα των Löwenheim - Skolem συνεπάγεται το Αξίωμα της Επιλογής (AC).

(iii) Είναι ακόμη διαισθητικά φανερό ότι τα βασικά θεωρήματα της θεωρίας μοντέλων εισάγουν ένα είδος «επιπέδου πραγματικότητας» για την «μαθηματική ύλη» . Ετσι π.χ. οι πραγματικοί αριθμοί μπορούν να «παρατηρηθούν» από πολλούς «παρατηρητές» δίνοντας κάθε φορά και από ένα μοντέλο με διαφορετικό πληθάριθμο. Ο πληθάριθμος αυτός εξαρτάται από την διακριτική ικανότητα του παρατηρητή αυτού. Κατά την άποψη του γράφοντος κάποιες από αυτές τις «νέες» ιδέες είναι η σύνθεση των ακόλουθων διαλεκτικών σχημάτων:

1 Γεωμετρία−Λογική

- Εκταση (Extention)− Ενταση (Intention)
- Αναλυτικο-λογικό -- Ολιστικό-δομικό
- Μη-κλασσικά γεωμετρικά αντικείμενα --Πλειότιμες λογικές
- Σταθερό--μεταβαλλόμενο

2 Τοπικό (local)−Απόλυτο (absolute)

- δυναμικό--ενεστωτικό άπειρο
- εσωτερικό--εξωτερικό
- συμβατικό & Καντοριανό−μη-συμβατικό & μη-Καντοριανό
- ασαφές − εναργές.

3 Επιπέδο πραγματικότητας, & ορίζοντας αναφοράς

- Διακριτό − συνεχές
- Διακριτό − αδιάκριτο και μη-συμβατικότητα
- δυναμικό άπειρο $\equiv$ πεπασμένο + αοριστία και ασάφεια

3 Ποσοτικό − ποιοτικό

- Αλγεβρες Boole & Heyting − μέτρα επί αυτών των αλγεβρών & MV-άλγεβρες
- Μοντέλα του Boole & Heyting − Μοντέλα με τιμές αλήθειας σε μιά MV-άλγεβρα

Ας δούμε τώρα ένα γνωστό παράδειγμα μαθηματικής δομής και της αντίστοιχης γλώσσας της. Εστω η δομή των πραγματικών αριθμών $\langle \mathbb{R}\,;\, \{+,\cdot\}, \{\leq\}, \{0,1\}\rangle$. Η γλώσσα $\mathscr{L}(\mathbb{R})$ αποτελείται από τα ακόλουθα στοιχεία:

(I) Τα λογικά σύμβολα.

1) **Λογικοί σύνδεσμοι:** $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \longleftrightarrow$
2) **Ποσοδείκτες:** $\forall, \exists$.
3) **Μεταβλητές:** $x_1, x_2, \dots, x, y, z, \dots$
4) **Το σύμβολο της ισότητας:** $\approx$[2]
5) **Σύμβολα Στίξης:** $(,), [,], \dots$

(II) Τα μη-λογικά σύμβολα ή παράμετροι.

1) **Σύμβολα σχέσεων:** Η γλώσσα $\mathscr{L}(\mathbb{R})$, περιέχει ένα σύμβολο σχέσης, το $R_{\leq}$, που θα το ταυτίζουμε με την πραγματική σχέση $\leq$.

[2]Χρησιμοποιούμε αυτήν την παραλλαγή του συμβόλου ισότητας, για να τονίσουμε ότι η δήλωση «$t_i \approx t_j$» δεν σημαίνει ότι οι συμβολικές εκφράσεις «t_i, t_j» είναι στην πραγματικότητα ίσες ως τέτοιες, αλλά απλά ότι η δήλωση «$t_i \approx t_j$» είναι μια ακόμα συντακτική συμβολική έκφραση. Αν για παράδειγμα $f_+(x_1, x_2) \approx f_+(x_2, x_1)$, αυτό δεν σημαίνει ότι ως συμβολικές εκφράσεις είναι ίσες (στην πραγματικότητα δεν είναι), αλλά ότι σε μια ερμηνεία π.χ. στους φυσικούς αριθμούς, έχουμε ότι $n_1 + n_2 = n_2 + n_1$, όπου πράγματι το σύμβολο $\approx$ παίρνει μια σημασία πραγματικής ισότητας.

2) **Σύμβολα συναρτήσεων:** f_+ , $f_\cdot$ σαν ονόματα των πράξεων «+» και «.».

3) **Σύμβολα διακεκριμένων σταθερών: 0, 1**.

4) **Σύμβολα σταθερών:** Για κάθε $c \in \mathbb{R}$, έχουμε ένα σύμβολο **c**.

Οι **όροι** $\mathscr{L}(\mathbb{R})$ είναι το ελάχιστο σύνολο **Term**, σχηματισμών με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) 0, 1 $\in$ **Term**, και για κάθε μεταβλητή **x, x** $\in$ **Term**.

(ii) Αν $t_1,\ t_2 \in$ **Term** τότε $t_1 + t_2,\ t_1 \cdot t_2 \in$ **Term**.

Οι **τύποι** της $\mathscr{L}(\mathbb{R})$ είναι το ελάχιστο σύνολο **Form** με τις ιδιότητες:

(i) Αν $t_1, t_2 \in$ **Term** τότε $R_{\leq}(t_1, t_2) \in$ **Form**.

(ii) Αν $t_1, t_2 \in$ **Term** τότε $t_1 \approx t_2 \in$ **Form**.

(iii) Αν $\varphi, \psi \ \in$ **Form** τότε $\phi \,\square\, \psi \in$ **Form**, όπου $\square \in \{\wedge, \vee \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

(iv) Για κάθε $\varphi \in$ **Form** $, \neg\varphi \in$ **Form**.

(v) Αν $\varphi, \psi \in$ **Form** τότε $(\forall x)\varphi \quad (\exists x)\psi \in$ **Form**.

Για την αυτονομία του βιβλίου αυτού κρίνεται σκόπιμο να αναπαραγάγουμε από το [24], κάποια γενικά εισαγωγικά σχόλια καθώς επίσης και την κατασκευή των υπερπραγματικών αριθμών, όπου γίνεται κατανοητό το βάθος της μεθόδου των υπερδυνάμεων. Στο επόμενο λοιπόν τμήμα θα κατασκευάσουμε λεπτομερειακά την υπερδύναμη των πραγματικών αριθμών. Στην κατασκευή αυτή θα διαυγαστούν όλες οι έννοιες που σχετίζονται με τα υπεργινόμενα και τις υπερδυνάμεις, με τρόπο τέτοιο που οι γενικεύσεις που θα ακολουθήσουν να είναι τελείως φυσιολογικές.

Η υπερδύναμη $^*\mathbb{R}$, θα κατασκευασθεί διαλεκτικά με βάση την διαλεκτική αρχή της «άρνησης της άρνησης» εμαρμοσμένης στο διαλεκτικό σχήμα: σταθερό - μεταβαλλόμενο.

Κατά την θεώρηση μεταβαλλόμενων στοιχείων σε διακριτό χρόνο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, και επομένως κατά την άρνηση της σταθερότητας του $\mathbb{R}$, θεωρήσαμε την δομή $\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}; +, \cdot, \leq, 0, 1\rangle$ σταθερή για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η δε μεταβολή γινόταν στο εσωτερικό του $\mathbb{R}$. Ακριβέστερα είχαμε την δομή $\mathfrak{R}^{\mathbb{N}} = \left\langle \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \oplus, \odot, \otimes, \bar{0}, \bar{1} \right\rangle$ όπου, αν $f = (a_1, \ldots, a_n \ldots)$ και $g = (b_1, \ldots, b_n \ldots)$ τότε,

$$\begin{aligned} g \oplus f &= (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n, \ldots) \\ g \odot f &= (a_1 \cdot b_1, \ldots, a_n \cdot b_n \ldots) \\ g \otimes f \ &\Leftrightarrow\ a_i \leq b_i \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

και $\bar{0} := (0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ και $\bar{1} := (1, 1, \ldots, 1, \ldots)$.

Η προκείπτουσα δομή $\mathfrak{R}^{\mathbb{N}}$ είναι ένας δακτύλιος η δε διάταξη είναι μερική και όχι ολική. Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας το διαλεκτικό βήμα της άρνησης της άρνησης, καταφέραμε να κατασκευάσουμε τη δομή ${}^*\mathfrak{R} = \langle {}^*\mathbb{R}; +, \cdot, \leq, 0, 1\rangle$ που ικανοποιεί τα αξιώματα του διατεταγμένου σώματος.

1.2 Η Υπερδύναμη του $\mathbb{R}$: Πραγματικοί αριθμοί με απειροστά.

1.2.1 Εισαγωγή

Στόχος του τμήματος αυτού, που είναι μέρος του Κεφαλαίου 3 του [24], είναι να δώσει μια ενορατική εισαγωγή στις σύγχρονες έννοιες του απειροστού και του άπειρα μεγάλου αριθμού. Ταυτόχρονα το εδάφιο αυτό αποτελεί μια εισαγωγή στην ουσία της μεθόδου των υπερδυνάμεων, που είναι μια ειδική περίπτωση της μεθόδου των υπεργινομένων, που θα εξετάσουμε αργότερα. Η θεώρηση θα είναι διαλεκτική, όπως διαλεκτικός ήταν εξάλλου και ο αρχικός τρόπος εισαγωγής τους, και στην ουσία χρησιμοποιεί ελάχιστες γνώσεις από την Λογική.

Στις διαισθητικές μας εξηγήσεις, θα ακολουθούμε την άποψη του Paul Cohen (μετάλλιο fields): «*...όλη η διαίσθησή μας προέρχεται από την πίστη μας σ' ένα φυσικό, σχεδόν υλικό μοντέλο του μαθηματικού σύμπαντος.*» [3] Η αντίληψη αυτή έχει ριζοσπαστικές συνέπειες. Κατά πρώτον, κάθε μη συμβατικό πλαίσιο μπορεί να θεωρηθεί ότι συγκροτείται σε δύο τουλάχιστον «επίπεδα πραγματικότητας» . Με τον τρόπο αυτό *τα στοιχεία μιας δομής είναι δυνατόν να θεωρηθούν «ως μόρια έχοντα δομή»* . Επί πλέον εισάγεται η βασική έννοια του «τοπικού παρατηρητή γνώσης» . Έτσι τα διαφορετικά επίπεδα του μοντέλου μας και οι ενσωματωμένοι σ'αυτά παρατηρητές, εισάγουν μια λογική αλήθεια που βασίζεται στην επικοινωνία (π.χ. μέσω τηλεφώνου) των δύο τοπικών παρατηρητών βλ. π.χ. [38][4]. Όλα αυτά που συμβαίνουν στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών, θυμίζουν έντονα ανάλογα φαινόμενα της Φιλοσοφίας της Φυσικής, όπου η Αρχή της Αβεβαιότητας του Heisenberg, στην ουσία εισήγαγε την έννοια του «παρατηρητή» στη φυσική. Για τα θέματα αυτά, βλ. τα [**?**, 7, 44] [5].

[3]"... all our intuition comes from our belief in a natural, almost physical, model of mathematical universe." (P. Cohen: *Set Theory and the Continuum Hypothesis.* Benjamin, 1966, p.107)

[4]Στη σελίδα 170 του [38], βρίσκουμε: "In a qualitative sense, *the notion of Boolean-valued model includes a new concept of modelling*, which could be termed modelling by communication, or modelling by telephone."

[5]Σχετική με τη βασική μας άποψη για το παρόν κεφάλαιο, ότι δηλαδή «*τα σημεία έχουν δομή και επομένως υπάρχουν επίπεδα πραγματικότητας*» είναι και η σχολή του «κριτικού ρεαλισμού» (critical realism) στο τέλος του προηγούμενου αιώνα, η οποία υποστήριζε «επίπεδα πραγματικότητας» και «αναδυόμενη εξέλιξη» (emergent evolution) βλ. το [10] καθώς επίσης και τα [32, σελ. 220],[**?**]. Από τεχνικής όμως πλευράς αξίζει να μελετήσει κανείς την εξαιρετική εργασία [13] όπου δίνεται μιά σφαιρική περιγραφή των Πρωτεϊκών εννοιών του «σημείου» και του «χώρου» καθώς επίσης και των σχετικών δομών των!

Αξίζει ακόμα να αναφέρουμε εδώ ότι υπάρχουν πολλών ειδών απειροστά. Οι βασικές κατηγορίες απειροστών, βλ. και [43], είναι: Τα «εκτασιακά-Καντοριανά» απειροστά του Robinson [35, 41, 31, 1, 33], τα «Εντασιακά-μη Καντοριανά» απειροστά των Nelson-Vopenka [50, **?**, 18, **?**], και τα γεωμετρικά απειροστά [8, 9]. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τα εκτασιακά-Καντοριανά απειροστά του Robinson.

Οι ιδέες των απειροστών, υπήρχαν ακόμη από την αρχαία Ελλάδα. Βρίσκουμε π.χ. στα Στοιχεία του Ευκλείδη, ότι η κερατοειδής γωνία, βλ. Σχήμα 1.1, -- ένα είδος μη-συμβατικής γωνίας -- είναι ένα απειροστό, στο σύνολο όλων των συμβατικών θετικών γωνιών[6] Εστω $\mathscr{G}$ το σύνολο όλων των θετικών συμ-

Σχήμα 1.1: Η κερατοειδής γωνία ως απειροστό.

βατικών γωνιών, όπως η $\angle(BA)$. Μια θετική «απειροστική γωνία» θα ήταν μια γωνία, διαφορετική από τη μηδενική και μικρότερη από κάθε άλλη θετική μεταξύ 0° και 360°. Είναι προφανές ότι τέτοια γωνία δεν υπάρχει στο σύνολο $\mathscr{G}$. Γιατί αν υποθέσουμε ότι $\angle() \in \mathscr{G}$ με,
(i) $\angle(0) < \angle()$ και
(ii) $\angle() < \angle(\phi)$ για κάθε $\angle(\phi) \in \mathscr{G}$,
τότε και η $\dfrac{\angle()}{2} \in \mathscr{G}$ και $\angle(0) < \dfrac{\angle()}{2} < \angle()$, που είναι βεβαίως άτοπο, αφού η $\angle()$ υποτέθηκε απειροστό. Αν θέλουμε να έχουμε την έννοια της «απειροστικής γωνίας» θα πρέπει να γενικεύσουμε την έννοια της γωνίας, σ' αυτήν της κερατοειδούς γωνίας, όπως η $\angle()$ του Σχήματος 1.1. Ο Ευκλείδης λοιπόν αποδεικνύει (βλ. [30, σελ. 223]), ότι κάθε «κερατοειδής γωνία» είναι μικρότερη από κάθε θετική συμβατική, μικρότερη των 360^o. Η εύρεση του παραπάνω

[6] Στο [4, σελ. 53] αναφέρονται όλα τα είδη γωνιών που θεωρούσαν οι Αρχαίοι Έλληνες, π.χ. ευθεία-κυρτή (γραμμή), ευθεία-κοίλη, ευθεία-ευθεία (συμβατική γωνία), κυρτή-κοίλη, κυρτή-κυρτή, κοίλη-κοίλη.

απειροστού έγινε δυνατή αφού πρώτα χρειάστηκε, να γενικευτεί η συμβατική έννοια της γωνίας, σε μια μη-συμβατική, όπου επιτρέπουμε και τόξα καμπύλων για πλευρές. Παρ' όλο που φαίνεται απίθανο, να είχε ο Ευκλείδης μια βαθιά συνείδηση και προβληματισμό για τα απειροστά, ωστόσο η κερατοειδής γωνία είναι ένα γεωμετρικό απειροστό και υπάρχουν σοβαρές ενδείξεις ότι ο Ευκλείδης είχε το βασικό προβληματισμό για τα απειροστά . Αυτό εξάλλου φαίνεται και από την αντίληψή του ότι, *ένα γεωμετρικό σημείο έχει θέση αλλά όχι διαστάσεις*, η οποία στην ουσία απαγορεύει την ύπαρξη και τη χρήση απειροστών στη γεωμετρία. Η αντίληψη αυτή ήταν αντίθετη με τον «ατομισμό» του Δημόκριτου και τις απόψεις του Ξενοκράτη, διαδόχου του Πλάτωνα στην Ακαδημία, για τα απειροστά. Ο ατομισμός του Δημόκριτου, δεν περιορίζονταν στη δομή της ύλης, αλλά είχε και επεκτάσεις στις έννοιες του χρόνου και του χώρου και επομένως και στη «μαθηματική ύλη» .

Από την άλλη μεριά, *τα επιχειρήματα και τα παράδοξα του Ζήνωνα βασίζονταν στη σκόπιμη σύγχυση των δύο ιεραρχικών επιπέδων οργάνωσης της ευθείας: του μη-Αρχιμήδειου μικροσκοπικού και του Αρχιμήδειου μακροσκοπικού.*

Η εισαγωγή από τον Εύδοξο, της μεθόδου της εξάντλησης, ήταν ίσως η σοβαρότερη προσπάθεια αντικατάστασης του «απειροστικού τρόπου σκέψης» , με έναν πιο «αυστηρό» και έγκυρο τρόπο. Η μέθοδος της εξάντλησης ήταν, σε τελευταία ανάλυση, ένα γεωμετρικό αρχαίο ανάλογο της ε - δ μεθόδου των ορίων και είχε ως στόχο την εξοβέλιση των απειροστών από τη Γεωμετρία.

Μετά την αριθμητικοποίηση - αλγεβροποίηση (αντικατάσταση της γεωμετρίας ως θεμέλιου των μαθηματικών, από την αριθμητική και την άλγεβρα) των μαθηματικών και κατά συνέπεια μετά την απογεωμετρικοποίησή τους, η ίδια ιστορία της εξοβέλισης των απειροστών από τον Εύδοξο, επαναλήφθηκε από τους Cauchy και Weierstrass, αλλά σε ένα ποιοτικά ψηλότερο επίπεδο. Εκείνος όμως που ασχολήθηκε περισσότερο με τις έννοιες των απειροστών και τη μέθοδο εξάντλησης, ήταν ο Αρχιμήδης (βλ. το [11, σελ.48-60]). Ο Αρχιμήδης χρησιμοιούσε τη μέθοδο των απειροστών για να ανακαλύπτει μαθηματικές αλήθειες, φρόντιζε όμως στη συνέχεια, να τις αποδεικνύει αυστηρά, με τη μέθοδο της εξάντλησης. Εξάλλου, ο Αρχιμήδης ήταν αυτός που διατύπωσε και την ομώνυμη ιδιότητα (**Αρχιμήδεια ιδιότητα**), ότι δηλαδή, *κάθε πραγματικός αριθμός είναι μικρότερος από κάποιο πεπερασμένο άθροισμα μονάδων.* Η ιδιότητα αυτή είναι στην ουσία η αλγεβρική έκφραση της αντίληψης του Ευκλείδη ότι *κάθε σημείο έχει θέση αλλά όχι διάσταση.* Και οι δύο αρχές απαγορεύουν την ύπαρξη και χρήση απειροστών. Θα μπορούσε ακόμη κανείς να χαρακτηρίσει την Αρχιμήδεια ιδιότητα του $\mathbb{R}$, με τη λαϊκή ρήση: «κάλιο αργά παρά ποτέ!» Δηλαδή όσο μεγάλο και αν είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα, μπορεί να εξαντληθεί επαναλαμβάνοντας ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα, θετικού συμβατικού μήκους και οσοδήποτε μικρού. Μπορεί αυτό να πάρει πολύ χρόνο, αλλά δεν είναι αδύνατη η μέτρηση.

Μπορεί ακόμα να ισχυριστεί κανείς ότι αν θεωρήσουμε την πραγματική ευθεία ως ένα είδος «αφηρημένης υλικής ευθείας» που κληρομομεί και αντανακλά ωστόσο, τις ιδιότητες της ύλης, τότε η Αρχιμήδεια ιδιότητα μας λέει ότι οσοδήποτε μικρό διάστημα και αν έχουμε (το πιο μικρό θα μπορούσε να είναι η διάμεσος ενός «μορίου ακαθόριστης ύλης» ή η πλευρά ενός φωτοστοιχείου (pixel) της οθόνης του υπολογιστή) μπορούμε τοποθετώντας το ένα διάστημα δίπλα στο άλλο πεπερασμένες φορές, να ξεπερνάμε ένα οσοδήποτε μεγάλο διάστημα. Αν όμως αλλάξουμε ιεραρχικό επίπεδο οργάνωσης ύλης και θεωρήσουμε μικροσκοπικά σωμάτια, τότε είναι αδύνατη η εξάντληση ενός διαστήματος, χρησιμοποιώντας σωμάτια. Στην περίπτωση αυτή είμαστε σε μια μη-Αρχιμήδεια κατάσταση. ΄Ετσι η Αρχιμήδεια ιδιότητα περιορίζει τη δομή σε ένα είδος «μακροσκοπικής θεώρησης» ενώ η απουσία της ιδιότητας αυτής μας εξαναγκάζει σε μια μικροσκοπική θεώρηση της δομής.

Στη συνέχεια, τα απειροστά παίζουν ένα ρόλο μικροσωματίων στα πλαίσια της «μαθηματικής ύλης» της πραγματικής ευθείας. Για τους αλγεβριστές, το σύνολο όλων των απειροστών είναι ένα μεγιστικό ιδεώδες, ενώ κάθε στιβάδα απειροστών μιας συγκεκριμένης τάξης είναι ένα πρώτο ιδεώδες. Στα πλαίσια λοιπόν των μη-συμβατικών μαθηματικών οι έννοιες «μεγιστικό ιδεώδες» «πρώτο ιδεώδες» κ.λπ. σχετίζονται πράγματι με ιδεώδεις αριθμούς, που βρίσκονται ίσως σε ένα άλλο «επίπεδο πραγματικότητας» .

Ας έλθουμε όμως ξανά στους αρχαίους 'Ελληνες. Τελικά μπορεί κανείς να ισχυριστεί, ότι στη μη-ανακάλυψη του απειροστικού λογισμού από αυτούς, πρέπει να έπαιξαν σοβαρό ρόλο τα ακόλουθα :

(i) Η μεγάλη για την εποχή εκείνη αυστηρότητα στα μαθηματικά και η καθαρή θεωρητική και φιλοσοφική σκέψη τους έκανε σχεδόν αδύνατη τη θεωρητικοφιλοσοφική και τεχνική υπέρβαση των εμποδίων που έθεταν τα απειροστά και η αυστηρή θεμελίωση των αριθμών.

(ii) Η σκέψη και ιδιαίτερα τα μαθηματικά των αρχαίων Ελλήνων ήταν στατικά και αντι-Ηρακλειτικά, γι' αυτό εξάλλου υπάρχει σχεδόν πλήρης απουσία της έννοιας της συνάρτησης, με συστηματικό τρόπο.

Χρειάστηκαν να περάσουν ολόκληροι αιώνες, ώστε ο κόσμος να αποστασιοποιηθεί από την Ελληνική αυστηρότητα και στατικότητα και να αρχίσει να μεταχειρίζεται τα απειροστά, με μεγαλύτερη άνεση και χωρίς αυστηρότητα στους υπολογισμούς. Φθάνουμε έτσι σε μια σειρά διανοητών μαθηματικών όπως οι: Nicholas of Cuse, Kepler, J., Cavallieri, B., Fermat, P., Descartes, Wallis, Barrow, Newton και Leibniz, στους οποίους οφείλεται η ανακάλυψη του απειροστικού λογισμού. Αυτό που συνήθως είναι γνωστό ως **«μεσαιωνικό αμάλγαμα»** , αποτελείτο κύρια:

(i) Από τα προβλήματα με τα οποία ασχολείτο ο Αρχιμήδης.

(ii) Από την ανάπτυξη σοβαρών υπολογιστικών τεχνικών και ικανοτήτων και,

(iii) Από την ελεύθερη και διαισθητική χρήση του άπειρου και των απειροστών.

Είναι δυνατόν να ισχυριστεί κανείς, ότι το «αμάλγαμα» αυτό ήταν υπεύθυνο για τις τόσες ανακαλύψεις, στον ύστερο μεσαίωνα, ενώ η Ελληνική αυστηρότητα κατάληξε, συνδυαζόμενη και με άλλες αιτίες, να είναι ένα σοβαρό και αξεπέραστο εμπόδιο για την παραπέρα εξέλιξη των μαθηματικών.

Το συμπέρασμα που βγαίνει από τα παραπάνω, είναι ότι: *η μαθηματική αυστηρότητα, όταν δε συνδυάζεται και δεν εναρμονίζεται κατάλληλα με μια ισχυρή και αυθεντική διαίσθηση, ενόραση και φαντασία, καταντάει φραγμός για την παραπέρα εξέλιξη των μαθηματικών.*

1.2.2 Επιχειρήματα για τη μη-Ύπαρξη των Απειροστών.

Τα κύρια επιχειρήματα για τη μη-ύπαρξη των απειροστών, προέρχονται από τη θεωρία των πληθαρίθμων του Cantor. Είναι φανερό ότι, για να υπάρχουν απειροστά, θα πρέπει να είναι δυνατή η διαίρεση ενός σταθερού αριθμού μ' έναν άπειρο αριθμό, θα πρέπει δηλαδή να ισχύει*η εννοιολογική εξίσωση*:

$$\text{«απειροστό»} = \frac{1}{\text{«άπειρος αριθμός»}}$$

Για τους άπειρους πληθαρίθμους και διατακτικούς αριθμούς όμως, η διαίρεση είναι αδύνατη. Για παράδειγμα είναι γνωστό ότι $2\aleph_0 = \aleph_0$, διαίρεση δε με το $\aleph_0$ θα μας έδινε $2 = 1$. Έτσι βγαίνει αβίαστα το συμπέρασμα : *με την προϋπόθεση ότι οι μόνοι άπειροι αριθμοί είναι οι πληθάριθμοι του Cantor, δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν απειροστά*.

Πρέπει όμως να σημειώσουμε εδώ ότι, εκτός από τις διαδικασίες απαρίθμησης και διάταξης και τους αντίστοιχους άπειρους αριθμούς, τους πληθάριθμους και τους διατακτικούς, υπάρχει και **η διαδικασία της μέτρησης** και οι αντίστοιχοι άπειροι αριθμοί με τους οποίους μάλιστα είναι δυνατή η διαίρεση. Ένα είδος τέτοιων αριθμών θα θεμελιωθεί στη συνέχεια.

Ένα δεύτερο επιχείρημα μη-ύπαρξης των απειροστών στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ είναι και το ακόλουθο : Έστω ότι το $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, είναι ένα θετικό απειροστό, δηλαδή για κάθε θετικό πραγματικό $x \in \mathbb{R}^+$, έχουμε $0 < \varepsilon < x$. Αλλα τότε θα έχουμε επίσης και $\varepsilon/2 > 0$, $\varepsilon/2 \in \mathbb{R}^+$ και $\varepsilon/2 < \varepsilon$, άρα το ε είναι αδύνατο να είναι απειροστό. Το επιχείρημα αυτό είναι βεβαίως αληθές, επειδή στο $\mathbb{R}$ πράγματι δεν υπάρχουν απειροστά πέραν του μηδενός.

Τέλος, αν για παράδειγμα,

$$f(x) := x^2 \quad \text{και} \quad f'(x) = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$$

τότε

$$f'(x) = 2x, \quad \text{ενώ} \quad \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} = 2x + dx$$

έτσι, $2x = 2x + dx$ και επομένως θα πρέπει $dx = 0$. Δηλαδή το μηδέν είναι το μόνο απειροστό στο $\mathbb{R}$, το οποίο βεβαίως είναι σωστό.

Τελικά καταλήγουμε ότι, αν υπάρχει κάποια δυνατότητα ύπαρξης απειροστών, θα πρέπει, όπως και με την κερατοειδή γωνία, να τα αναζητήσουμε σε κάποια γενίκευση - επέκταση της έννοιας του πραγματικού αριθμού, που είναι βεβαίως και η σωστή κατεύθυνση.

1.2.3 Ενδείξεις για την Ύπαρξη των Απειροστών.

Εκτός από το γεωμετρικό παράδειγμα της κερατοειδούς γωνίας, που δίνει και τη σωστή κατεύθυνση αναζήτησης των απειροστών, υπάρχουν και κάποια φαινόμενα που σχετίζονται με τα όρια, που μας παρέχουν ισχυρές ενδείξεις ύπαρξης των απειροστών. Για παράδειγμα έχουμε,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5}{4n^3+7} = 0$$

και αυτό παρόλο που $\lim_{n\to\infty}\left(3n^2+5\right) = +\infty$ και $\lim_{n\to\infty}\left(4n^3+7\right) = +\infty$

Για να συμβαίνει όμως το παραπάνω, θα πρέπει το «άπειρο» που τείνει το $3n^2+5$ να είναι διαφορετικό από αυτό στο οποίο τείνει το $4n^3+7$. Επομένως κάθε αποκλείνουσα ακολουθία, ανάλογα με την ταχύτητα που τείνει στο $\pm\infty$, μπορεί να καθορίζει «διαφορετικά άπειρα» . Ομοια, παρόλο που,

$$\frac{1}{n} \to 0 \quad \text{και} \quad \frac{1}{n^2} \to 0, \quad \text{ωστόσο} \quad \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \to \infty,$$

γεγονός που σημαίνει ότι οι ακολουθίες $(\frac{1}{n}), (\frac{1}{n^2})$ συγκλίνουν και οι δύο στο μηδέν, αλλά με διαφορετικές ταχύτητες. Τα παραπάνω παραδείγματα βρίσκονται ακριβώς προς τη σωστή κατεύθυνση αναζήτησης των απειροστών, οι δε έννοιες της *ταχύτητας σύγκλισης* και *της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς* βρίσκονται στην καρδιά του προβλήματος.

Τέλος μια άλλη σοβαρή ένδειξη για την ύπαρξη των απειροστών είναι το γεγονός ότι από την εποχή του μεσαίωνα οι υπολογισμοί με βάση τα απειροστά έδιναν σωστές απαντήσεις σε συγκεκριμένα προβλήματα. (Δες για παράδειγμα το [26, Κεφ. 4]).

Η τελική λύση στο πρόβλημα της αυστηρής ύπαρξης και δικαίωσης των απειροστών δόθηκε για πρώτη φορά από τον Abraham Robinson το 1960. Η λύση στηριζόταν πάνω σε μεθόδους της Θεωρίας Μοντέλων (Θεώρημα της Συμπαγότητας). Στη συνέχεια θα δοθεί μια διαλεκτική εισαγωγή στα απειροστά

Σχήμα 1.2: Escher: Η έννοια του ορίου.

του Robinson, αποφεύγοντας, όσο είναι δυνατόν, τη χρήση ισχυρών εργαλείων της λογικής. Με τον τρόπο αυτό αποκαλύπτεται ότι η διαλεκτική μεταβολή διαπερνά το σύνολο του απειροστικού λογισμού.

Από παιδαγωγική άποψη, στην εργασία [52], μπορεί κανείς να βρει στατιστικές μελέτες και επιχειρήματα που ενισχύουν την άποψη ότι τα απειροστά είναι περισσότερο κατάλληλα για τη διδασκαλία του απειροστικού λογισμού, απ' ότι ο παραδοσιακός τρόπος, που βασίζεται στη θεωρία των ορίων. Ωστόσο οι αλλαγές στις συνήθειες της μαθηματικής κοινότητας είναι εξαιρετικά δύσκολες και χρονοβόρες. Το γεγονός, π.χ., ότι σήμερα τα απειροστά δεν είχαν, στο διδακτικό επίπεδο, την αποδοχή που θα ανέμενε κανείς, δεν σημαίνει ανγκαστικά ότι ο παραδοσιακός τρόπος είναι διδακτικά πιό επιτυχής.

Κατά τη άποψη του γράφοντος, ο «σωστός τρόπος διδασκαλίας» του απειροστικού λογισμού πρέπει να στηρίζεται σε μια κατάλληλη διαλεκτική σύνθεση των δύο τρόπων:

(α) του τρόπου με τα όρια, που στην ουσία είναι ο αναλυτικός-στοιχειακός τρόπος (αντίληψη με το αριστερό ημισφαίριο του εγκεφάλου) βλ. [**?**] και

(β) του τρόπου με τα απειροστά, που είναι ο ολιστικός-δομικός τρόπος (αντίληψη με το δεξί ημισφαίριο του εγκεφάλου).

Εξ άλλου αυτός είναι και ο φυσιολογικός τρόπος με τον οποίο ο εγκέφαλος αντιλαμβάνεται τον κόσμο.

1.2.4 Το Διαλεκτικό Σχήμα: Σταθερό--Μεταβαλλόμενο.

Η εισαγωγή της διαλεκτικής στα μαθηματικά, με ένα νέο και σύγχρονο τρόπο, έγινε από τον F. W. Lawvere, στα πλαίσια της Θεωρίας των Μεταβαλλομένων Συνόλων (Θεωρία Τόπων) και γενικότερα στα πλαίσια της Θεωρίας Κατηγοριών (βλ. τα [39, 7] και σχετικές εκεί παραπομπές).

Στη συνέχεια θα δώσουμε μια εισαγωγή στις ιδέες αυτές, χωρίς τη γενική χρήση της Θεωρίας των Τόπων και Κατηγοριών. Τις γενικές αρχές των θεωριών αυτών θα εξετάσουμε στον 2 τόμο.

Τα βασικά διαλεκτικά σχήματα που χρησιμοποιούμε στη συνέχεια είναι:

(i) Σταθερές και στατικές οντότητες ενάντια σε μεταβαλλόμενες και δυναμικές οντότητες, και

(ii) Ποσοτικά και αναλυτικά χαρακτηριστικά ενάντια σε ποιοτικά και ολιστικά χαρακτηριστικά.

Πρέπει ακόμα να σημειωθεί ότι, το **σταθερό** είναι περισσότερο προσιτό στο **ποσοτικό** και **αναλυτικό**, ενώ το μεταβαλλόμενο, από τη φύση του, απαιτεί κύρια **ποιοτικούς** και **ολιστικούς**[7] χαρακτηρισμούς.

Πριν αρχίσουμε τη μαθηματική μας κατασκευή, είναι ίσως σκόπιμο να αναφέρουμε μερικά σχετικά αποσπάσματα διαλεκτικών φιλοσόφων. Σ' όλους τους διαλεκτικούς φιλοσόφους, από τον Ηράκλειτο[8], τον Kant, τον Hengel ως τους Marx και Engels, συναντάμε, με διάφορες παραλλαγές, τα παραπάνω βασικά διαλεκτικά σχήματα και κύρια τη σπουδαιότητα και την παρουσία του χρόνου σε κάθε μεταβολή. Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι *η μεταβολή και η ασάφεια είναι δυϊκές έννοιες. Η μεταβολή μπορεί να ερμηνευθεί ως ασάφεια και αντιστρόφως, βλ. το Κεφ. 1: Συναρτήσεις.* Ο φιλόσοφος Κ. Αξελός [2] γράφει: «Ο ρυθμός της συμπαντικής κίνησης, που ενώνει και αντιθέτει τα αντίθετα μέσα στην αρμονία του γίγνεσθαι, αυτός ο ρυθμός, που συλλαμβάνει η διαλεκτική σκέψη, είναι ο Χρόνος» και παρακάτω: «Ο Χρόνος είναι ενσωματωμένος σε κάθε διαλεκτική» και «στην πραγματικότητα η διαλεκτική προϋποθέτει το χρόνο κι ο χρόνος γίνεται αισθητός από ένα είδος διαλεκτικής» .

Στο [25, σελ. 182] βρίσκουμε: «Αυτά τα Μαθηματικά, από τη στιγμή που θα πραγματευτούν μεταβλητά μεγέθη, μπαίνουν στο χώρο της διαλεκτικής και είναι χαρακτηριστικό ότι αυτή την πρόοδο την εισήγαγε πρώτος ένας διαλεκτικός φιλόσοφος, ο Καρτέσιος. Ό,τι είναι τα Μαθηματικά των μεταβλητών μεγεθών

[7] Ο όρος «ολιστικός» θεωρείται ως το αντίθετο του «αναλυτικού» και σημαίνει τη σύλληψη του πράγματος ως μιας ολότητας ή “gestalt" και όχι ως ένα κατακερματισμένο αναλυτικό όλο. Έτσι, συνοπτικά, «ολιστικό» =«δομημένη ολότητα» .

[8] «(Η φωτιά) μεταβαλλόμενη αναπαύεται.»

σχετικά με τα Μαθηματικά των σταθερών μεγεθών, το ίδιο εν γένει είναι και η διαλεκτική σκέψη σχετικά με τη μεταφυσική σκέψη» .

Και παρακάτω, στη σελ. 201, βρίσκουμε: «Τα στοιχειώδη Μαθηματικά, τα Μαθηματικά δηλαδή των σταθερών μεγεθών, κινούνται μέσα στα όρια της τυπικής λογικής. Τα Μαθηματικά όμως των μεταβλητών μεγεθών που το σπουδαιότερο μέρος τους είναι ο απειροστικός λογισμός, δεν είναι ουσιαστικά τίποτε άλλο παρά η εφαρμογή της διαλεκτικής στις μαθηματικές σχέσεις» .

Αξίζει ακόμη να αναφέρουμε την άποψη αυτού του ίδιου του Liebniz, βλ. το [49, p.397],

«Θα πρέπει πάντα να μην ξεχνάμε ότι οι ασύγκριτα μικρές ποσότητες, ακόμα και αν ληφθούν με τη λαϊκή τους έννοια, δεν είναι σε καμιά περίπτωση σταθερές και οριστικές ...» Επομένως μια ποσότητα όπως η dx είναι κάτι μεταβαλλόμενο, κάτι που εξαρτάται και μεταβάλλεται με το «χρόνο» .

Σχήμα 1.3: Ecsher: Liberation. Από το σταθερό Καντοριανό στο μεταβαλλόμενο μη-Καντοριανό.

Στόχος του κεφαλαίου αυτού είναι να δικαιώσουμε την άποψη ότι, πράγματι ο απειροστικός λογισμός είναι ακριβώς η εφαρμογή της διαλεκτικής και ιδιαίτερα του νόμου της άρνησης της άρνησης στις μαθηματικές σχέσεις.

1.2.5 Η Άρνηση της Άρνησης. (AA)

Στο τμήμα αυτό θα ξαναθεωρήσουμε τη γνωστή κατασκευή των πραγματικών αριθμών από τους ρητούς, αλλά με μια καθαρά διαλεκτική πρόθεση και ενταστιακή φόρτιση.

(I) Πρώτη εφαρμογή της άρνησης της άρνησης. Έστω ότι μας δίνεται το σύνολο των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$ ως ένα διαταγμένο σώμα, και το οποίο θεωρούμε ως ένα πραγματωμένο, σταθερό αντικείμενο, που απαρτίζεται επίσης από σταθερά στοιχεία, δηλαδή από μη-μεταβαλλόμενους ρητούς αριθμούς. Η υπόθεση αυτή γίνεται γιατί κάθε ρητός θα μπορούσε να θεωρηθεί ως μια κλάση ισοδυναμίας από ακέραιους. Την κλάση ισοδυναμίας αυτή, τη θεωρούμε εδώ ως ένα σταθερό στη μορφή «άτομο» ή «πρωτοστοιχείο» .

Πρώτος μας διαλεκτικός στόχος είναι να αρνηθούμε τη σταθερότητα των στοιχείων του $\mathbb{Q}$. Αυτό είναι δυνατόν να γίνει, αν θεωρήσουμε «μεταβαλλόμενους ρητούς» , π.χ. σε διακριτό χρόνο, δηλαδή αν θεωρήσουμε το σύνολο όλων των ακολουθιών ρητών,

$$\mathbb{Q}^{\mathbb{N}} := \{\, f \mid f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}\}$$

Κάθε στοιχείο $f \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ θεωρείται ως ένας «μεταβαλλόμενος ρητός σε διακριτό χρόνο» , δηλαδή $f = (q_n)_{n=1}^{\infty}$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι, η άρνηση της σταθερότητας των στοιχείων του $\mathbb{Q}$ και η μετάβαση από το $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, έχει ως συνέπεια να χάσουμε πολλές αλγεβρικές ιδιότητες του $\mathbb{Q}$. Το $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ δεν είναι πλέον σώμα και ως δακτύλιος περιέχει διαιρέτες του μηδενός, δηλαδή στοιχεία που είναι διάφορα από το μηδέν αλλά το γινόμενό τους είναι μηδέν, π.χ. τα $(0, 1, 0, 1, \ldots)$ και $(1, 0, 1, 0, \ldots)$.

Το δεύτερο βήμα, η άρνηση της άρνησης της σταθερότητας, κατάλληλα εκτελεσμένο, έχει ως στόχο να μας απαλλάξει από τα προβλήματα που σχετίζονται με το $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, και που δημιουργούνται από την ελεύθερη μεταβολή των στοιχείων του. Δηλαδή θέλουμε να επανέλθουμε σε μια κατάσταση σταθερών στοιχείων (άρρητοι αριθμοί) που ποιοτικά αναμένουμε να βρίσκονται σε ψηλότερο επίπεδο από αυτό των ρητών.

Κάθε άρρητος λοιπόν εμφανίζεται ως ένα ενεστωτικό τελειωμένο άπειρο, μεταβαλλόμενων στοιχείων του κατώτερου ιεραρχικού επιπέδου (ρητοί), που στη μεταβολή τους εμφανίζουν χαρακτηριστικά δυναμικού απείρου, βλ. και σελ. 22.

Είναι προφανές ότι μπορούμε να εμφυτεύσουμε τον $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, ταυτίζοντας το $\mathbb{Q}$ με το σύνολο των σταθερών ακολουθιών ρητών, $\mathbb{Q}$.

1.2.1 Ορισμός. Μια ακολουθία ρητών $f = (q_n)$ λέγεται **ακολουθία του Cauchy** ανν για κάθε θετικό ρητό $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιος ώστε:

$$n, m > n_0 \quad \text{συνεπάγεται ότι} \mid q_n - q_m \mid < \varepsilon$$

δηλαδή $\lim_{n,m \longrightarrow \infty} \mid q_n - q_m \mid = 0$.

Έστω τώρα $\mathscr{C}_0$, το σύνολο όλων των ακολουθιών Cauchy που συγκλίνουν στο μηδέν και $\mathscr{C}$ το σύνολο όλων των ακολουθιών Cauchy.[9] Με τη βοήθεια του $\mathscr{C}_0$, θα ορίσουμε μια σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου $\mathscr{C}$, η οποία, στην ουσία, θα ταξινομεί τις ακολουθίες του Cauchy στην ίδια κλάση ισοδυναμίας, εφ' όσον προσεγγίζουν τον ίδιο «ιδεατό αριθμό» , υπάρχοντος ή μη στο $\mathbb{Q}$. Τελικά, η κλάση ισοδυναμίας, π.χ. όλων των ακολουθιών Cauchy που συγκλίνουν στο $\sqrt{2}$ θα παρουσιάζεται ως ένα ευσταθές «μόριο» (μια κλάση ισοδυναμίας με ετικέτα $\sqrt{2}$, που μόνο στο εσωτερικό της επιτρέπεται η μεταβολή!), που αποτελείται πρακτικά από άπειρο αριθμό μεταβαλλόμενων ατόμων, στοιχείων δηλαδή του προηγούμενου ιεραρχικού επιπέδου οργάνωσης της «μαθηματικής ύλης» .

Η επιζητούμενη λοιπόν σταθερότητα θα προκύψει μέσα από τον ορισμό μιας κατάλληλης σχέσης ισοδυναμίας.

1.2.2 Ορισμός. Έστω $f, g \in \mathscr{C}$. Τότε,

$$f \approx_{\mathscr{C}} g \quad \text{αnn} \quad f - g \in \mathscr{C}_0$$

1.2.3 Πρόταση. *Η σχέση $\approx_{\mathscr{C}}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου όλων των ακολουθιών του Cauchy.*

Proof: Η $\approx_{\mathscr{C}}$ είναι φανερό ότι είναι ανακλαστική και συμμετρική. Θα δείξουμε ότι είναι και μεταβατική. Έστω $f = (a_n), g = (b_n), h = (c_n) \in \mathscr{C}$ και έστω ότι $f \approx_{\mathscr{C}} g$ και $g \approx_{\mathscr{C}} h$. Τότε, αν θέσουμε $d_n := a_n - b_n$ και $e_n := b_n - c_n$ έχουμε, εξ υποθέσεως ότι, $d_n \longrightarrow 0$ και $e_n \longrightarrow 0$. Αλλά

$$d_n + e_n = a_n - b_n + b_n - c_n = a_n - c_n$$

και επειδή $d_n + e_n \longrightarrow 0$ έχουμε τελικά $(a_n) \approx_{\mathscr{C}} (c_n)$. ⊣

1.2.4 Ορισμός. Ορίζουμε τώρα το $\mathbb{R}$ ως το ακόλουθο σύνολο πηλίκο: $\mathbb{R} := \mathscr{C} / \approx_{\mathscr{C}}$

Την παραπάνω διαδικασία αποκατάστασης της σταθερότητας, μπορούμε να την παραστήσουμε εικονικά ως εξής: Με ευθείες γραμμές παριστάνουμε τις σταθερές ακολουθίες, με κυματοειδείς γραμμές τις ακολουθίες του Cauchy και με

Σχήμα 1.4: Το «φίλτρο» του Cauchy: Από το φίλτρο περνάνε μόνον οι ακολουθίες του Cauchy, οι οποίες ταυτόχρονα ταξινομούνται στις κατάλληλες κλάσεις ισοδυναμίας.

οδοντωτές γραμμές τις ακολουθίες που δεν είναι Cauchy (αποκλίνουσες και εναλλάσουσες ακολουθίες). Τότε,

Με τον τρόπο αυτό, όλες οι ακολουθίες του Cauchy που, με μια απειροδυναμική διαδικασία, προσεγγίζουν σε κάποιο ιδεατό αριθμό, π.χ. τον $\sqrt{2}$, αποτελούν μια ολόκληρη κλάση ισοδυναμίας, στην ετικέτα της οποίας υπάρχει το «όνομα-σύμβολο» $\sqrt{2}$. Ο αριθμός $\sqrt{2}$, ως σύνολο ακολουθιών του Cauchy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, που κι αυτές με τη σειρά τους είναι σύνολα ρητών, βρίσκεται σε ψηλότερο ιεραρχικό επίπεδο οργάνωσης της «μαθηματικής ύλης» από ό,τι οι ρητοί. Το τελικό προϊόν είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ και απαρτίζεται πλέον από οντότητες που θεωρούνται σταθερές και υπακούουν στα αξιώματα ενός διαταγμένου, Αρχιμηδείου σώματος. Η Αρχιμήδεια φύση του $\mathbb{R}$, απαγορεύει την ύπαρξη απειροστών στο $\mathbb{R}$. Απαγορεύει δηλαδή τη θέαση στο εσωτερικό μικροσκοπικό επίπεδο του $\mathbb{R}$.

Ο αξιωματικός τρόπος θεώρησης του $\mathbb{R}$ είναι ένας ολιστικός-δομικός και μη-στοιχειακός τρόπος θεώρησης και χαρακτηρισμού των στοιχείων του $\mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι θεωρούμε τα στοιχεία του $\mathbb{R}$, όχι ως σύνολα-κλάσεις ισοδυναμίας, αλλά ως άτομα, η συμπεριφορά των οποίων καθορίζεται από τα αξιώματα της δομής του $\mathbb{R}$. Η μετάβαση από το $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$ είναι μια μετάβαση από έναν ποιοτικά κατώτερο τρόπο αντίληψης σ' έναν ποιοτικά ανώτερο. Πιο συγκεκριμένα στον κατώτερο τρόπο αντίληψης έχουμε:

(i) Αναλυτική θεώρηση στο επίπεδο οργάνωσης του $\mathbb{Q}$. Οι ρητοί αριθμοί θεωρούνται ως σύνολα (κλάσεις ισοδυναμίας) στοιχείων του προηγούμενου ιεραρχικού επιπέδου οργάνωσης, που εδώ είναι το σύνολο των ακέραιων $\mathbb{Z}$. Κάθε

[9] Το σύνολο $\mathscr{C}$ είναι ένας δακτύλιος, το δε σύνολο $\mathscr{C}_0$ είναι ένα μεγιστικό ιδεώδες στο δακτύλιο $\mathscr{C}$, δηλ. **(1)** Αν $(r_n), (s_n) \in \mathscr{C}_0$ τότε και $(r_n + s_n) \in \mathscr{C}_0$ και **(2)** Αν $(r_n) \in \mathscr{C}_0$ και $(s_n) \in \mathscr{C}$ τότε $(r_n) \cdot (s_n) = (r_n \cdot s_n) \in \mathscr{C}_0$.

ρητός λοιπόν καθορίζεται εκτασιακά, με το καθορισμό των στοιχείων της κλάσης ισοδυναμίας που τον ορίζουν. Καθορίζεται δηλαδή στοιχειακά.
(ii) Ολιστική θεώρηση στο επίπεδο οργάνωσης του $\mathbb{Q}$. Οι ρητοί θεωρούνται ολιστικά, ως άτομα χωρίς στοιχεία (πρωτοστοιχεία (urelements)), ο δε καθορισμός τους γίνεται όχι με στοιχειακό και εκτασιακό τρόπο, αλλά με εντασιακό-δομικό τρόπο, από την αξιωματική δομή του $\mathbb{Q}$.

Στο ποιοτικά ανώτερο επίπεδο αντίληψης έχουμε πάλι:
(iii) Αναλυτική θεώρηση στο επίπεδο οργάνωσης του $\mathbb{R}$. Οι πραγματικοί αριθμοί θεωρούνται ως σύνολα (κλάσεις ισοδυναμίας) στοιχείων του προηγούμενου ιεραρχικού επιπέδου οργάνωσης, που είναι το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$. Κάθε πραγματικός λοιπόν καθορίζεται εκτασιακά με τον καθορισμό των στοιχείων της κλάσης ισοδυναμίας που τον ορίζουν. Καθορίζεται δηλαδή στοιχειακά.
(iv) Ολιστική θεώρηση στο επίπεδο οργάνωσης του $\mathbb{R}$. Οι πραγματικοί θεωρούνται ολιστικά, δηλαδή ως άτομα χωρίς στοιχεία (πρωτοστοιχεία), ο δε καθορισμός τους γίνεται όχι κατά στοιχειακό τρόπο, αλλά με εντασιακό-δομικό τρόπο από την αξιωματική δομή του $\mathbb{R}$.

Πρέπει ακόμα να σημειωθεί αν $r = [r_n] \in \mathbb{R}$ είναι ένας άρρητος αριθμός, π.χ. ο $\sqrt{2}$, τότε αν ο $\sqrt{2}$ θεαθεί με έναν ποιοτικά ανώτερο τρόπο, δηλαδή ολιστικά-δομικά, τότε ο $\sqrt{2}$ παρουσιάζεται ως μια τελειωμένη, **ενεστωτικά άπειρη** ολότητα στοιχείων του προηγούμενου επιπέδου οργάνωσης, του $\mathbb{Q}$. Αν όμως ο $\sqrt{2}$ θεαθεί από μια αναλυτική-στοιχειακή σκοπιά, δηλαδή από έναν ποιοτικά κατώτερο τρόπο, τότε το $\sqrt{2}$ παρουσιάζεται ως μια **έν δυνάμει άπειρη** οντότητα στοιχείων του $\mathbb{Q}$, δηλαδή των προσεγγιζουσών στο $\sqrt{2}$ ακολουθιών του Cauchy. Ετσι το $\sqrt{2}$ παρουσιάζεται ως το **«είναι του γίγνεσθαι»** ενώ η ακολουθία αντιπρόσωπος (r_n) ως το **«γίγνεσθαι του είναι».**

(ΙΙ) Δεύτερη εφαρμογή της άρνησης της άρνησης.

Ο στόχος μας κατά τη δεύτερη εφαρμογή της βασικής διαλεκτικής αρχής, της άρνησης της άρνησης, είναι να πάρουμε, πέρα από συμβατικούς πραγματικούς αριθμούς $\mathbb{R}$ και νέους που να είναι «άπειρα μικροί» (απειροστά) και άλλους που να είναι «άπειρα μεγάλοι» , διατηρώντας όμως, στα πλαίσια του δυνατού, την αλγεβρική δομή του σώματος. Μάλιστα αν θέλουμε το τελικό προϊόν, να το ονομάσουμε «μη- συμβατικοί πραγματικοί αριθμοί» θα πρέπει να πληρούνται τουλάχιστον τα αξιώματα πρώτης τάξης, αυτά δηλαδή, που η διατύπωσή τους δεν περιέχει ποσοδείκτες που αναφέρονται σε υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Η άρνηση της σταθερότητας των στοιχείων του $\mathbb{R}$ μας υποχρεώνει ξανά, να θεωρήσουμε το σύνολο των μεταβαλλόμενων πραγματικών σε διακριτό χρόνο, δηλαδή το σύνολο,

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \{ f \mid f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}\}$$

Το σύνολο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ μπορούμε να το διαμερίσουμε ως ακολούθως:

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathscr{C} \cup \mathscr{A} \cup \mathscr{E},$$

όπου $\mathscr{C}$ είναι οι συγκλίνουσες ακολουθίες πραγματικών αριθμών, $\mathscr{A}$ είναι οι αποκλίνουσες ακολουθίες πραγματικών αριθμών και $\mathscr{E}$ είναι οι υπόλοιπες εναλλάσσουσες ακολουθίες (οι «κακές ακολουθίες»).

Επειδή το $\mathbb{R}$ είναι πλήρες σώμα, μια δεύτερη εφαρμογή της διαδικασίας που περιγράφουμε στο (I) θα μας έδινε πάλι το $\mathbb{R}$. ΄Ετσι αν θέλουμε να πάρουμε απειροστά, όταν αρνηθούμε τη μεταβλητότητα του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το λεπτότερο δυνατό φίλτρο που διατηρεί τα αξιώματα πρώτης τάξης του $\mathbb{R}$ και δίνει τις λεπτότερες ή μικρότερες κλάσεις ισοδυναμίας. Θα μπορούσαμε βεβαίως να ορίσουμε μια σχέση ισοδυναμίας που οι κλάσεις της να είναι μονοσύνολα, να περιέχουν δηλαδή μια ακριβώς ακολουθία, δηλαδή:

$$a_n \approx b_n \quad \text{ανν} \quad a_n = b_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Τότε όμως θα παίρναμε πάλι το $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, του οποίου η ελεύθερη και ανεξέλεγκτη μεταβλητότητα το κάνει να είναι δακτύλιος και όχι σώμα. Για παράδειγμα, αν

$$a_n := \begin{cases} 1 & \text{αν } n = 2k-1 \\ 0 & \text{αν } n = 2k \end{cases} \quad \text{και} \quad b_n := \begin{cases} 0 & \text{αν } n = 2k-1 \\ 1 & \text{αν } n = 2k \end{cases} \quad k = 1, 2, \ldots$$

τότε $(a_n)(b_n) = (0, 0, 0, \ldots) \equiv 0$ αλλά ούτε η (a_n), ούτε η (b_n) είναι μηδέν. Άρα το $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ έχει διαιρέτες του μηδενός. Ζητάμε λοιπόν μια σχέση ισοδυναμίας, με τις λεπτότερες δυνατές κλάσεις, που να περιορίζουν την ανεξέλεκτη μεταβλητότητα των μεταβαλλόμενων στοιχείων του δακτυλίου, και ως συνέπεια να εξαφανίζουν ταυτόχρονα, μαζί με άλλα προβλήματα, και το πρόβλημα των διαιρετών του μηδενός. Ας δούμε όμως ποιος είναι ο συνολικός προβληματισμός που θα μας οδηγήσει στον ορισμό της ζητούμενης κατάλληλης σχέσης ισοδυναμίας.

1.2.6 Η Διάσπαση των Ατόμων του $\mathbb{R}$.

Λαμβάνοντας υπόψη την πληρότητα[10] του $\mathbb{R}$, είναι φανερό ότι, αν θέλουμε απειροστά, αυτά θα πρέπει να δημιουργηθούν από τη διάσπαση των ατόμων του $\mathbb{R}$ αφού στο $\mathbb{R}$, ως πλήρες διατεταγμένο σώμα, δεν υπάρχουν θέσεις προς κατάληψη. Είναι αρκετό να θεωρήσουμε την κλάση ισοδυναμίας των ακολουθιών Cauchy που συγκλίνουν στο μηδέν. Είναι διαισθητικά καθαρό ότι αν θέλουμε να δημιουργήσουμε απειροστά, αυτά μάλλον θα πρέπει να δημιουργηθούν «εκ του μηδενός» , παρά τη ρήση ‘‘ex nihilo nihil" (τίποτα δεν προέρχεται εκ του

[10] Η πληρότητα είναι μια ιδιότητα δευτέρας τάξεως και γι'αυτό δε διατηρείται αναγκαία από μοντέλο σε μοντέλο,

μηδενός), διασπώντας τη κλάση ισοδυναμίας $[0]$ του «ατόμου» του μηδενός, σε άλλες λεπτότερες υποκλάσεις. Αυτό μπορεί να γίνει, αν διακρίνουμε τα στοιχεία της $[0]$, δηλαδή τις συγκλίνουσες στο μηδέν ακολουθίες, αναφορικά με τα ακόλουθα δύο κριτήρια:

(1) *Την ταχύτητα σύγκλισης των ακολουθιών* και

(2) *Την ασυμπτωτική συμπεριφορά ή τάξη μεγέθους των ακολουθιών.*

Τι σημαίνει όμως ταχύτητα σύγκλισης και τι ασυμπτωτική συμπεριφορά; Ας δούμε πρώτα ένα παράδειγμα: Η ακολουθία $\left(\frac{1}{n}\right)$ συγκλίνει στο μηδέν με πολύ μικρότερη ταχύτητα από ό,τι η $\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Η κατάλληλη έννοια που ενσωματώνει τον προβληματισμό της ταχύτητας σύγκλισης, δίνεται μέσα από την έννοια του **ασυμπτωτικού παράγοντα σύγκλισης**. Έστω μια συγκλίνουσα στο a ακολουθία (a_n). Τότε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a - a_{n+1}}{a - a_n} \equiv \varrho.$$

Το όριο αυτό ϱ λέγεται **ασυμπτωτικός παράγοντας σύγκλισης** και είναι δυνατόν να δειχτεί ότι $\mid \varrho \mid \leq 1$. Όσο το ϱ βρίσκεται κοντύτερα στο μηδέν, τόσο η ακολουθία συγκλίνει ταχύτερα, ενώ όσο κοντύτερα βρίσκεται στο 1, τόσο αργότερη είναι η σύγκλιση. 'Ετσι, αν $\mid \varrho \mid = 1$, τότε, για μεγάλα n, έχουμε $\mid a - a_{n+1} \mid \simeq \mid a - a_n \mid$ και άρα η σύγκλιση είναι πολύ αργή, ενώ αν $\mid \varrho \mid < 1$, τότε για μεγάλα n, έχουμε $(a - a_{n+1}) \simeq \varrho(a - a_n)$ και επομένως τελικά κάθε όρος της ακολουθίας είναι περίπου $\mid \varrho \mid$ φορές κοντύτερα στο όριο a από ό,τι ο προηγούμενος όρος. Είναι ακόμα δυνατόν να αποδειχτεί ότι:

(i) Αν ο ϱ υπάρχει, τότε,
$$\varrho = \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{{}_{n-1} - \alpha_{n-2}}, \quad n \geq 3$$

(ii) Αν $\mid \varrho \mid < 1$ και k είναι ο ελάχιστος ακέραιος τέτοιος ώστε $\mid \varrho \mid^k < \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < 1$, τότε $\mid \alpha - \alpha_{n+k} \mid < \varepsilon \mid \alpha - \alpha_n \mid$.

Αναφορικά με την ταχύτητα σύγκλισης, έχουμε τελικά την ακόλουθη διάταξη που μπορεί να γίνει όσο πυκνή θέλουμε:

$$\begin{gathered} 0, \ldots, \left(\frac{1}{e^{e^{n^2}}}\right), \left(\frac{1}{e^{e^n}}\right), \ldots, \quad \left(\frac{1}{e^{n^2}}\right), \left(\frac{1}{e^n}\right), \ldots, \\ \left(\frac{1}{n^2}\right), \left(\frac{1}{n}\right), \ldots, \quad \left(\frac{1}{\ln n}\right), \left(\frac{1}{\ln \ln n}\right), \ldots, \end{gathered} \tag{1.1}$$

'Ολες οι παραπάνω ακολουθίες διακρίνονται ως προς τη ταχύτητα σύγκλισης (η εκθετικοποίηση επιταχύνει τη σύγκλιση, η δε λογαριθμοποίηση την επιβραδύνει) και δίνουν διαφορετικά στοιχεία στο εσωτερικό της $[0]$. Ακόμα, παρόλο που οι ακολουθίες $\left(\frac{1}{n}\right)$ και $\left(\frac{2}{n}\right)$ έχουν την ίδια ταχύτητα σύγκλισης, η $\left(\frac{1}{n}\right)$ προπορεύεται σταθερά από την $\left(\frac{2}{n}\right)$ και αν, για παράδειγμα, η $\left(\frac{1}{n}\right)$ παριστάνει ένα απειροστό ε, τότε η $\left(\frac{2}{n}\right)$ θα διακρίνεται από την $\left(\frac{1}{n}\right)$ ως προς την ασυμπτωτική της συμπεριφορά και θα παριστάνει το απειροστό 2 [11].

Είναι φανερό ότι η ταχύτητα και η ασυμπτωτική συμπεριφορά μιας ακολουθίας καθορίζονται από τη συμπεριφορά της ακολουθίας πάνω σε μια «ουρά» του πεδίου ορισμού της $\mathbb{N}$. Η αλλαγή πεπερασμένου πλήθους όρων μιας ακολουθίας δεν επηρεάζει ούτε την τελική της ταχύτητα, ούτε την ασυμπτωτική της συμπεριφορά. Άρα οι «ουρές» που είναι συμπληρώματα πεπερασμένων όρων της ακολουθίας καθορίζουν τις δύο βασικές μας ιδιότητες. Αυτό μας οδηγεί στο να θεωρήσουμε την κλάση $\mathscr{F}$,

$$\mathscr{F} := \{\ \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} - T \quad \text{είναι πεπερασμένο}\}$$

όλων των «ουρών» του $\mathbb{N}$, και να εξετάζουμε τη συμπεριφορά των ακολουθιών πάνω στις «ουρές» $T \in \mathscr{F}$. Από την παραπάνω ανάλυση είναι φανερό ότι δύο ακολουθίες που ταυτίζονται πάνω σε μια ουρά $T \in \mathscr{F}$, που είναι δηλαδή ίσες τελικά για όλους τους δείκτες, έχουν και την ίδια τελική ταχύτητα σύγκλισης και την ίδια ασυμπτωματική συμπεριφορά. Είναι λογικό λοιπόν να ταυτίζουμε τέτοιες ακολουθίες. Η νέα κλάση ισοδυναμίας του μηδενός είναι κατά πολύ λεπτότερη από την αρχική και περιέχει *μόνον*, ακολουθίες που από ένα δείκτη και μετά έχουν όλους τους όρους ίσους με μηδέν, και επομένως θα μπορούσαμε να πούμε, ότι συγκλίνουν στο μηδέν με «άπειρη ταχύτητα» . Ακριβέστερα, αν $[0]$ είναι η παλιά κλάση ισοδυναμίας του μηδενός στο $\mathbb{R}$ και $[0]_N$ η νέα επί του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, δηλαδή,

$$[0]_N := \{(\alpha_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \alpha_n = 0 \quad \text{για κάθε} \quad n > n_0 \in \mathbb{N}\}$$

έχουμε ότι $\left(\frac{1}{n}\right) \in [0]_\Pi$ αλλά $\left(\frac{1}{n}\right) \notin [0]_N$. Το ίδιο συμβαίνει και με όλες τις ακολουθίες που εμφανίζονται στη διάταξη (1.1), σελ. 24, και οι οποίες αφού ανήκαν στην παλιά $[0]_\Pi$ αλλά δεν ανήκουν στη νέα $[0]_N$, αποτελούν τη βάση για την κατασκευή νέων «πραγματικών αριθμών» , που όλοι τους είναι υποψήφιοι για το ρόλο των απειροστών. ΄Ετσι τελείως φυσιολογικά και χωρίς στην ουσία περιθώρια διαφορετικής επιλογής, η αναζητούμενη σχέση ισοδυναμίας που θα διασπάσει τα άτομα του $\mathbb{R}$ και θα μας δώσει μη-συμβατικούς πραγματικούς αριθμούς είναι η ακόλουθη:

1.2.5 Ορισμός. Δύο ακολουθίες $f = (a_i)$ και $g = (b_j) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ θα λέγονται **ισοδύναμες** αν υπάρχει $T \in \mathscr{F}$ τέτοιο ώστε, $a_m = b_m$ για κάθε $m \in T$, δηλαδή

$$(a_i) \approx (b_j) \qquad (\exists T \in \mathscr{F})(\forall m \in T)[a_m = b_m].$$

[11] Για θέματα ταχύτητας σύγκλισης και σχετικά θέματα βλ. [14, σελ. 469]

Υπάρχει όμως το πρόβλημα: Είναι η σχέση $\approx$ πράγματι μια σχέση ισοδυναμίας επί του $\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$; Η απάντηση είναι καταφατική. Θα αποδείξουμε όμως πρώτα την ακόλουθη πρόταση.

1.2.6 Πρόταση. *Η κλάση $\mathscr{F}$ ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:*

(i) $\mathbb{N} \in \mathscr{F}$ *και* $\emptyset \notin \mathscr{F}$.

(ii) $A \in \mathscr{F}$ *και* $A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathscr{F}$.

(iii) $A, B \in \mathscr{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{F}$.

Proof: **(i)** Είναι φανερό, αφού $\emptyset = \mathbb{N} - \mathbb{N}$ και το $\emptyset$ είναι πεπερασμένο. Επίσης $\mathbb{N} - \emptyset = \mathbb{N}$ είναι πάντοτε αριθμησίμως άπειρο. ⊣□
(ii) Πράγματι, $A \in \mathscr{F}$ συνεπάγεται ότι το $\mathbb{N} - A$ είναι πεπερασμένο. Αλλά $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{N} - B \subseteq \mathbb{N} - A$, άρα και το $\mathbb{N} -$ είναι πεπερασμένο και άρα $B \in \mathscr{F}$. ⊣□
(iii) Επειδή $(\mathbb{N} - \ ) \cup (\mathbb{N} - \ ) = \mathbb{N} - (\ \cap \ )$ και $\mathbb{N} -$, $\mathbb{N} -$ είναι πεπερασμένα αφού τα , $\in \mathscr{F}$, έχουμε επίσης ότι και το $\mathbb{N} - (\ \cap \ )$ είναι πεπερασμένο και έτσι $\cap \ \in \mathscr{F}$. ⊣■

1.2.7 Πρόταση. *Η σχέση $\approx$ (Ορισμός 1.2.5) είναι μια σχέση ισοδυναμίας.*

Proof: Η ανακλαστική και η συμμετρική ιδιότητα είναι φανερές. Θα αποδείξουμε τη μεταβατική. Εστω $(a_n) \approx (b_n)$ και $(b_n) \approx (c_n)$. Τότε έχουμε: $A = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n = b_n\} \in \mathscr{F}$ και $B = \{n \in \mathbb{N} \mid b_n = c_n\} \in \mathscr{F}$. Άρα $\cap \ = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n = b_n = c_n\} \in \mathscr{F}$ βλ. Πρόταση 1.2.6 (iii). Αλλά C = $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n = c_n\} \supseteq A \cap B$, άρα σύμφωνα με την (ii) (Πρόταση 1.2.6), $C \in \mathscr{F}$ και επομένως $(a_n) \approx (c_n)$ ⊣■

1.2.8 Σχόλιο. Η κλάση $\mathscr{F}$ αλλά και κάθε κλάση υποσυνόλων που πληρεί τις ιδιότητες (i),(ii),(iii) (Πρόταση 1.2.6) λέγεται **φίλτρο**. Ο λόγος ίσως είναι ότι, κάθε φίλτρο ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας $\approx$ επί του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ και επομένως και ένα σύνολο πηλίκο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\approx$ που είναι μια νέα «αφαίρεση» ή «μοριοποίηση» του αρχικού συνόλου. Διαισθητικά μπορούμε να φανταστούμε ότι, κάθε κλάση συνόλων με τις ιδιότητες του φίλτρου, έχει ως συνέπεια τη δημιουργία ενός «φίλτρου» με την καθομιλουμένη έννοια. Εκτός από τις γεωμετρικές ιδιότητες, όπως η δημιουργία κλάσεων ισοδυναμίας και η αναδόμηση τον στοιχείων, κάθε φίλτρο έχει και μια «λογική σημασία» . 'Ετσι αν ερμηνεύσουμε τα υποσύνολα στοιχεία του φίλτρου, ως την «έκταση» πάνω στην οποία ισχύει μια λογική πρόταση p, δηλ. $A := \{x \in \mathbb{N} \mid p(x)\}$ και τη σχέση «$\leq$» ως συνεπαγωγή, τότε η λογική ερμηνεία των αξιωμάτων του φίλτρου είναι η ακόλουθη:

(i) Οι ταυτολογίες είναι πάντοτε αληθείς, ενώ οι αντιφάσεις πάντοτε ψευδείς.

(ii) Αν μια πρόταση p είναι αληθής και $p \Rightarrow q$ τότε και η q είναι αληθής. Δηλαδή η ιδιότητα (ii) δεν είναι τίποτα άλλο από το γνωστό λογικό κανόνα συμπερασμού, modus ponens.

(iii) Τέλος η τρίτη ιδιότητα μας λέει ότι αν δύο προτάσεις p και q είναι αληθείς τότε και η σύζευξή τους είναι αληθής. Για το λόγο αυτό ένα φίλτρο λέγεται στα πλαίσια της λογικής και «παραγωγικό ή απαγωγικό σύστημα» (deductive system).

Μέσα από αυτό το «φίλτρο» λοιπόν, φιλτράρονται τα στοιχεία του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, με το να ταξινομούνται σε κλάσεις ισοδυναμίας, των αντίστοιχων στοιχείων που ικανοποιούν κάποια ιδιότητα. Εστω για παράδειγμα ένα στοιχείο $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ και μια συγκεκριμένη ιδιότητα, π.χ. $p = \{x \mid x \geq 0\}$. Τότε αν οι όροι της ακολουθίας που έχουν την ιδιότητα p, αντιστοιχούν σ' ένα σύνολο δεικτών που ανήκει στο $\mathscr{F}$, δηλαδή αν $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \;\; \text{έχει την ιδιότητα} \;\; p\} \in \mathscr{F}$, τότε ολόκληρο το στοιχείο (a_n) διέρχεται από το «φίλτρο» και ταξινομείται στη κλάση ισοδυναμίας όλων των στοιχείων του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, που ικανοποιούν την ιδιότητα p και έχουν την ίδια ταχύτητα σύγκλισης. Με τον τρόπο αυτό δημιουργείται ένα νέο στοιχείο, του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\approx$ πλέον, που ικανοποιεί την ιδιότητα p.

Για να πούμε ότι μια ιδιότητα της δομής $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$, διέρχεται από το «φίλτρο» και κληρονομείται και στη δομή $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\approx, +, \cdot, \leq)$, δεν πρέπει να υπάρχει στοιχείο του, που διερχόμενο από το φίλτρο, αποτελεί με άλλα στοιχεία, μια κλάση ισοδυναμίας που καταστρατηγεί την ιδιότητα p. Συνοψίζοντας λοιπόν, η ιδιότητα (i) (Πρόταση 1.2.6) στην ουσία μας λέει ότι: Αν για την (a_n) ισχύει ότι κάθε όρος της, έχει την ιδιότητα p, τότε και το ολιστικό στοιχείο (a_n) έχει την ιδιότητα p και επομένως διέρχεται του φίλτρου και ταξινομείται στη κλάση ισοδυναμίας όλων των στοιχείων του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, που έχουν τη συγκεκριμένη ιδιότητα και την ίδια ταχύτητα σύγκλισης. Αν όμως,

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \text{ το } a_n \text{ έχει την ιδιότητα } p\} = \emptyset,$$

τότε και το στοιχείο (a_n) δεν έχει την ιδιότητα p.

Η ιδιότητα (ii)(Πρόταση 1.2.6), λέει ότι, αν η (a_n) έχει την ιδιότητα p, δηλαδή αν,

$$= \{n \in \mathbb{N} \mid \text{ το } a_n \text{ έχει την ιδιότητα } p\} \in \mathscr{F}$$

και το σύνολο δεικτών,

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{ το } a_n \;\; \text{ έχει την ιδιότητα } \;\; q\}$$

είναι υπερσύνολο του , δηλαδή αν $p \Rightarrow q$, τότε η (a_n) έχει επίσης και την ιδιότητα q. Ετσι αν τελικά διέρχεται του φίλτρου μια πρόταση p, ταυτόχρονα διέρχονται και όλες οι προτάσεις που συνεπάγεται η p. Για παράδειγμα, για να είναι σώμα η δομή $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\approx, +, \cdot, \leq)$ αρκεί να διέρχονται του φίλτρου τα αξιώματα του σώματος. Τέλος η (iii) (Πρόταση 1.2.6) λέει ότι αν το στοιχείο (a_n), έχει την ιδιότητα p και q τότε διέρχεται από το φίλτρο και η ιδιότητα $p \wedge q$.

Το φίλτρο $\mathscr{F}$ και η σχέση ισοδυναμίας που συνεπάγεται, κατασκευάστηκαν με στόχο να εκφράσουν τον προβληματισμό των ταχυτήτων σύγκλισης και της ασυμπτωματικής συμπεριφοράς. Ωστόσο όμως δεν επιλύεται ούτε το πρόβλημα των διαιρετών του μηδενός, ούτε διατηρείται η ιδιότητα της τριχοτομίας.

1.2.9 Παράδειγμα. **(i)** Εστω $f = (0, 1, 0, 1, \ldots)$ και $g = (1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$, τότε $f \cdot g = (0, 0, 0, ...)$ αλλά ούτε οι άρτιοι, ούτε οι περιττοί ανήκουν στο $\mathscr{F}$, έτσι τα στοιχεία f και g δεν σταθεροποιούνται γύρω ούτε από τη τιμή 0 ούτε από τη τιμή 1 και επομένως ούτε η f, ούτε η g δεν είναι μηδέν. Αν για παράδειγμα οι άρτιοι ανήκαν στο $\mathscr{F}$ τότε η f θα ήταν ίση με 1 και η g ίση με 0.

(ii) Εστω

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{αν } n \text{ περιττός} \\ -1 & \text{αν } n \text{ άρτιος} \end{cases} \tag{1.2}$$

Αν επιθυμούμε να ισχύει η ιδιότητα της τριχοτομίας στο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\approx$, θα πρέπει να μπορούμε να αποφανθούμε, ποια ακριβώς από τις ακόλουθες σχέσεις ισχύει:

$$(f > 0) \vee (f = 0) \vee (f < 0).$$

Επειδή όμως ούτε οι άρτιοι ούτε οι περιττοί ανήκουν στο $\mathscr{F}$, δεν μπορούμε να αποφανθούμε για το αν $(f > 0)$, $(f = 0)$ ή $(f < 0)$.

Τα προβλήματα που παρουσιάζονται στο Παράδειγμα 1.2.9 μπορούν να επιλυθούν, αν δημιουργήσουμε ένα φίλτρο $\mathscr{F}_M$ που να είναι επέκταση του $\mathscr{F}$, δηλαδή $\mathscr{F}_M \supseteq \mathscr{F}$ και το οποίο να ταξινομεί όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{N}$ σε «μεγάλα» τα οποία θα απαρτίζουν το $\mathscr{F}_M$ και σε μικρά που θα ανήκουν στο $\mathscr{P}(\mathbb{N}) - \mathscr{F}_M$. Η απαίτηση $\mathscr{F}_M \supseteq \mathscr{F}$ γίνεται ώστε να διατηρήσουμε τους προβληματισμούς σχετικά με τη ταχύτητα σύγκλισης, την ασυμπτωτική συμπεριφορά αλλά και τις λογικές ιδιότητες που έχουν τα φίλτρα. Από την άλλη μεριά απαιτούμε το $\mathscr{F}_M$ να είναι φίλτρο για να έχουμε τελικά μια σχέση ισοδυναμίας, αλλά και ένα παραγωγικό σύστημα.

Με τη βοήθεια του Αξιώματος της Επιλογής και φροντίζοντας να τηρούμε τις ιδιότητες (i),(ii),(iii) (Πρόταση 1.2.6), μπορούμε να ταξινομήσουμε όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{N}$ σε «μεγάλα» και σε «μικρά» που είναι συμπληρώματα μεγάλων.

Ετσι για παράδειγμα, αν ταξινομήσουμε τους αρτίους ως μεγάλο σύνολο, τότε αναγκαστικά οι περιττοί θα ταξινομηθούν ως μικρό σύνολο και αντίστροφα. Αξίζει να σημειωθεί ότι *δεν υπάρχει μοναδικός τρόπος ταξινόμησης*. Καταλήγουμε τελικά στον ακόκουθο ορισμό.

Σχήμα 1.5: Το υπερφίλτρο $\mathscr{F}_M$: Λόγω της λεπτότητας του υπερφίλτρου, όλες οι ακολουθίες (Cauchy, αποκλίνουσες, εναλλάσουσες) διέρχονται από το φίλτρο και ταξινομούνται σε κατάλληλες κλάσεις ισοδυναμίας.

1.2.10 Ορισμός. ´Ενα **υπερφίλτρο** $\mathscr{F}_M$ επί του $\mathbb{N}$ είναι ένα φίλτρο τέτοιο ώστε[12] για κάθε $\subseteq \mathbb{N}$,

$$\text{ή} \quad A \in \mathscr{F}_M \quad \text{ή} \quad \mathbb{N} - A \in \mathscr{F}_M \tag{1.3}$$

1.2.11 Πρόταση. *Αν $\mathscr{F}_M$ είναι ένα υπερφίλτρο επί του $\mathbb{N}$ και $A = {}_1 \cup {}_2 \cup \ldots \cup A_n$ τότε $A \in \mathscr{F}_M \Rightarrow A_i \in \mathscr{F}_M$ για κάποιο $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Proof: Ας υποθέσουμε ότι για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, ${}_i \notin \mathscr{F}_M$. Επειδή το $\mathscr{F}_M$ είναι υπεφίλτρο έχουμε ότι $\mathbb{N} - A_i \in \mathscr{F}_M$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots n$. Αλλά τότε $\emptyset = A \cap (\mathbb{N} - A_1) \ldots \cap (\mathbb{N} - A_n) \in \mathscr{F}_M$ που είναι άτοπο αφού $\emptyset \notin \mathscr{F}_M$. ⊣▮

Ας δούμε τώρα με πιο τρόπο η σχέση ισοδυναμίας που ορίζεται ως προς το $\mathscr{F}_M$, λύνει τα προβλήματά μας. Εστω,

$$(a_n) \approx (b_n) \quad \text{ανν} \quad \{\, n \in \mathbb{N} \mid a_n = b_n \,\} \in \mathscr{F}_M \tag{1.4}$$

και ας θεωρήσουμε πάλι τις περιπτώσεις στο Παράδειγμα 1.2.9. Επειδή με οποιαδήποτε ταξινόμηση (δεν υπάρχει μια μοναδική), ένα από τα δύο σύνολα, των αρτίων ή των περιττών, θα ταξινομηθεί ως «μεγάλο» ενώ το άλλο ως «μικρό» , θα έχουμε:

[12] Συνήθως «υπερφίλτρο» και «μεγιστικό φίλτρο» είναι ταυτόσημες έννοιες. Φίλτρα που ικανοποιούν την (1.3), λέγονται **πρώτα φίλτρα.** Για άλγεβρες του Boole, όπως π.χ. η $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, οι έννοιες του υπερφίλτρου και του πρώτου φίλτρου συμπίπτουν.

- $f \approx 0$ αν οι περιττοί ανήκουν στο $\mathscr{F}_M$, οπότε $g \approx 1$,
- $f \approx 1$ αν οι άρτιοι ανήκουν στο $\mathscr{F}_M$, οπότε $g \approx 0$.

Επίσης, αν υποθέσουμε ότι οι άρτιοι ανήκουν στο $\mathscr{F}_M$, τότε για το (ii) (Παράδειγμα 1.2.9) έχουμε,

$$f \approx -1 \quad \text{και έτσι} \quad f < 0.$$

Ετσι λοιπόν *η σχέση ισοδυναμίας που βασίζεται στο $\mathscr{F}_M$, λύνει όλα τα προβλήματα και ενσωματώνει τους σχετικούς προβληματισμούς για τη ταχύτητα σύγκλισης και την ασυμπτωτική συμπεριφορά.* Τελικά οδηγούμαστε φυσιολογικά στον ακόλουθο ορισμό:

1.2.12 Ορισμός. **(i)** Εστω $f = (a_n), g = (b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ τότε,

$$\boxed{f \approx g \quad \text{άνν} \quad \{n \in \mathbb{N} \mid a_n = b_n\} \in \mathscr{F}_M}$$

Θεωρώντας τις ακολουθίες (a_n) και (b_n) ως μεταβαλλόμενους πραγματικούς αριθμούς σε διακριτό χρόνο $\mathbb{N}$, η πιο πάνω σχέση στην ουσία ταυτίζει δύο μεταβαλλόμενους πραγαμτικούς, αν παίρνουν ίσες τιμές για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα, δηλαδή σύνολο χρονικών στιγμών που ανήκει στο $\mathscr{F}_M$.

(ii) Το σύνολο των **μη-συμβατικών αριθμών** ορίζεται ως εξής:

$$\boxed{{}^*\mathbb{R} := \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \approx}$$

Αν δε συμβολίζουμε με $[a_n]$ την κλάση ισοδυναμίας της (a_n) τότε :

- $[a_n] = [b_n]$ ανν $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n = b_n\} \in \mathscr{F}_M$.
- $[a_n] \leq [b_n]$ ανν $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \leq b_n\} \in \mathscr{F}_M$.
- $[a_n] + [b_n] = [a_n + b_n]$.
- $[a_n] \cdot [b_n] = [a_n \cdot b_n]$.
- $[0]$ είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης,
- $[1]$ είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού και $[-a_n]$ είναι το αντίθετο στοιχείο του $[a_n]$.

Αν τώρα $[a_n] \neq [0]$ δηλαδή αν $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\} \in \mathscr{F}_M$ και,

$$c_n := \begin{cases} a_n^{-1} & \text{αν } a_n \neq 0 \\ 0 & \text{αν } a_n = 0 \end{cases}$$

τότε $[a_n]^{-1} = [c_n]$ και $[a_n] \cdot [c_n] = [1]$ αφού $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \cdot c_n = 1\} = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\} \in \mathscr{F}_M$

Οι παραπάνω ορισμοί είναι εύκολο να δειχτεί ότι δεν εξαρτώνται από τις ακολουθίες - αντιπροσώπους $(a_n), (b_n)$.

Είναι εύκολο να δείξει κανείς, ότι η δομή $({}^*\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ είναι ένα διαταγμένο σώμα, βλ. Θεώρημα 1.2.13.

Με την κατασκευή του ${}^*\mathbb{R}$ συμπληρώθηκε η διαλεκτική πορεία. Αν επαναλάβουμε επί του ${}^*\mathbb{R}$ την ίδια διαδικασία, της άρνησης της άρνησης, δεν παίρνουμε άλλα νέα αντικείμενα, αφού οι κλάσεις ισοδυναμίας που παράγονται από την $\approx$, είναι οι λεπτότερες δυνατές, αναφορικά με το χρόνο $\mathbb{N}$, που ταυτόχρονα διατηρούν την αλγεβρική δομή του σώματος. Ετσι *δοθέντος ότι χρησιμοποιούμε διακριτό χρόνο, ή διακριτό πεδίο μεταβολής* π.χ. το $\mathbb{N}$, το ${}^*\mathbb{R}$ παρουσιάζεται ως ο τελικός διαλεκτικός στόχος. Αλλάζοντας όμως πεδίο μεταβολής $\mathbb{N}$ με άλλα, π.χ. ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ έχουμε καινούργια διαλεκτικά σχήματα και «πραγματικούς αριθμούς» που στη φύση τους είναι τυχαίες μεταβλητές, (βλ. [20, 21]), όπου εξετάζονται παρόμοια θέματα, αλλά σε πιο προχωρημένο επίπεδο, βλ. επίσης και το [7].

Επειδή το $\mathscr{F}_M$ παράγει τις λεπτότερες δυνατές κλάσεις ισοδυναμίας, δικαίως ονομάζεται υπεφίλτρο. Για μια εικονική παράσταση βλ. 1.5.
αποκλίνουσες, εναλλάσουσες) διέρχονται από το φίλτρο και Βλέπουμε ότι η αναγκαιότητα για την επίλυση του προβλήματος των διαιρετών του μηδενός, αλλά και της ιδιότητας της τριχοτομίας μας υποχρεώνει να ταξινομήσουμε όλα τα στοιχεία του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, σε αντίθεση με την περίπτωση του φίλτρου του Cauchy όπου υπάρχει ταξινόμηση μόνον για τις συγκλίνουσες ακολουθίες. Για παράδειγμα η ακολουθία $\left(\frac{1}{n}\right)$ και οι ισοδύναμές της δίνουν, έστω το απειροστό , η δε $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ το ^{2}, μεταξύ δε του και του ^{2}, υπάρχει για παράδειγμα το απειροστό που προέρχεται από την ακολουθία $\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)$ κ.λπ. Επίσης η κλάση ισοδυναμίας $[n]$ μας δίνει τον άπειρα μεγάλο αριθμό $= \frac{1}{}$, κ.λπ. Από την άλλη μεριά η εναλλάσουσα ακολουθία,

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{αν } n \in \mathbb{N}_{3k} := \{3k \mid k = 0, 1, 2 \ldots\} \\ 0 & \text{αν } n \in \mathbb{N}_{3k+1} \\ -1 & \text{αν } n \in \mathbb{N}_{3k+2} \end{cases} \tag{1.5}$$

εξαναγκάζεται από την ύπαρξη του υπερφίλτρου, να πάρει μόνον μια τιμή (τη τιμή με την οποία είναι ίση για ένα «μεγάλο» χρονικό διάστημα.) και να ταξινομηθεί στη κλάση ισοδυναμίας της σταθερής αυτής τιμής. Αυτό το συμπεραίνουμε από την Πρόταση 1.2.11. Με τον τρόπο αυτό «απαλλασσόμαστε» από τις ενοχλητικές εναλλάσουσες ακολουθίες «εξορίζοντάς τες» σε μια κλάση ισοδυναμίας κατά ένα συνεπή τρόπο. Με άλλα λόγια η ύπαρξη του υπερφίλτρου επιβάλλει ένα «αυστηρό καθεστώς» και μια οστεοποίηση επί του $\mathbb{R}$, με άκαμπτη εξωτερικά τάξη. *Κάθε μεταβολή έχει περιοριστεί στο εσωτερικό των κλάσεων ισοδυναμίας και γι' αυτό είναι εξωτερικά αθέατη, αντιλαμβανόμαστε δηλαδή το $\mathbb{R}$, ως μια δομή με σταθερά στοιχεία.* Δηλαδή *στο $^*\mathbb{R}$ η μεταβλητότητα και η ανάπτυξη, επιτρέπεται στο εσωτερικό των κλάσεων ισοδυναμίας, ενώ οι ίδιες οι κλάσεις εξωτερικά παρουσιάζουν μια απόλυτη σταθερότητα.* Η όλη κατάσταση είναι ανάλογη μ' αυτήν ενός ευσταθούς μορίου, στο εσωτερικό του οποίου υπάρχουν μεταβαλλόμενα ηλεκτρόνια, λεπτόνια και άλλα σώματια.

Αξίζει εδώ να σημειώσουμε ότι οι αλγεβρικές δομές του δακτυλίου, της ομάδας, και γενικότερα του μονοειδούς, είναι δομές που επιτρέπουν την έννοια της μεταβολής στο εσωτερικό τους και γι' αυτό οι αναπαραστάσεις τους σχετίζονται με χώρους συναρτήσεων. Είναι αξιοσημείωτο ότι το $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ αλλά και κάθε κλάση ισοδυναμίας ενός πεπερασμένου στοιχείου είναι δακτύλιοι.

Για το $^*\mathbb{R}$ υπάρχουν τρεις θεάσεις: Μια μακροσκοπική «διά γυμνού οφθαλμού» , μια μικροσκοπική με «απειροστικό μικροσκόπιο» και μια τελεσκοπική με «άπειρης δύναμης τηλεσκόπια» . Διά γυμνού οφθαλμού αντιλαμβανόμαστε τις κλάσεις ισοδυναμίας των πεπερασμένων υπερπραγματικών που συμπίπτουν με τους συμβατικούς πραγματικούς αριθμούς $\mathbb{R}$. *Στην περίπτωση αυτή της μακροσκοπικής θέασης η ισότητα στην ουσία συμπίπτει με τη σχέση «$\approx$» του άπειρα κοντά.* Από την άλλη μεριά, με τα μικροσκόπια άπειρης διαχωριστικής δύναμης, αντιλαμβανόμαστε απειροστικές μεταβολές και λεπτομέρειες στο εσωτερικό των κλάσεων ισοδυναμίας του $\mathbb{R}$, δηλαδή βλέπουμε απειροστά, ενώ με τα τηλεσκόπια άπειρα μεγάλους αριθμούς. *Η ισότητα στην περίπτωση αυτή είναι η απόλυτη ισότητα «=» .*

Απ' όλα τα παραπάνω βγαίνει αβίαστα το εξαιρετικά σπουδαίο συμπέρασμα--σύνθημα[13] ότι:

> *Τα στοιχεία έχουν δομή, και επομένως,*
> *οι δομές συγκροτούνται σε επίπεδα πραγματικότητας !*

΄Εξ 'άλλου οποιαδήποτε επισύναψη σημείων π.χ. στο $\mathbb{R}$ το οποίο είναι πλήρες και «συνεχές» δε θα μπορούσε να είναι δυνατή παρά μόνον αν τα ιδεατά αυτά σημεία προέρχονται από μια κάποια «μικροσκοπική ή μεγασκοπική πραγματικότητα!» . Αυτό ισχύει και για τους υπερπραγματικούς πραγματικούς αριθμούς αλλά και για τους μιγαδικούς αριθμούς βλ. **??**. Με το θέμα όμως αυτό θα ασχοληθούμε και στη συνέχεια.

[13] Το συμπέρασμα αυτό είναι ένα κεντρικό σημείο για τα σύγχρονα μαθηματικά, και είναι ίσως η ουσία των Θεωρημάτων Löwenheim -- Skolem στη Μαθηματική Λογική.

1.2.7 Η Δομή των μη-Συμβατικών Πραγματικών Αριθμών και οι Σχετικές Γεωμετρικές Παραστάσεις

Με τη χρήση των ιδιοτήτων του $\mathscr{F}_M$, είναι σχετικά εύκολο να αποδείξει κανείς το ακόλουθο θεώρημα.

1.2.13 Θεώρημα. *Το $^*\mathbb{R}$ είναι ένα διαταγμένο σώμα.*

Proof: Για παράδειγμα η επιμεριστική ιδιότητα αποδεικνύεται ως εξής: Εστω $[a_n], [b_n], [c_n] \in {}^*\mathbb{R}$, τότε,

$$\begin{aligned}
[a_n] \cdot ([b_n] + [c]) &= [a_n] \cdot ([b_n + c_n]) \\
&= [a_n \cdot (b_n + c_n)] \\
&= [(a_n \cdot b_n) + (a_n \cdot c_n)] \\
&= [a_n] \cdot [b_n] + [a_n] \cdot [c_n]. \qquad \dashv
\end{aligned}$$

Το $\mathbb{R}$ μπορεί να εμφυτευτεί στο $^*\mathbb{R}$ ως εξής :

$$i : \mathbb{R} \hookrightarrow {}^*\mathbb{R} \;\; /\!\!/ \;\; r \longmapsto i(r) = [r, r, \ldots, r, \ldots]$$

1.2.14 Πρόταση. *Η εμφύτευση $i : \mathbb{R} \hookrightarrow {}^*\mathbb{R}$ είναι ένας ομομορφισμός που διατηρεί τη διάταξη. Με διαφορετική διατύπωση, τα $\mathbb{R}$ και $i(\mathbb{R})$ είναι ισομορφικά σώματα και το $i(\mathbb{R})$ είναι ένα γνήσιο υποσώμα του $^*\mathbb{R}$.*

Proof: Η συνάρτηση i είναι $1-1$, γιατί αν $i(r) = i(s)$ τότε $[r, r, \ldots] = [s, s, \ldots]$ και άρα $r = s$. Είναι ακόμα φανερό ότι η $i(\cdot)$ διατηρεί τις πράξεις και τη διάταξη. Για παράδειγμα,

$$i(r) + i(s) = [r, r, \ldots] + [s, s, \ldots] = [r + s, r + s, \ldots] = i(r + s),$$

και αν $r < s$ τότε $i(r) < i(s)$ αφού $[r, r, \ldots] < [s, s, \ldots]$ ισχύει για κάθε n $\in \mathbb{N}$ και το $\mathbb{N} \in \mathscr{F}_N$.

Τέλος η $i(\cdot)$ δεν είναι επί, γιατί αν $= [1, 2, 3, \ldots]$, τότε το δεν είναι δυνατόν να είναι ίσο με κανένα $[r, r, \ldots]$ αφού το σύνολο $A = \{\, n \in \mathbb{N} \mid r = n \,\}$ είναι το πολύ μονοσύνολο, δηλαδή πεπερασμένο και έτσι $A \notin \mathscr{F}_M$. Άρα $> [r, r, \ldots]$ δηλαδή $\{\, n \in \mathbb{N} \mid n > r \,\} \in \mathscr{F}_M$ για κάθε $r \in \mathbb{R}$ και έτσι $> r$ για κάθε $r \in \mathbb{R}$. Το λέγεται **άπειρα μεγάλος ακέραιος**, το δε $\frac{1}{} = [1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots]$ είναι ένα **απειροστό** που επίσης δεν ανήκει στο $i(\mathbb{R})$. $\dashv$

1.2.15 Ορισμός. Για κάθε $r = [r_n] \in {}^*\mathbb{R}$, ορίζουμε τη συνάρτηση της **απόλυτης τιμής** ως ακολούθως:

$$|\cdot| : {}^*\mathbb{R} \longrightarrow {}^*\mathbb{R}_+ \;\; /\!\!/ \;\; r \longmapsto |\, r \,| = [|\, r_n \,|]$$

1.2.16 Πρόταση. *Για κάθε* $r = [r_n] \in {}^*\mathbb{R}$, *έχουμε:*

$$| r |= \begin{cases} r & \textit{αν } r > 0 \\ 0 & \textit{αν } r = 0 \\ -r & \textit{αν } r < 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

Proof: Εχουμε ότι,

$$\begin{aligned} [|r_n|] &= \begin{cases} [r_n] & \text{αν } \{\, n \in \mathbb{N} \,|\, r_n > 0 \,\} \in \mathscr{F}_M \\ 0 & \text{αν } \{\, n \in \mathbb{N} \,|\, r_n = 0 \,\} \in \mathscr{F}_M \\ -[r_n] & \text{αν } \{\, n \in \mathbb{N} \,|\, r_n < 0 \,\} \in \mathscr{F}_M \end{cases} \\ &= \begin{cases} [r_n] & \text{αν } [r_n] > 0 \\ 0 & \text{αν } [r_n] = 0 \\ -r & \text{αν } [r_n] < 0 \end{cases} \\ &= |[r_n]| = |r| \qquad \dashv \end{aligned}$$

1.2.17 Ορισμός. Εστω $x, y \in {}^*\mathbb{R}$ τότε:

(i) Το x λέγεται **πεπερασμένο (finite) ή περιορισμένο (limited)**[14] ανν $| x |< n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, **άπειρος ή απεριόριστος** δε ανν $| x |> n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Το x λέγεται **απειροστό** (συμβολικά $x \approx 0$) αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $| x |< \frac{1}{n}$

(iii) **Το x είναι άπειρα κοντά στο** y (συμβολικά $x \approx y$) ανν $x - y \approx 0$. (Στο εξής θα ταυτίζουμε τα $i(x) \equiv x,\ x \in \mathbb{R}$).

Είναι προφανές ότι κάθε πεπερασμένος υπερπραγματικός $r \in {}^*\mathbb{R}$, περιβάλλεται από ένα **νέφος απειροστών**, όπως ο πυρήνας ενός ατόμου περιβάλλεται από ηλεκτρόνια. Αν μάλιστα περιοριστούμε στους πεπερασμένους υπερπραγματικούς και ταυτίσουμε όλους όσους είναι άπειρα κοντά, δηλαδή όλους όσους βρίσκονται στο ίδιο νέφος, τότε παίρνουμε πάλι τους συμβατικούς πραγματικούς. Ετσι φυσιολογικά οδηγούμαστε στον παρακάτω ορισμό:

1.2.18 Ορισμός. **(i)** Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε τη **μονάδα του** x ως εξής:

$$m(x) := \{\, y \in {}^*\mathbb{R} \mid x \approx y \,\} \quad \textbf{(το νέφος απειροστών γύρω απ' το } x\textbf{)}$$

[14]Συνήθως χρησιμοποιούμε το «πεπερασμένο» για το Καντοριανό πεπερασμένο και το «περιορισμένο» για το μη-Καντοριανό πεπερασμένο, που όμως εδώ δε θα έχουμε την ευκαιρία να το χρησιμοποιήσουμε.

(ii) Για κάθε $x \in {}^*\mathbb{R}$ ορίζουμε το **γαλαξία** του ως:

$$G(x) = \{y \in {}^*\mathbb{R} \mid x - y \quad \text{είναι πεπερασμένο}\}$$

δηλαδή το $G(x)$ είναι το σύνολο όλων όσων απέχουν πεπερασμένη απόσταση από το x.

Το $G(0)$ συμβολίζεται συνήθως και με το σύμβολο του Landau $\mathcal{O}$ (Ο μεγάλο). Για κάθε $a \in G(0)$,

- $m(a) =$ «το σύνολο όλων των άπειρα κοντά στο α»
- $m(0) =$ «το σύνολο των απειροστών» που θα το συμβολίζουμε επίσης και με $\mathcal{o}$, (ο μικρό).

Επίσης, αν ≈ 0, δηλαδή αν $\in m(0)$, τότε το σύνολο,

$$G\left(\frac{1}{}\right) = \{\frac{1}{} + x \mid x \in G(0)\}$$

είναι όλοι οι απείρως μεγάλοι υπερπραγματικοί, που απέχουν πεπερασμένη απόσταση από τον απείρως μεγάλο υπερπραγματικό $\frac{1}{}$.

1.2.19 Θεώρημα. **(i)** *Ο γαλαξίας του μηδενός $G(0) \equiv \mathcal{O}$ είναι ως σύνολο, κλειστό ως προς τις πράξεις, της πρόσθεσης, αφαίρεσης και πολλαπλασιασμού.*

(ii) *Η μονάδα του μηδενός $m(0) \equiv \mathcal{o}$, είναι κλειστή ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης, αφαίρεσης και επιπλέον, το γινόμενο ενός απειροστού και ενός πεπερασμένου ισούται πάντοτε με απειροστό, δηλαδή :*

(α) $, \in m(0) \Rightarrow \pm \in m(0)$

(β) $\in m(0)$ *και* $b \in G(0) \Rightarrow \cdot b \in m(0)$

Proof: **(i)** Εστω $b, c \in G(0)$. Τότε υπάρχουν $r, s \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε, $\mid b \mid < r$ και $\mid c \mid < s$. Άρα,

$$\begin{aligned} \mid b + c \mid &< r + s \\ \mid b - c \mid &< r + s \\ \mid b \cdot c \mid &< r \cdot s \end{aligned}$$

Ετσι, $b + c, b - c$ και $b \cdot c$ ανήκουν στο $G(0)$. $\dashv\Box$

(ii) α: Εστω $, \approx 0$. Άρα $\mid \quad \mid < \frac{r}{2}, \mid \quad \mid < \frac{r}{2}$ για κάθε $r \in \mathbb{R}^+$ και επομένως,

$| \ \pm \ | < r$, για κάθε $r \in \mathbb{R}^+$ και επομένως $\ \pm \ \in m(0)$. $\dashv\Box$

(ii) β: Εστω $\ \approx 0$ και $b \in G(0)$. Επειδή $b \in G(0)$, υπάρχει $t \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε, $| \ b \ | < t$. Αλλά για κάθε $r \in \mathbb{R}^+$, επειδή $\ \approx 0$ έχουμε ότι, $| \ \ | < \frac{r}{t}$. Άρα $| \ b \cdot \ \ | < t \cdot \frac{r}{t} = r$ για κάθε $r \in \mathbb{R}^+$, δηλαδή $b \cdot \ \approx 0$. $\dashv\blacksquare$

1.2.20 Σχόλιο. Το πιο πάνω Θεώρημα μας λέει ότι:

- Το $G(0)$ είναι ένας υποδακτύλιος του $^*\mathbb{R}$.
- Το $m(0)$ είναι ένα ιδεώδες του $G(0)$. Είναι δυνατόν να δειχτεί ότι είναι και μεγιστικό (maximal) ιδεώδες του $G(0)$. Τότε όμως θα έχουμε και $G(0)/m(0) \cong \mathbb{R}$.

Αυτό που απομένει τώρα είναι να έχουμε έναν επίσημο τρόπο σύνδεσης του $\mathbb{R}$ με το $G(0) \equiv \mathcal{O}$, που σε τελευταία ανάλυση είναι το $\mathbb{R}$, του οποίου τα άτομα έχουν διασπαστεί για να δώσουν τις μονάδες ή τα νέφη $m(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι *σε κάθε μονάδα ή νέφος, υπάρχει πράγματι ένας μοναδικός συμβατικός πραγματικός*.

1.2.21 Θεώρημα. (του συμβατικού μέρους) *Κάθε $x \in G(0)$, βρίσκεται απείρως κοντά σ' ένα μοναδικό συμβατικό πραγματικό $r \in \mathbb{R}$. Δηλαδή, κάθε πεπερασμένη μονάδα (δηλ. μονάδα πεπερασμένου υπερπραγματικού) περιέχει ένα μοναδικό συμβατικό πραγματικό αριθμό.*

Proof: **(i) Μοναδικότητα :** Εστω $r, s \in \mathbb{R}$ με $r \approx x$ και $s \approx x$, δηλαδή έστω $r, s \in m(x)$. Τότε όμως $r - s \in m(0)$ και ταυτόχρονα έχουμε ότι $r - s \in \mathbb{R}$. Άρα $r - s = 0$, αφού το 0 είναι το μαναδικό απειροστό του $\mathbb{R}$. Ετσι $r = s$. $\dashv\Box$
(ii) Υπαρξη: Εστω $A = \{s \in \mathbb{R} : s < x\}, x \in G(0)$. Επειδή $x \in G(0)$ υπάρχει $r \in \mathbb{R}$ με $x < r$, έτσι το είναι φραγμένο στο $\mathbb{R}$ και άρα λόγω της πληρότητας του $\mathbb{R}$, υπάρχει το $a = \sup A$. Θα πρέπει να δείξουμε τώρα ότι το $x - a$ είναι απειροστό. Εστω ότι δεν είναι, τότε υπάρχει $r \in \mathbb{R}^+$ με $0 < r < | \ x - \ \ |$. Αν $x - a > 0$, τότε $a + r < x$, που είναι άτοπο, αφού $a = \sup A$. Αν $x - a < 0$ τότε πάλι έχουμε $x < \ - r$, που επίσης αντιφάσκει με την επιλογή του a. Άρα τελικά έχουμε $x - \ \approx 0$ ή $x \approx a$. $\dashv\blacksquare$

Το παραπάνω θεώρημα μας επιτρέπει να ορίσουμε την επιθυμητή συνάρτηση που συνδέει το $\mathbb{R}$, τη «μακροσκοπική εικόνα των πραγματικών» , με το $G(0) \equiv \mathcal{O}$, τη «μικροσκοπική εικόνα των πραγματικών» .

1.2.22 Ορισμός. Ορίζουμε τη **συνάρτηση του συμβατικού μέρους** ως ακολούθως:

$$\mathrm{st}(\cdot) : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R} \ /\!\!/ \ x \mapsto \mathrm{st}(x)$$

όπου το $\mathrm{st}(x)$ είναι ο μοναδικά ορισμένος $r \in \mathbb{R}$, τέτοιος ώστε $x \approx r$. Η τιμή της συνάρτησης $\mathrm{st}(x)$ συμβολίζεται και ως ${}^{o}x$ και λέγεται το **συμβατικό μέρος του x**.

Ετσι κάθε $x \in \mathcal{O} \equiv G(0)$ έχει μια μοναδική ανάλυση.

$$x = r +$$

όπου $r = \mathrm{st}(x) \in \mathbb{R}$ και $\in m(0) \equiv o$.

1.2.23 Θεώρημα. *Η συνάρτηση* $\mathrm{st} : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}$ *έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(i) *Η* st *είναι επί.*

(ii) $\mathrm{st}(x \pm y) = \mathrm{st}(x) \pm \mathrm{st}(y)$.

(iii) $\mathrm{st}(x \cdot y) = \mathrm{st}(x) \cdot \mathrm{st}(y)$.

(iv) $\mathrm{st}(x/y) = \mathrm{st}(x)/\mathrm{st}(y)$ *άν* $\mathrm{st}(y) \neq 0$.

(v) *Αν* $x \leq y$ *τότε* $\mathrm{st}(x) \leq \mathrm{st}(y)$.

(vi) $\mathrm{st}(r) = r$ *για κάθε* $r \in \mathbb{R}$.

(vii) *Αν* $y = \sqrt{x}$ *τότε* $\mathrm{st}(y) = \sqrt{\mathrm{st}(x)}$.

Proof:

(i) Εστω $r \in \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $\in m(0)$, $r +$ είναι ένας μοναδικά ορισμένος αριθμός στο $G(0)$. Αρα η st είναι επί. $\dashv\Box$

(ii) Επειδή $\mathrm{st}(x) \approx x$ και $\mathrm{st}(y) \approx y$,

$$\mathrm{st}(x) \pm \mathrm{st}(y) \approx x + y \qquad (*)$$

Επίσης,

$$\mathrm{st}(x \pm y) \approx x + y \qquad (**)$$

Από τις $(*)$ και $(**)$ έχουμε ότι

$$\mathrm{st}(x \pm y) \approx \mathrm{st}(x) \pm \mathrm{st}(y),$$

επειδή όμως $\mathrm{st}(x \pm y), \mathrm{st}(x), \mathrm{st}(y) \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι $\mathrm{st}(x \pm y) = \mathrm{st}(x) \pm \mathrm{st}(y)$. $\dashv\Box$

(iii) Αποδεικνύεται όμοια με την (ii). $\dashv\Box$

(iv) $\mathrm{st}(x) = \mathrm{st}\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = \mathrm{st}\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \mathrm{st}(y)$, άρα $\mathrm{st}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\mathrm{st}(x)}{\mathrm{st}(y)}$. ⊣□

(v) Αν $x \leq y$ τότε $x = \mathrm{st}(x) +$ και $y = \mathrm{st}(y) +$, για , $\in m(0)$ και $\mathrm{st}(x) + \leq \mathrm{st}(y) +$ ή $\mathrm{st}(x) \leq \mathrm{st}(y) + (-)$. Επειδή $(-) \approx 0$, τότε για κάθε $r \in \mathbb{R}^+, (-) < r$ έτσι για κάθε $r \in \mathbb{R}, \mathrm{st}(x) < \mathrm{st}(y) + r$, άρα $\mathrm{st}(x) \leq \mathrm{st}(y)$. ⊣□

(vi) Προφανές. ⊣□

(vii) Αν π.χ. $x > 0$ και $y = \sqrt{x}$ τότε $y^2 = x$ και $\mathrm{st}(x) = \mathrm{st}(y^2) = [\mathrm{st}(y)]^2$ λόγω της (iv). Άρα $\mathrm{st}(y) = \sqrt{\mathrm{st}(x)}$. ⊣■

Συνήθως στην πράξη, όταν έχουμε να υπολογίσουμε συμβατικά μέρη ακολουθούμε μια διαδικασία τριών βημάτων [35]:

ΒΗΜΑ 1: Πρώτα εκτελούμε τις πράξεις μεταξύ υπερπραγματικών αριθμών, χρησιμοποιώντας τα αξιώματα του σώματος $^*\mathbb{R}$.

ΒΗΜΑ 2: Στη συνέχεια εκτελούμε τις πράξεις που περιέχουν τη συνάρτηση του συμβατικού μέρους, και

ΒΗΜΑ 3: Τέλος εκτελούμε τις πράξεις μεταξύ των συμβατικών πραγματικών.

Εστω για παράδειγμα ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{st}\left(\frac{3H^3 + 8H^2 - 5H}{4H^3 - 7H^2 + 2H}\right), \quad \text{οπού θετικός άπειρος}$$

Επειδή και ο παρανομαστής και ο αριθμητής είναι άπειροι αριθμοί δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τις ιδιότητες της συνάρτησης st, γιατί το πεδίο ορισμού της είναι ο γαλαξίας του μηδενός. Ετσι εκτελούμε πρώτα τις υπερπραγματικές πράξεις :

$$c = \frac{3H^3 + 8H^2 - 5H}{4H^3 - 7H^2 + 2H} = \frac{3 + 8H^{-1} - 5H^{-2}}{4 - 7H^{-1} + 2H^{-2}}$$

Αλλά τα H^{-1}, H^{-2}, είναι απειροστά, έτσι,

$$\begin{aligned} \mathrm{st}(c) &= \mathrm{st}\left(\frac{3 + 8H^{-1} - 5H^{-2}}{4 - 7H^{-1} + 2H^{-2}}\right) \\ &= \frac{\mathrm{st}(3) + 8\,\mathrm{st}(H^{-1}) - 5\,\mathrm{st}(H^{-2})}{\mathrm{st}(4) - 7\,\mathrm{st}(H^{-1}) + 2\,\mathrm{st}(H^{-2})} = \frac{3 + 0 - 0}{4 - 0 + 0} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Γεωμετρικές Παραστάσεις.

Η γεωμετρική παράσταση του ${}^*\mathbb{R}$, θα προκύψει από τη δυνατότητα θέασης του ${}^*\mathbb{R}$, από τη μια μεριά μακροσκοπικά **«διά γυμνού οφθαλμού»** και από την άλλη μικροσκοπικά, όπου αντιλαμβανόμαστε τις απειροστικές λεπτομέρειες και τηλεσκοπικά όπου αντιλαμβανόμαστε τη δομή του απείρου.

Είναι φανερό λοιπόν, ότι ακόμη και για τον «απόλυτο Καντοριανό παρατηρητή» , υπάρχει ένας «ορίζοντας» αντίληψης, που εκτείνεται και περιορίζει τη θέαση και προς το μικροσκοπικό και προς το μεγασκοπικό. Για τον απόλυτο Καντοριανό παρατηρητή λοιπόν υπάρχουν περιορισμοί στην ικανότητα διάκρισης και αντίληψης της μικροσκοπικής και μεγασκοπικής λεπτομέρειας και μόνον μέσα από μικροσκόπια και τηλεσκόπια ο ορίζοντας μπορεί να διευρυνθεί.

Η συνηθισμένη γεωμετρική παράσταση του $\mathbb{R}$ ως μιας προσανατολισμένης ευθείας, συμπίπτει με τη μακροσκοπική εικόνα της ευθείας των πραγματικών αριθμών, όπου στην ουσία βλέπουμε μόνον τα συμβατικά μέρη των πεπερασμένων υπερπραγματικών, χάνοντας τελείως από το πεδίο οράσεως την απειροστική λεπτομέρεια. Για να αντιληφθούμε τις απειροστικές λεπτομέρειες, θα χρειαστεί να δούμε την πραγματική ευθεία, τοπικά και μέσα από μικροσκόπια άπειρης διαχωριστικής δύναμης.

Είναι γνωστό βέβαια ότι οι δύο διαφορετικοί κόσμοι, $\mathbb{R}$ και ${}^*\mathbb{R}$ συνδέονται με τη συνάρτηση του συμβατικού μέρους $\mathrm{st}(\cdot)$. Ετσι για παράδειγμα, οι απειροστικές λεπτομέρειες γύρω από το $a \in \mathbb{R}$, είναι ακριβώς η μονάδα του a, δηλαδή,

$$m(a) = \mathrm{st}^{-1}(a) \quad a \in \mathbb{R}.$$

Η μονάδα όμως του a περιέχει ένα τεράστιο ποσό, απειροστικής λεπτομέρειας, που είναι αδύνατων να θεαθεί ταυτόχρονα. Η θέαση και επομένως και η γεωμετρική αντίληψη, θα πρέπει να γίνεται σε συγκεκριμένα επίπεδα ταχυτήτων σύγκλισης. Η οπτική εικόνα θα παριστάνει τοπικά, τις διαφορετικές ασυμπτωτικές συμπεριφορές για δοσμένη ταχύτητα σύγκλισης.

Σε μια μεγέθυνση λοιπόν, με άπειρη διαχωριστική δύναμη $\frac{1}{}$ όπου $= [\frac{1}{n}]$, είναι δυνατόν να αντιληφθούμε το $2 = [\frac{2}{n}]$ κ.λπ., αλλά είναι αδύνατο να αντιληφθούμε απειροστικές λεπτομέρειες της τάξης του ^{2}, ή και μεγαλύτερης τάξης.

Ας δούμε όμως πρώτα μερικά παραδείγματα μεγεθύνσεων και σμικρύνσεων: Θεωρούμε τη συνάρτηση,

$$_{a,} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ /\!\!/ \ x \longmapsto {}_{a,}(x) = \frac{x-a}{}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad > 0.$$

Κάτω από τη συνάρτηση $_{a,}$, το διάστημα $= [a-1, a+1]$ μήκους 2, μετασχηματίζεται στο $_{a,}() = [\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$ μήκους 1, δηλαδή το υποδιπλασιάστηκε όταν $= 2$. Αν $= \frac{1}{2}$ τότε έχουμε :

$$_{,1/2}() = [-2, 2]$$

δηλαδή έχουμε διπλασιασμό. Είναι λοιπόν φανερό ότι όταν $0 < \; < 1$, τότε έχουμε μεγέθυνση, ενώ όταν $\; > 1$, τότε έχουμε σμίκρυνση. Είναι προφανές ότι αν το $\; \in m(0)$, είναι δηλαδή απειροστό, τότε θα έχουμε άπειρα μεγάλη μεγέθυνση. Για να αντιληφθούμε λοιπόν απειροστικές λεπτομέρειες μεγέθους , γύρω από το $a \in \mathbb{R}$, πρέπει να εστιάσουμε το μικροσκόπιο ${}_{a,}$ στο a, δηλαδή έχουμε τη συνάρτηση:

$$ {}_{a,} : m(a) \longrightarrow \mathbb{R} \;/\!\!/\; x \longmapsto {}_{a,}(x) = \mathrm{st}[\frac{x-a}{}]. $$

Κάτω από τη συνάρτηση ${}_{a,}$, το σημείο εστίασης $a \in \mathbb{R}$, απεικονίζεται στο μηδέν του προσανατολισμένου άξονα μεγέθυνσης, κάθε δε σημείο $x \in m(a)$ που γράφεται ως $x = a + r, \quad r \in \mathbb{R}$ απεικονίζεται στο σημείο $r \in \mathbb{R}$, ενώ το $a +$ στη μονάδα του απειροστικού άξονα μεγέθυνσης. *Ο ρόλος της συνάρτησης* st *στον ορισμό της* ${}_{a,}$*, είναι για να εξαφανίζει από το πεδίο όρασης, απειροστικές λεπτομέρειες υψηλότερης τάξης από αυτήν του . Ταυτόχρονα λεπτομέρειες χαμηλότερης τάξης βρίσκονται εκτός πεδίου όρασης.* Για παράδειγμα το σημείο $a + {}_2 \in m(a)$ απεικονίζεται στο,

$$ \mathrm{st}[\frac{a + {}^2 - a}{}] = \mathrm{st}[] = 0 $$

Δηλαδή το $a +$ στη μεγέθυνσή μας δε φαίνεται και συμπίπτει με το μηδέν του μικροσκοπίου μας. Τελικά έχουμε τη γεωμετρική παράσταση του Σχήματος 1.6: Ο άξονας του μικροσκοπίου είναι βαθμολογημένος με βάση το , γι' αυτό κατά

Σχήμα 1.6: Το $\; \in \mathbb{R}$ στο μικροσκόπιο συμπίπτει με το 0 της διαβάθμισης του μικροσκοπίου.

κανόνα αντί του ${}_{a,}(a+r) = r$, θα γράφουμε $a+r$, δηλαδή την πραγματική θέση του $a + r$ στο ${}^*\mathbb{R}$.

Μια άλλη γεωμετρική παράσταση [29] για το σύνολο των πεπερασμένων στοιχείων $G(0) \equiv \mathcal{O}$ θυμίζει περισσότερο την παράσταση των μιγαδικών αριθμών, βλ. το Σχήμα 1.7 αλλά και τα σχόλια στην σελίδα **??**, και δίνεται με βάση την ακόλουθη συνάρτηση:

$$: G(0) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \;\; /\!\!/ \;\; x \mapsto (r,)$$

όπου $r = \mathrm{st}(x)$ και $= x - r \in m(0)$. Δηλαδή έχουμε : Ο κατακόρυφος άξο-

Σχήμα 1.7: Γεωμετρική παράσταση της $^*\mathbb{R}$ ως δακτύλιος πηλίκο ως προς το ιδεώδες $m(0)$.

νας στην παράσταση του Σχήματος 1.7, είναι το ιδεώδες των απειροστών στον δακτύλιο $G(0)$ (ένα είδος φανταστικού άξονα, όπως ίσως θα έλεγε ο Gauss!), ενώ ο οριζόντιος άξονας, η συνήθης πραγματική ευθεία. Για κάθε πραγματικό αριθμό $s \in \mathbb{R}$, η μονάδα του $m(s)$ είναι η s-μεταφορά της $m(0)$. Για κάθε $r, s \in \mathbb{R}$, οι μονάδες $r + m(0)$ και $s + m(0)$, διατάσσονται όπως και τα πραγματικά τους μέρη. Ετσι κάθε στοιχείο της $m(0)$ είναι μικρότερο κάθε θετικού πραγματικού. Αν τώρα θεωρήσουμε ότι συμπιέζουμε κάθε μονάδα στο συμβατικό της μέρος, π.χ. αν συμπιέσουμε την $s + m(0)$, στο s, τότε παίρνουμε τη γνωστή μας πραγματική ευθεία, που στερείται κάθε απειροστικής λεπτομέρειας. Η η μονάδα λοιπόν $s + m(0)$ είναι μια εικονική θέαση «όλης της μονάδας» , παρόμοια με τη θέαση μέσα από απειροστικά μικροσκόπια, στην οποία όμως είναι αδύνατη μια τέτοια ταυτόχρονη θέαση.

Οσο για τους άπειρα μεγάλους αριθμούς $H = \frac{1}{\ } \in {}^*\mathbb{R} - \mathbb{R}, \ \ \in m(0)$, μπορούμε να έχουμε μια γεωμετρική αντίληψη μέσα από τηλεσκόπια άπειρης δύναμης, δηλαδή συναρτήσεις της μορφής $(x) := x - H$. Για περισσότερα πάνω σε μικροσκόπια και τηλεσκόπια, βλ. τα, [35, 36], και [53]. Η τελική γεωμετρική παράσταση του $^*\mathbb{R}$ είναι αυτή του Σχήματος 1.8. Μπορούμε επίσης να γενικεύσουμε τους παραπάνω ορισμούς και στην περίπτωση του επιπέδου. Εστω $(a, b) \in \mathbb{R}$, τότε

$$: m(a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \;\; /\!\!/ \;\; (x, y) \mapsto {}_{a,} = \mathrm{st}[\left(\frac{x-a}{\ }, \frac{y-b}{\ }\right)]$$

Σχήμα 1.8: Γεωμετρική παράσταση της $^*\mathbb{R}$ με τη χρήση απειροστικών μικροσκοπίων και τηλεσκοπίων.

Θα χρησιμοποιήσουμε κύρια το πιο πάνω μικροσκόπιο για την αποκάλυψη απειροστικών λεπτομερειών, σε συγκεκριμένα σημεία (a, b) των γραφημάτων συναρτήσεων. Στη συνέχεια θα δώσουμε μερικά βασικά παραδείγματα.

1.2.24 Παραδείγματα. **(i)** Για υπερπραγματικό γράφημα του ημικυκλίου $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, βλ. το Σχήμα 1.9. Στο πεδίο του μικροσκοπίου βλέπουμε πάντοτε την εφαπτόμενη, εφ' όσον υπάρχει, στο εν λόγω σημείο.

(ii) Για το υπερπραγματικό γράφημα της συνάρτησης $f(x) = x$, βλ. το Σχήμα 1.10.

(iii) Για το υπερπραγματικό γράφημα της $y = \mathrm{st}(x)$ βλ. το Σχήμα 1.11. (εσωτερικά) και αλλιώς μακροσκοπικά (εξωτερικά).

Το Σύστημα ($\mathbb{R}$, $\mathbb{R}, *$) Πρώτα θα πρέπει να πούμε ότι υπάρχει ένας μετασχηματισμός που μετασχηματίζει (επεκτείνει) , μαθηματικές οντότητες που αναφέρονται στο $\mathbb{R}$, σε μαθηματικές οντότητες που αναφέρονται στο $^*\mathbb{R}$.
Εστω $\subseteq \mathbb{R}$, τότε ορίζουμε :

$$\boxed{{}^*A = \{[a_n] \in {}^*\mathbb{R} \mid \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in A\} \in \mathscr{F}_M\}} \qquad (1.7)$$

Σχήμα 1.9: Το υπερπραγματικό γράφημα του ημικυκλίου.

Σχήμα 1.10: Το υπερπραγματικό γράφημα της $f(x) = x$.

Ετσι κάθε ακολουθία $_n$ υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, ορίζει ένα υποσύνολο $[_n]$ του $\mathbb{R}$, ως ακολούθως:

$$\boxed{[a_n] \in [A_n] \qquad \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in A_n\} \in \mathscr{F}_M} \tag{1.8}$$

Τα υποσύνολα που παίρνονται με τον τρόπο αυτό λέγονται **εσωτερικά υποσύνολα** του $\mathbb{R}$.

Με όμοιο τρόπο κάθε ακολουθία συναρτήσεων $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, ορίζει μια **εσωτερική συνάρτηση**, $[f_n] : {}^*\mathbb{R} \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ ως εξής:

$$\boxed{[f_n]([x_n]) := [f_n(x_n)]}$$

Αντί $[f_n]$, θα γράφουμε και ${}^*f$. Όμοιοι ορισμοί δίνονται και για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

Σχήμα 1.11: Το υπερπραγματικό γράφημα της $y = \mathrm{st}(x)$. Η συνάρτηση $y = \mathrm{st}(x)$, αλλιώς εμφανίζεται μικροσκοπικά (εσωτερικά) και αλλιώς μακροσκοπικά (εξωτερικά). Τέτοιες συναρτήσεις θα τις ονομάζουμε **εξωτερικές**.

1.2.25 Παράδειγμα. **(i)** Εστω ${}_n := [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$ μια ακολουθία διαστημάτων του $\mathbb{R}$ και $a = [a_n], b = [b_n] \in {}^*\mathbb{R}$. Τότε το

$$[a, b] = \{x \in {}^*\mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

είναι εσωτερικό, αφού $[a, b] = [\,[a_n, b_n]\,]$.

(ii) Εστω $a = [a_n], x = [x_n] \in {}^*\mathbb{R}$. Τότε η συνάρτηση,

$$e^{ax} := [e^{a_n x_n}]$$

είναι εσωτερική εξ ορισμού.

(iii) Εστω $A = [A_n] \subseteq {}^*\mathbb{R}$ και $f = [f_n]$ μια εσωτερική συνάρτηση, τότε ορίζουμε,

$$\operatorname*{int}_A f dx := \left[\operatorname*{int}_{A_n} f_n dx\right].$$

Το νέο αυτό ολοκλήρωμα, ικανοποιεί όλες τις συνηθισμένες ιδιότητες, που χαρακτηρίζουν τα ολοκληρώματα.

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να εισάγουμε για ένα εσωτερικό υποσύνολο την έννοια του υπερπεπερασμένου συνόλου.

1.2.26 Ορισμός. Εστω το εσωτερικό υποσύνολο $= [{}_n]$. Το A θα λέγεται **υπερπεπερασμένο** ανν $\{n \in \mathbb{N} \mid A_n \quad \text{είναι πεπερασμένο } \} \in \mathscr{F}_M$.
Ο εσωτερικός πληθάριθμος του , ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{card}\,(A) := [\mathrm{card}\,(A)]$$

1.2.27 Παράδειγμα. Εστω $H \in {}^*\mathbb{N}$ ένας άπειρος υπερακέραιος. Τότε το σύνολο,

$$T_H := \{0, \frac{1}{H}, \frac{2}{H}, \ldots, \frac{H-1}{H}, 1\}$$

είναι υπερπερασμένο.
Πράγματι, έστω $= [H_n]$, τότε $_H = [_n]$ όπου

$$T_n := \{0, \frac{1}{H_n}, \frac{2}{H_n}, \ldots, \frac{H_n - 1}{H_n}, 1\}$$

Άρα,

$$\mathrm{card}\,(T_H) = [\mathrm{card}\,(T_n)] = [H_n + 1] = [H_n] + [1] = H + 1.$$

Αρχή της Μεταφοράς.

Ο τρόπος που έχουμε ορίσει τα εσωτερικά σύνολα και τις $*$--επεκτάσεις συνόλων και συναρτήσεων, μας κάνει να αναμένουμε ότι οι εσωτερικές μαθηματικές οντότητες, θα διατηρούν πολλές, ίσως όλες τις ιδιότητες πρώτης τάξης του $\mathbb{R}$. Πράγματι αυτό είναι το περιεχόμενο της αρχής της μεταφοράς, ή αρχής του Leibniz.

1.2.28 Αρχή της μεταφοράς. *Μια ιδιότητα P που αναφέρεται στη δομή του $\mathbb{R}$ είναι αληθής ανν η $*$-μεταφορά της ${}^*P$, που αναφέρεται στη δομή του ${}^*\mathbb{R}$ είναι αληθής.*

Η παραπάνω διαισθητικά διατυπωμένη αρχή, ισχύει λοιπόν για όλες τις φραγμένες προτάσεις σχετικά με το $\mathbb{R}$ και επομένως το ${}^*\mathbb{R}$, κληρονομεί όλες τις ιδιότητες πρώτης τάξης του $\mathbb{R}$. Οταν λέμε φραγμένες προτάσεις εννοούμε αυτές που περιέχουν τους βασικούς ποσοδείκτες με την ακόλουθη μορφή :

- $(\forall x)\,[x \in A \Longrightarrow \ldots]$ που θα συντομογραφείται ως $(\forall x \in A)[\ldots]$ και
- $(\exists x)\,[x \in A \ldots]$ που θα συντομογραφείται $(\exists x \in A)[\ldots]$.

Μερικά παραδείγματα θα ξεκαθαρίσουν τα πιο πάνω ζητήματα.

1.2.29 Παράδειγμα. Εστω $= (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})[x + y == y + x]$, τότε η $*$--μεταφορά είναι η ${}^*P = (\forall x \in {}^*\mathbb{R})(\forall y \in {}^*\mathbb{R})[x + y = y + x]$, δηλαδή απλά «αστρώσαμε» κάθε σύνολο ή συνάρτηση που εμφανίζεται στην πρόταση. Κανονικά θα έπρεπε αντί $+$ να γράφουμε ${}^*+$, αλλά λόγω του ότι η πράξη ${}^*+$ είναι επέκταση της $+$, για απλοποίηση του συμβολισμού θα παραλείπουμε το άστρο. Επίσης έχουμε ${}^*x = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Με όμοιο τρόπο μεταφέρονται και τα άλλα αξιώματα του $\mathbb{R}$. Για παράδειγμα αν,

$$P = (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{R})\,[x < y \Rightarrow x + z < y + z]$$

τότε στο ${}^*\mathbb{R}$ ισχύει η πρόταση:

$${}^*P = (\forall x \in {}^*\mathbb{R})(\forall y \in {}^*\mathbb{R})(\forall z \in {}^*\mathbb{R})\,[x < y \Rightarrow x + z < y + z]$$

Είναι δυνατόν να έχουμε και προτάσεις ανώτερης τάξης όπως:

$$P = (\forall A \in \mathscr{P}(\mathbb{R}))(\forall B \in \mathscr{P}(\mathbb{R}))\,[A \cup B = B \cup A]\,.$$

Τότε στο ${}^*\mathbb{R}$ ισχύει η,

$${}^*P = (\forall A \in {}^*\mathscr{P}(\mathbb{R}))(\forall B \in {}^*\mathscr{P}(\mathbb{R}))\,[{}^*A \cup {}^*B = {}^*B \cup {}^*A]\,.$$

Η Αρχή της Μεταφοράς, που είναι πόρισμα ενός βασικού θεωρήματος (Θεώρημα του Loś για υπερδυνάμεις), που δεν ενδιαφέρει εδώ, με λίγη εξάσκηση και προσοχή στη γραφή των προτάσεων, γίνεται μια πολύ απλή υπόθεση και ταυτόχρονα ένα ισχυρότατο όπλο.

Μετά από όλα αυτά είμαστε έτοιμοι να συνοψίζουμε και να χαρακτηρίσουμε όλα τα παραπάνω, με αξιωματικό τρόπο, ο οποίος ταυτόχρονα θα διευκολύνει και τους υπολογισμούς μας.

Αξιώματα Για το Σύστημα $(\mathbb{R},\ \ \mathbb{R}, *)$

Αξίωμα 1 : Το $\mathbb{R}$ είναι ένα πλήρες διατεταγμένο σώμα.

Αξίωμα 2 : Το ${}^*\mathbb{R}$ είναι ένα μη-Αρχιμήδειο διατεταγμένο σώμα, που αποτελεί μια γνήσια επέκταση του $\mathbb{R}$. Δηλαδή,

α) Το ${}^*\mathbb{R}$ είναι ένα διαταγμένο σώμα

β) Το ${}^*\mathbb{R}$ είναι μη-Αρχιμήδειο, δηλαδή δεν ισχύει το,

$$(\forall x \in {}^*\mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})\,[x < n1]$$

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $\ {}^*x = x$

Αξίωμα 3: (Αρχή της Μεταφοράς) Ο $*$ - μετασχηματισμός ικανοποιεί την αρχή της μεταφοράς, δηλαδή αν είναι μια περιορισμένης εμβέλειας ή φραγμένη πρόταση που αναφέρεται στο $\mathbb{R}$, τότε:

$$\boxed{\textit{η } \varphi \textit{ είναι αληθινή στο } \mathbb{R} \textit{ ανν η } {}^*\varphi \textit{ είναι αληθινή στο } {}^*\mathbb{R}}$$

που καμιά φορά θα συμβολίζουμε και ως εξής:

$$\boxed{\models \varphi \Longleftrightarrow {}^*\!\models {}^*\varphi}$$

Με βάση τα παραπάνω τρία αξιώματα μπορούμε να παράγουμε όλα τα σχετικά αποτελέσματα του Απειροστικού Λογισμού. Τα αξιώματα αυτά γενικεύονται και στην περίπτωση που έχουμε μια υπερδομή επί ενός συνόλου πρωτοστοιχείων. Ετσι αν S είναι ένα απειροσύνολο, τότε η υπερδομή $V(S)$ επί του S ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} V_0 \equiv V_0(S) &:= S \\ V_1 \equiv V_1(S) &:= V_0 \cup \mathscr{P}(V_0) \\ &\vdots \\ V_{n+1} \equiv V_{n+1}(S) &:= V_n \cup \mathscr{P}(V_n) \\ &\vdots \end{aligned}$$

και τελικά,

$$V(S) := \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n.$$

Ενα μη συμβατικό μοντέλο για την $V(S)$ αποτελείται από τα ακόλουθα στοιχεία:

(i) Μια υπερδομή $V({}^*S)$ επί μιας μη-συμβατικής επέκτασης ${}^*S$ του S και

(ii) Μια εμφύτευση : $*(\cdot) : V(S) \hookrightarrow V({}^*S)$

που ικανοποιεί τα ακόλουθα αξιώματα.

Αρχή Επέκτασης: Το S είναι ένα γνήσιο υποσύνολο του ${}^*S$ και

$$(\forall s \in S)[{}^*s = s]$$

Αρχή Μεταφοράς: Μια πρόταση φ στη $\mathscr{L}(V, S)$ ισχύει στη $V(S)$ ανν $*$ - μεταφορά της ισχύει στη $V({}^*S)$, συμβολικά,

$$V(S) \models \varphi \quad \text{ανν} \quad V({}^*S) \models {}^*\varphi \qquad \text{(βλ. και [23, 41])}$$

Μια άλλη αξιωματικοποιήση της μη-συμβατικής ανάλυσης είναι η Εσωτερική Θεωρία Συνόλων (Internal Set Theory) IST του E. Nelson, η οποία είναι μια συντηρητική (conservative) επέκταση της Θεωρίας Συνόλων ZFC. Παρ' όλο που ο ίδιος ο Nelson επιμένει σε μια συντακτική--φορμαλιστική αντίληψη της θεωρίας του, ωστόσο πιστεύουμε ότι η Εναλλακτική Θεωρία Συνόλων του Vopenka αποτελεί τη σωστή κατεύθυνση προς μια μη-Καντοριανή ερμηνεία της IST, βλ. το [**?**] καθώς επίσης και την εργασία [20].

Με βάση τα παραπάνω τρία αξιώματα μπορούμε να παράγουμε όλα τα σχετικά αποτελέσματα του Απειροστικού Λογισμού. Για διευκόλυνση των υπολογισμών αναφέρουμε τα παρακάτω:
Αν με , συμβολίζουμε απειροστά, με b, c συμβολίζουμε θετικούς πεπερασμένους αλλά όχι απειροστά και με , συμβολίζουμε θετικούς άπειρους αριθμούς. Τότε:

(i) Τα ακόλουθα είναι απειροστά:

$$-, \frac{1}{H}, \frac{}{b}, \frac{}{H}, \frac{b}{H}, +, -, \cdot, b\cdot, \sqrt{}$$

(ii) Τα ακόλουθα είναι πεπερασμένα αλλά και απειροστά:

$$-b, \frac{1}{b}, \frac{b}{c}, b+, b\cdot c, \sqrt{b}, b+c$$

(iii) Τα ακόλουθα είναι άπειροι αριθμοί:

$$-H, \frac{1}{}, \frac{b}{}, \frac{H}{}, H+, H+b, H\cdot b, H\cdot K, \sqrt{H}, H+K$$

(iv) Τα ακόλουθα μπορεί να είναι, είτε απειροστά, είτε πεπερασμένοι αλλά όχι απειροστά, είτε άπειροι:

$$, \frac{H}{K}, H\cdot, H-K$$

1.3 Δομές και Γλώσσες.

Η έννοια της μαθηματικής δομής είναι κεντρική γιά όλα τα μαθηματικά. Μπορούμε βεβαίως να δώσουμε ένα ορισμό που θα συλλαμβάνει λιγώτερο ή περισσότερο την έννοια αυτή. Υπάρχουν αρκετοί τρόποι προσέγγισης της εννοίας της μαθηματικής δομής. Εδώ θα περιοριστούμε σε μιά κοινά αποδεκτή έννοια. Θα θέλαμε όμως να κάνουμε μιά προσπάθεια να εκθέσουμε κάποιες απόψεις που στοχεύουν να φωτίσουν νοηματικά την έννοια της δομής. Ο Felix Klein στό περίφημο Erlager Program, λέγει ότι: «Δομή είναι οτιδήποτε παραμένει αναλλοίωτο από τούς αυτομορφισμούς» . Είναι φανερό ότι αυτό που ποιοτικά παραμένει αναλλοίωτο μπορεί να έχει κυρίως σχέση με την «γεωμετρική μορφή» των γεωμετρικών οντοτήτων. Δηλαδή μπορεί κανείς να υποστηρίξει ότι **οι έννοιες της μαθηματικής δομής και της γεωμετρικής μορφής των μαθηματικών αντικειμένων, είναι από μιά άποψη δυϊκές.** «Η γεωμετρική μορφή είναι μια Άλγεβρική δομή εκπεφρασμένη με γεωμετρικά σχήματα, ένω μια Άλγεβρική δομή είναι ένα γεωμετρικό σχήμα εκπεφρασμένο με μαθηματικά σύμβολα.»

Μπορούμε να γενικεύσουμε την καταστάση που είχαμε με τους πραγματικούς αριθμούς $\mathbb{R}$ σε μια οποιαδήποτε άλλη δομή.

Ο ορισμός μιας γενικής δομής είναι ο ακόλουθος:

1.3.1 Ορισμός. Μια **δομή** $\mathfrak{A}$ είναι μια διαταγμένη τετράδα,

$$\left\langle A\,;\,\mathscr{F}^A,\mathscr{R}^A,\mathscr{C}^A\right\rangle$$

όπου,

• A είναι ένα μη - κενό σύνολο, που λέγεται **φορέας** της $\mathfrak{A}$, και συνήθως γράφουμε απλά A ή carr($\mathfrak{A}$). Τα στοιχεία του A λέγονται **στοιχεία της δομής**, ο δε πληθάριθμος της δομής $\mathfrak{A}$ θα συμβολίζεται με $\mathrm{card}\,(\mathfrak{A}) \equiv \mathrm{card}\,(A)$. Πολλές φορές θα συγχέουμε τα σύμβολα $\mathfrak{A}$ και A.

• Γιά κάθε θετικό ακέραιο n, έχουμε ένα σύνολο $\mathscr{F}_n = \{f^A : f^A : A^n \to A\}$ **n-μελών πράξεων** επί του A, που η κάθε μια ονοματίζεται με το αντίστοιχο συναρτησιακό σύμβολο f. Τελικά το σύνολο όλων των πράξεων επί του , είναι το $\mathscr{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_n^A$

• Γιά κάθε θετικό ακέραιο n, έχουμε ένα σύνολο (πιθανά κενό,) **n-μελών σχέσεων** $\mathscr{R}_n = \{R_i : R_i \subseteq A^n\}$, που ονοματίζονται με το κατηγορηματικό σύμβολο R_i. Τελικά το σύνολο όλων των σχέσεων επί του A είναι το $\mathscr{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{R}_n^A$

• Το $\mathscr{C}^A = \{\,c_k \in A : k \in K\,\}$ είναι ένα σύνολο (πιθανά κενό) κάποιων ειδικών (διακεκριμένων) στοιχείων του A που θα τα ονομάζουμε **σταθερές**, και που ονοματίζονται από ένα ή περισσότερα σύμβολα σταθερών, c_k.

Υποθέτουμε βεβαίως ότι $\mathscr{R} \cap \mathscr{F} \cap \mathscr{C} = \emptyset$.

- Αν $\mathscr{R} = \emptyset$, τότε η $\mathfrak{A}$ λέγεται **αλγεβρική δομή** ή απλά **άλγεβρα**.
- Αν $\mathscr{F} = \emptyset$ τότε η $\mathfrak{A}$ είναι μια γνήσια **δομή σχέσεων**.

Ο **τύπος** της δομής $\mathfrak{A}$, ${}_{\mathfrak{A}}$ είναι η διατεταγμένη τριάδα $\langle\ ;\ ;\ \mathrm{card}\,()\rangle$ όπου $:\ \longrightarrow \mathbb{N}^+$, και $:J \longrightarrow \mathbb{N}^+$ είναι συναρτήσεις που φανερώνουν την τάξη (arity) των πράξεων και σχέσεων αντίστοιχα.

1.3.2 Παράδειγμα. 1) Μια **ομάδα** $\mathscr{G}$ είναι μια αλγεβρική δομή ή απλά μια άλγεβρα $\big\langle G, \cdot, (\cdot)^{-1}, 1\big\rangle$ που αποτελείται από μια διμελή πράξη, από μια μονομελή πράξη και από μια διακεκριμένη σταθερά 1, το μοναδιαίο ή ουδέτερο στοιχείο.

Εχουμε δηλαδή εδώ:

$\mathscr{R} = \emptyset$, $\mathscr{F} = \{\cdot, (\cdot)^{-1}\}$ και $\mathscr{C} = \{1\}$ η δε δομή $\mathscr{G}$ ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

$(G1)$ $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\ [x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z]$

$(G2)$ $(\forall x)[x \cdot 1 = 1 \cdot x = x]$

$(G3)$ $(\forall x)[x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1]$

Αν ισχύει και η ιδιότητα:

$(G4)$ $(\forall x)(\forall y)[x \cdot y = y \cdot x]$

τότε η ομάδα λέγεται **αβελιανή**.

2) Μια **άλγεβρα του Boole** είναι μια άλγεβρα $\mathfrak{B} \equiv \langle \mathbb{B}, \wedge, \vee, (\cdot)', 0, 1\rangle$ με $\mathscr{F} = \{\vee, \wedge, (\cdot)'\}$, $\mathscr{R} = \emptyset$ και $\mathscr{C} = \{0, 1\}$, τέτοια ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες ιδιότητες:

(B1) $(\forall x)(\forall y)[x \vee y = y \vee x \quad \& \quad x \wedge y = y \wedge x]$

(B2) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
$\& \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z]$

(B3) $(\forall x)[x \vee x = x \ \&\ x \wedge x = x]$

(B4) $(\forall x)(\forall y)[x = x \vee (x \wedge y) \ \&\ x = x \wedge (x \vee y)]$

(B5) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)]$

(B6) $(\forall x)[x \wedge 0 = 0 \ \&\ x \vee 1 = 1]$

(B7) $(\forall x)[x \wedge x' = 0 \ \&\ x \vee x' = 1]$

Μια άλγεβρα $\langle \mathbb{L}, \wedge, \vee\rangle$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες $(B_1) - (B_5)$ λέγεται **επιμεριστικό δικτυωτό**.

Παραδείγματα αλγεβρών του Boole είναι το δυναμοσύνολο $\mathscr{P}(X)$, ενός μη-κενού συνόλου X, με πράξεις την ένωση την τομή και το συμπλήρωμα, δηλαδή $\langle \mathscr{P}(X) \,;\, \cup, \cap, {}^c, \emptyset, \Omega \rangle$.

Επίσης η τετριμμένη άλγεβρα του Boole είναι η **2**$=\{0,1\}$ με πράξεις: $0 \vee 0 = 0, \quad 0 \vee 1 = 1, 0 \wedge 0, = 0, \quad 0 \wedge 1 = 0$. Ακόμα κάθε σ - άλγεβρα είναι μια άλγεβρα του Boole, αφού τα αξιώματα της σ - αλγέβρας στην ουσία εξασφαλίζουν την κλειστότητα των πράξεων, ως προς την $\mathscr{P}(X)$ και επομένως αποτελεί μια υποάλγεβρά της. Ετσι το ακόλουθο σύνολο, με τις πράξεις της τομής, ένωσης και συμπληρώματος, είναι μια σ-άλγεβρα και άρα μια άλγεβρα του Boole:

$$\mathbb{B} := \{A \subseteq \mathbb{N} | A \quad \text{ή} \quad \mathbb{N} - A \quad \text{είναι πεπερασμένο}\}$$

3 Μια **άλγεβρα Heyting** είναι μια άλγεβρα $\langle \mathbb{H}, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1 \rangle$ με $\mathscr{F} = \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$, $\mathscr{R} = \emptyset$, και $\mathscr{C} = \{0, 1\}$, που ικανοποιεί τα ακόλουθα αξιώματα:

(H1) $\langle \mathbb{H}, \vee, \wedge \rangle$ είναι ένα επιμεριστικό δικτυωτό.

(H2) $(\forall x)\ [x \wedge 0 = 0 \quad \& \quad x \vee 1 = 1]$

(H3) $(\forall x)\ [x \rightarrow x = 1]$

(H4) $(\forall x)(\forall y)\ [(x \rightarrow y) \wedge y = y \quad \& \quad x \wedge (x \rightarrow y) = x \wedge y]$

(H5) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[x \rightarrow (y \wedge z) = (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)$
$\quad \& \quad (x \wedge y) \rightarrow z = (x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z)]$.

Το γνωστότερο παράδειγμα άλγεβρας Heyting είναι τα ανοικτά σύνολα μιας τοπολογίας. Εστω $G(X)$ το σύνολο των ανοικτών συνόλων επί του . Τότε η $\langle G(X),\ \cup,\ \cap,\ \rightarrow,\ 0, 1 \rangle$ είναι μια άλγεβρα Heyting, όπου: $\cup,\ \cap$ είναι οι γνωστές συνολοθεωρητικές πράξεις, $0 := \emptyset, 1 :=$ και για κάθε $A, B \in G(X)$ ορίζουμε:

$$A \rightarrow B := \text{int}\,[(X - A) \cup\ B]$$

Οπου το int(), συμβολίζει το εσωτερικό του , το δε, $A \rightarrow B$ είναι το μέγιστο ανοικτό σύνολο που ικανοποιεί τη σχέση $(A \rightarrow B) \cup A \ \subseteq B$.

Επίσης το ολικά διαταγμένο σύνολο $\langle\, [0, 1], \leq\, \rangle$ παράγει μια άλγεβρα Heyting $\langle [0, 1], \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1 \rangle$ ως ακολούθως:

Για κάθε $a, b, \in [0, 1]$,

$$a \wedge b := a \quad \text{ανν} \quad a \leq b$$
$$a \vee b := b \quad \text{ανν} \quad b \leq a$$
$$a \rightarrow b := \begin{cases} 1, & \text{αν} \quad a \leq b \\ b, & \text{αν} \quad b \leq a \end{cases}$$

4) **Μια MV-άλγεβρα** είναι μια άλγεβρα, $\mathfrak{A} = \langle A, +, \cdot, ^*, 0, 1\rangle$ τέτοια ώστε, $\langle A, +, \cdot \rangle$ είναι ένα αβελιανό μονοειδές και για κάθε $a, b \in A$ έχουμε,

$$a + 1 = 1, \qquad 0^* = 1$$
$$a \cdot b = (a^* + b^*)^* \qquad a^{**} = a$$

$$(a^* + b^*)^* + b = (b^* + a)^* + a$$

Οι MV-άλγεβρες, γνωστές και ως Chang άλγεβρες, παίζουν τον ίδιο περίπου ρόλο για τις πλειότιμες λογικές, που παίζουν οι άλγεβρες Boole για την κλασική λογική. Στην ουσία είναι μιά γενίκευση των αλγεβρών Boole, στίς οπίες δεν ισχύει το αξίωμα της ταυτοδυναμίας (idempontet law), και από την άποψη αυτή είναι ένα είδος «ποσοτικών» αλγεβρών, βλ. π.χ. το [**?**] αλλά και το [**?**] όπου εξετάζονται γενικώτερες δομές.

Σε μια MV-άλγεβρα μπορούμε να ορίσουμε και τα ακόλουθα:

$$a \vee b := (a \cdot b^*) + b$$
$$a \wedge b := (a + b^*) \cdot b$$
$$a \rightarrow b := a^* + b$$
$$a \leq b :\Leftrightarrow \; a \wedge b = a \;\Leftrightarrow\; a \vee b = b$$

Τότε, $\langle A; \leq, \wedge, \vee, ^*, 0, 1\rangle$ είναι μια **De Morgan άλγεβρα**, δηλαδή ένα επιμεριστικό δικτυωτό στο οποίο ισχύουν οι νόμοι του De Morgan, η δε $\langle A; \wedge, \vee, \cdot, \rightarrow, \leq, 0, 1\rangle$ είναι ένα **δικτυωτό με υπόλοιπα** (residuated lattice), όπου τα $b \rightarrow a, \quad a, b, \in A$ είναι τα υπόλοιπα (residuals).

Το βασικό παράδειγμα για μια MV-άλγεβρα είναι η δομή,

$$\langle\, [0,1], +, \cdot, ^*, 0, 1\,\rangle$$

όπου, για κάθε $x, y \in [0,1]$,

$$x + y := \min\{1, x + y\}$$
$$x \cdot y := \max\{0, x + y - 1\}$$
$$x^* := 1 - x$$

Οι πιο πάνω πράξεις λέγονται **τελεστές Lukasiewicz**.

5) Το παράδειγμα του διανυσματικού χώρου παρουσιάζει κάποια ιδιομορφία, αφού στην ουσία η δομή αυτή είναι μιά δομή με δύο είδη στοιχείων (many-sorted structure), τα διανύσματα και τα βαθμωτά. Ωστόσο υπάρχει τρόπος να παρουσιασθεί στα πλάισια των δομών που ορίσαμε. Ας πάρουμε σαν φορέα της δομής το σύνολο των διανυσμάτων V. Υπάρχει επίσης μιά διακεκριμένη σταθερά 0^V, η αρχή του διανυσματικού χώρου. Υπάρχει μιά διμελής πράξη, $+^V$, η πρόσθεση των διανυσμάτων, καθώς επίσης και μιά μονομελής πράξη, $-^V$ για τον προσθετικό αντίστροφο. Τέλος για κάθε βαθμωτό $k \in K$, υπάρχει μιά μονομελής πράξη, k^V που αναπαριστά το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού ενός διανύσματος $\vec{x}$ με το k. Ετσι κάθε βαθμωτό θεωρείται σαν μια μονομελής πράξη.

1.3.3 Ορισμός. Για απλότητα έστω ένας οπλισμός $(\mathscr{R}, \mathscr{F}, \mathscr{C})$ με $\mathscr{R} = \{R_1, \cdots, R_n\}$, $\mathscr{F} = \{f_1, \cdots, f_m\}$ και $\mathscr{C} = \{c_k : k \in K\}$. **Ο τύπος ομοιότητας** κάθε δομής $\mathfrak{A}$ με οπλισμό $(\mathscr{R}, \mathscr{F}, \mathscr{C})$ είναι μια διαταγμένη τριάδα (μ, ν, k) όπου $\mu := \alpha(\cdot) \restriction \mathscr{R}$, $\nu := \alpha(\cdot) \restriction \mathscr{F}$ και $k := \mathrm{card}\,(\mathscr{C})$. Ετσι,

$$\begin{aligned} &: \mathscr{R} \to \mathbb{N} & \qquad \nu &: \mathscr{F} \to \mathbb{N} \\ &R_i \mapsto \mu(R_i) = \mu_i & f_j &\mapsto \nu(f_j) := \nu_j \end{aligned}$$

και $R_i \subseteq A^{\mu_i},\ i = 1, 2, \cdots, n \quad f_j : A^j \to A, \quad j = 1, \cdots, m$

Συχνά θα συμβολίζουμε έναν τύπο ομοιότητας και ως $({}_1, \cdots, {}_n;\ {}_1, \cdots, {}_m\,;\ k)$.

Παρατηρούμε στη συνέχεια, ότι αν έχουμε δυο διαφορετικές δομές $\mathfrak{A}_1 = \langle A_1\,; \mathscr{F}_1, \mathscr{R}_1, \mathscr{C}_1 \rangle$ και $\mathfrak{A}_2 = \langle A_2\,; \mathscr{F}_2, \mathscr{R}_2, \mathscr{C}_2 \rangle$ με $A_1 \neq A_2$ αλλά όπου $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_2$, $\mathscr{R}_1 = \mathscr{R}_2$, και $\mathscr{C}_1 = \mathscr{C}_2$, τότε από συντακτικής απόψεως και γλωσσικής περιγραφής, θα πρέπει να θεωρούνται ίδιες. Για παράδειγμα οι δομές $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ και $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ από συντακτικής πλευράς δίνουν τους ίδιους ατομικούς και τους ίδιους γενικά τύπους. Ετσι επειδή δεν ενδιαφέρει στη φάση αυτή, η αλήθεια ή το ψεύδος των τύπων που μπορούν να σχηματιστούν, μπορεί κανείς να πει πως έχουν την ίδια ακριβώς σύνταξη. Αυτό μας οδηγεί στη θεώρηση του στοιχείου που **συντακτικά** ταυτίζει ή διαφοροποιεί δυο δομές. Η έννοια αυτή, είναι φανερό ότι είναι αυτή του οπλισμού μιας δομής, δηλαδή η «δομή» που συνοδεύει τον φορέα της δομής $\mathfrak{A}$.

1.3.4 Ορισμός. Εστω $\mathfrak{A} = \langle A; \mathscr{R}, \mathscr{F}, \mathscr{C} \rangle$ μια δομή. Ο **οπλισμός** (signature) της $\mathfrak{A}$ είναι η διαταγμένη τριάδα $(\mathscr{R}, \mathscr{F}, \mathscr{C})$. Ο συμβολισμός $(\mathscr{R}, \mathscr{F}, \mathscr{C})$ όμως δεν μας φανερώνει την τάξη κάθε μιας σχέσης και συνάρτησης, καθώς και τον πληθάριθμο του $\mathscr{C}$. Ετσι αν $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ και αν κάθε 0-μελής πράξη ή συνάρτηση ταυτίζεται με ένα στοιχείο του A, τότε ο **ο οπλισμός** της $\mathfrak{A}$ είναι μια διαταγμένη τριάδα $(\mathscr{R}, \mathscr{F}, \mathrm{ar}(\cdot))$ με,

(i) $\mathscr{R} \cap \mathscr{F} = \emptyset$

(ii) Η συνάρτηση $\mathrm{ar}(\cdot) : \mathscr{R} \cup \mathscr{F} \to \mathbb{N}$, που λέγεται **τάξη** (arity) του οπλισμού είναι τέτοια ώστε:

(α) Αν $R \in \mathscr{R}$ και $\alpha(R) = n$ τότε η σχέση R είναι μια n-μελής ή n-τάξης, $n \geq 1$.

(β) Αν $f \in \mathscr{F}$ και $\alpha(f) = k$, τότε η συνάρτηση f είναι k-τάξης, δηλαδή $f : A^k \to A$. Για $k = 0$ παίρνουμε τις σταθερές $\mathscr{C} = \{c_k : k \in K\}$.

Συχνά είναι βολικό να γράφουμε έναν οπλισμό με την μορφή,

$$\left\langle R_1^{\alpha(R_1)}, \cdots, R_i^{\alpha(R_i)}, \cdots ; f_1^{\alpha(f_1)}, \cdots f_j^{\alpha(f_j)}, \cdots ; \{c_k : k \in K\} \right\rangle,$$

ακόμα συμβολίζουμε συνήθως: $\mathscr{R}_n := \alpha^{-1}(n) \cap \mathscr{R}$ για τις n-μελής σχέσεις οπότε,

$$\mathscr{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{R}_n$$

και $\mathscr{F}_n := \alpha^{-1}(n) \cap \mathscr{F}$ για τις συναρτήσεις n-μεταβλητών, οπότε,

$$\mathscr{F} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n$$

1.3.5 Ορισμός. Δύο δομές,

$$\mathfrak{A} := \langle\, A\, ; \mathscr{F}_A, \mathscr{R}_A, \mathscr{C}_A \,\rangle \qquad \mathfrak{B} := \langle\, B\, ; \mathscr{F}_B, \mathscr{R}_B, \mathscr{C}_B \,\rangle$$

όπου,
-- $\mathscr{F}_A := \{f_{i,A} : i \in I_A\}$, $\mathscr{R} := \{R_{j,A} : j \in J_A\}$, $\mathscr{C}_A := \{c_{k,A} : k \in K_A\}$ και,
-- $\mathscr{F} := \{f_{i,} : i \in I\}$, $\mathscr{R} := \{R_{j,} : j \in J\}$, $\mathscr{C} := \{c_{k,} : k \in K\}$,
λέγονται **όμοιες (similar)** ή είναι όμοιου τύπου, ανν οι τύποι ομοιότητάς τους, $=$ $(, , \mathrm{card}\,(K_A))$ και $= (, , \mathrm{card}\,(K))$ μπορούν να αναδιαταχτούν οι οικογένειες των πράξεων, των σχέσεων και των σταθερών, έτσι ώστε να γίνουν του ιδίου ακριβώς τύπου. Δηλαδή, υπάρχουν $1-1$ και επί συναρτήσεις $h_F : I_A \longrightarrow I_B,\ h_R : J_A \longrightarrow J_B,\ h_C : K_A \longrightarrow K_B,$ έτσι ώστε, για κάθε $i \in I_A,\ j \in J_A,\ k \in K_A$ έχουμε:

$$_A(i) = \,(h_F(i))\,, \qquad (j) = \,(h_R(j))\,, \qquad c_{k,B} = h_C(c_{k,A}).$$

Είναι φανερό ότι δύο ομοίου τύπου δομές έχουν τον ίδιο δομικό οπλισμό. Ακριβέστερα έχουμε:

1.3.6 Ορισμός. Εστω $\mathfrak{A} = \langle A; \mathscr{R}, \mathscr{F}, \mathscr{C}\rangle$ μια δομή. Ο **οπλισμός** (signature) της $\mathfrak{A}$ είναι η διαταγμένη τριάδα $(\mathscr{R}, \mathscr{F}, \mathscr{C})$ μαζί με τις συναρτήσεις,

$$\alpha_F : \mathscr{F} \to \mathbb{N}^+ \quad \alpha_R : \mathscr{R} \to \mathbb{N}^+$$

τέτοιες ώστε αν $\eta_F : I \to \mathscr{F}$ και $\eta_R : J \to \mathscr{R}$, τότε

$$\alpha_F \circ \eta_F = \lambda \quad \alpha_R \circ \eta_R = \mu$$

Είναι φανερό ότι οπλισμός και τύπος ομοιότητας είναι στην ουσία το ίδιο πράγμα. Συμβολίζουμε συνήθως: $\mathscr{R}_n := \alpha^{-1}(n) \cap \mathscr{R}$ για τις n-μελής σχέσεις οπότε,

$$\mathscr{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{R}_n$$

και $\mathscr{F}_n := \alpha^{-1}(n) \cap \mathscr{F}$ για τις συναρτήσεις n-μεταβλητών, οπότε,

$$\mathscr{F} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n$$

Η κλάση των δομών ενός συγκεκριμένου τύπου $= (\lambda, \mu, \mathrm{card}\,())$ συμβολίζεται με $Sim(\delta)$ και λέγεται **κλάση ομοιότητας δομών (similarity class)** ή **είδος δομών**.

1.3.7 Παράδειγμα. (i) Αν $\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}\,;\, +, \cdot, \,;\, \leq ;\, 0, 1 \rangle$ τότε ο τύπος ομοιότητας της $\mathfrak{A}$ είναι $(2, 2\,;\, 2\,;\, 2)$ αφού $\mathscr{F} = \{+, \cdot\}$ $\mathscr{R} = \{\leq\}$, και $\mathscr{C} = \{0, 1\}$

(ii) Αν $\mathfrak{G} = \left\langle G\,;\, \cdot, (\cdot)^{-1}\,;\, 1 \right\rangle$ τότε ο τύπος ομοιότητας είναι ο $(\,2, 1\,;\, \emptyset;\; 1\,)$, όπου $\emptyset$ συμβολίζει την πλήρη απουσία συμβόλων σχέσεων.

(iii) Αν $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{B}\,;\, \wedge, \vee, (\cdot)'\,;\, 0, 1\,\rangle$ τότε ο τύπος ομοιότητας είναι ο $(2, 2, 1\,;\, \emptyset\,;\, 2)$.

(iv) Αν $\mathfrak{H} = \langle \mathbb{H}\,;\, \vee, \wedge, \rightarrow;\, 0, 1 \rangle$ τότε ο τύπος ομοιότητας είναι ο $(\,2, 2, 2\,;\, \emptyset\,;\, 2\,)$

Πρέπει να σημειώσουμε ότι επειδή κάθε μαθηματική δομή είναι εφοδιασμένη με μια σχέση ισότητας, δεν περιλαμβάνουμε τη σχέση αυτή στον τύπο ομοιότητας. Πολλές φορές όμως όταν η σχέση της ισότητας παίζει έναν σοβαρό ρόλο (όπως π.χ. στα μοντέλα του Boole και γενικά στα μη-συμβατικά μοντέλα) την περιλαμβάνουμε στην δομή. Πρέπει να σημειώσουμε ακόμα ότι **πράξεις 0-τάξης** συμπίπτουν με σταθερές, ενώ **σχέσεις 1-τάξης** συμπίπτουν με υποσύνολα του A. Είναι φανερό ότι θεωρώντας την κλάση ομοιότητας Sim(), και εισάγοντας έναν ορισμό με αφαίρεση, (definition by absraction) οδηγούμαστε φυσιολογικά στην έννοια της πρωτοβάθμιας γλώσσας, που αποτελεί την γλώσσα με την οποία εκφράζουμε γεγονότα για μια οποιαδήποτε δομή που ανήκει στην κλάση ομοιότητας $\mathrm{Sim}(\delta)$. «Ξεχνώντας» λοιπόν τους φορείς που εμφανίζονται στις δομές που ανήκουν στην $\mathrm{Sim}(\delta)$, παίρνουμε σαν αποτέλεσμα αυτής της αφαίρεσης μια γλώσσα που απαρτίζεται από σύμβολα, χωρίς καμιά σημασία και που είναι κατάλληλη για την περιγραφή μιάς οποιαδήποτε δομής στην $\mathrm{Sim}(\delta)$. Για το λόγο αυτό μια πρωτοβάθμια γλώσσα λέγεται και απλά, «**γλωσσικός τύπος ή οπλισμός**» . Ετσι η γλώσσα είναι μια δευτερεύουσα αφαίρεση, που προκύπτει από την πρωτογενή μαθηματική δραστηριότητα, που είναι η μελέτη των δομών.

Η ΓΛΩΣΣΑ ΕΝΟΣ ΟΠΛΙΣΜΟΥ.

Οπως έχουμε ήδη παρατηρήσει, ένα οπλισμός μπορεί να αναφέρεται σε πολλά μη - κενά σύνολα, που έτσι γίνονται **φορείς του οπλισμού**. Παρά τη διαφορετική φύση των φορέων του οπλισμού (διαφορετικά σύνολα με διαφοερετικό πληθάριθμο, κ.λ.π.) η συντακτική τους περιγραφή καθορίζεται και είναι κοινή μόνον από τη φύση του οπλισμού. Εστω λοιπόν ένας γενικός οπλισμός $\sum = (\mathscr{F}, \mathscr{R}, \mathscr{C})$, δεν αναφέρεται σε κανένα ειδικό συγκεκριμένο φορέα. Με τον τρόπο αυτό, αφού οι σχέσεις και οι συναρτήσεις δεν αναφέρονται σε κάποιο φορέα, αυτόματα μετασχηματίζονται σε απλά ονόματα - σύμβολα, για συγκεκριμένες σχέσεις, συναρτήσεις και σταθερές που θα ορίζονται σε μια δομή με οπλισμό $\sum$. Αφαιρώντας λοιπόν από τη μέση τον φορέα, αυτό που μένει είναι κάποια αφηρημένα σύμβολα - ονόματα, και τελικά μια γλώσσα που περιγράφει συντακτικά δομές με οπλισμό $\sum$. Μια **πρωτοβάθμια γλώσσα $\mathscr{L}_\Sigma$, οπλισμού $\sum$,** περιλαμβάνει τα ακόλουθα στοιχεία:

(I) Τα λογικά σύμβολα

- **(i) Μεταβλητές:** $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots\}$ (αριθμήσιμο πλήθος).
- **(ii) Λογικοί σύνδεσμοι:** $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- **(iii) Ποσοδείκτες:** $\forall$ (καθολικός), $\exists$ (υπαρξιακός).
- **(iv) Ισότητα:** $\approx$
- **(v) Βοηθητικά σύμβολα:** παρενθέσεις, (,) , αγκύλες [,] κ.λ.π.

(II) Μη - λογικά σύμβολα. Τα λογικά σύμβολα μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας, παραμένουν τα ίδια, ακόμα και όταν αλλάζουν οι οπλισμοί ή οι δομές, ενώ τα μη λογικά σύμβολα αναφέρονται σε συγκεκριμένο οπλισμό και επομένως αναφέρονται σε όλες τις δομές με τον ίδιο τύπο ομοιότητας.

- **(i) Σύμβολα σχέσεων ή κατηγορημάτων:** $\{R_i; i \in I\}$
- **(ii) Σύμβολα συναρτήσεων ή πράξεων:** $\{f_j; j \in J\}$
- **(iii) Σύμβολα σταθερών:** $\{c_k : k \in K\}$

Όλα τα πιο πάνω σύνολα υποτίθεται ότι είναι ανα δύο ξένα μεταξύ τους και κάθε ένα από αυτά μπορεί να είναι το κενό σύνολο. Επειδή τα λογικά σύμβολα είναι κοινά για κάθε γλώσσα, αυτό που διακρίνει μια γλώσσα, στην ουσία είναι τα μη - λογικά σύμβολα, που αποτελούν και τον οπλισμό ή τύπο ομοιότητας.

Μπορούμε λοιπόν, χωρίς κίνδυνο σύγχυσης, να ταυτίζουμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με τον οπλισμό της, συχνά δε γράφουμε:

$$\mathscr{L}_\Sigma = (\{R_i; i \in I\}; \{f_j; j \in J\}; \{c_k : k \in K\})$$

Στην πρωτοβάθμια γλώσσα $\mathscr{L}_\Sigma$ έχουμε μια **αρχή επαγωγής**, για ορισμούς και αποδείξεις, που είναι τελείως ανάλογη με την γνωστή αρχή της μαθηματικής επαγωγής, που έχουμε για τους φυσικούς αριθμούς. Για παράδειγμα, ο ορισμός που δώσαμε για τους όρους και τους τύπους μιας γλώσσας είναι επαγωγικός. Στην περίπτωση μας έχουμε όμοια:

1.3.8 Ορισμός. Το σύνολο **Term**($\mathscr{L}_\Sigma$) των **όρων** της $\mathscr{L}_\Sigma$ είναι το ελάχιστο σύνολο που παράγεται από την εφαρμογή των ακόλουθων ιδιοτήτων:

(i) Οι μεταβλητές και τα σταθερά σύμβολα είναι όροι, δηλαδή, $x_i \in$ **Term**$(\mathscr{L}_\Sigma), i = 1, 2, \ldots$ και $c_k \in$ **Term**$(\mathscr{L}_\Sigma)$ για κάθε $k \in K$.

(ii) Αν $t_1, \ldots t_n \in$ **Term**($\mathscr{L}_\Sigma$), και $f \in \mathscr{F}$ με $\mathrm{ar}(f) = n$ τότε,

$$f(t_1, \ldots, t_n) \in \textbf{Term}(\mathscr{L}_\Sigma).$$

Αν $\mathscr{F}_k$ είναι το σύνολο των k-μελών συναρτησιακών συμβόλων, τότε έχουμε πιο αναλυτικά :

$$\begin{aligned}
\mathbf{Term}_0 &:= V \cup \{ c_j \ : \ j \in J \} \\
\mathbf{Term}_{n+1} &:= \mathbf{Term}_n \cup \{ f(t_1, \ldots, t_k) \,|\, t_1, \ldots, t_k \in \mathbf{Term}_n, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad f \in \mathscr{F}_k, \ k \in \mathbb{N} \}
\end{aligned}$$

και τέλος,

$$\mathbf{Term}(\mathscr{L}_\Sigma) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{Term_n}$$

Όμοια όπως και με την περίπτωση των πραγματικών αριθμών ορίζουμε το σύνολο των τύπων **Form**($\mathscr{L}_\Sigma$) της $\mathscr{L}_\Sigma$.

1.3.9 Ορισμός. Το σύνολο των τύπων **Form**($\mathscr{L}_\Sigma$) της $\mathscr{L}_\Sigma$ είναι το ελάχιστο σύνολο που παράγεται από την εφαρμογή των ακόλουθων ιδιοτήτων:

(i) **Ατομικοί ή Στοιχειώδεις Τύποι**. Αν $R \in \mathscr{R}$ με $\alpha(R) = n$ και $t_1, \ldots, t_n \in$ **Term**($\mathscr{L}_\Sigma$) τότε,

$$R(t_1, \ldots, t_n) \in \textbf{Form}(\mathscr{L}_\Sigma)$$

και,

$$t_1, t_2 \in \textbf{Term}(\mathscr{L}_\Sigma) \ \Rightarrow \ (t_1 = t_2) \in \textbf{Form}(\mathscr{L}_\Sigma)$$

(ii) **Σύνθετοι Τύποι**.

(α) Αν $\varphi, \psi \in \mathbf{Form}(\mathscr{L}_\Sigma)$, τότε $(\varphi \Box \psi) \in \mathbf{Form}(\mathscr{L}_\Sigma)$
όπου $\Box \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

(β) Αν $\phi \in \mathbf{Form}(\mathscr{L}_\Sigma)$ τότε $(\neg\varphi) \in \mathbf{Form}(\mathscr{L}_\Sigma)$

(γ) Αν για κάθε μεταβλητή $x \in V$, ο σχηματισμός φ είναι τύπος της $\mathscr{L}_\Sigma$ τότε και οι σχηματισμοί,

$$(\forall x)\varphi \quad \text{και} \quad (\exists x)\varphi \quad \text{είναι τύποι της } \mathscr{L}_\Sigma$$

Αν περιορίσουμε το σύνολο των λογικών συνδέσμων σε ένα επαρκές σύνολο, π.χ. το $\mathscr{S} := \{\wedge, \neg\}$,, και $\mathscr{R} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{R}_n$ είναι το σύνολο των κατηγορημάτων, με $\mathscr{R}_n$ το σύνολο των n-μελών κατηγορημάτων, τότε πιο αναλυτικά έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Form}_0 &:= \{\, R(t_1, \ldots, t_n) \mid R \in \mathscr{R}_n,\ n \in \mathbb{N},\ t_i \in \mathbf{Term},\ i = 1, \ldots, n\} \\
\mathbf{Form}_{n+1} &:= \mathbf{Form}_n \cup \{\, (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \mid \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbf{Form}_n\} \\
&\qquad \cup \{\neg\varphi \mid \varphi \in \mathbf{Form}_n\} \\
&\qquad\ \ \breve{\{}(\exists x)\ \varphi(x) \mid \varphi \in \mathbf{Form}_n\}
\end{aligned}$$

και τέλος,

$$\mathbf{Form}(\mathscr{L}_\Sigma) := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbf{Form}_n$$

1.3.10 Σχόλιο. **(i)** Από την αναλυτική μορφή των συνόλων **Term** και **Form** γίνεται τελείως φανερός ο επαγωγικός χαρακτήρας των, και ο επαγωγικός τρόπος απόδειξης που ακολουθούμε συνήθως στη Μαθηματική Λογική.

(ii) Πρέπει από την αρχή να σημειώσουμε ότι εκτός από την τυπική γλώσσα $\mathscr{L}_\Sigma$ έχουμε επίσης και την **μεταγλώσσα,** που στην περίπτωση μας είναι η Ελληνική γλώσσα. Το ίδιο εξ άλλου συμβαίνει και στην εκμάθηση από Ελληνες της αγγλικής γλώσσας. Η Ελληνική τότε είναι η μεταγλώσσα η δε Αγγλική είναι η γλώσσα - στόχος που θέλουμε να μάθουμε. Η Ελληνική επίσης είναι μια μεταγλώσσα για την τυπική γλώσσα προγραμματισμού υπολογιστών `BASIC`.

Το σύμβολο $\Rightarrow$ δεν είναι σύμβολο της γλώσσας $\mathscr{L}_\Sigma$ αλλά είναι ένα μεταγλωσσικό σύμβολο που έχει εισαχθεί αντί της λέξης «συνεπάγεται». Το σύμβολο συνεπαγωγής της γλώσσας $\mathscr{L}_\Sigma$ είναι το $\rightarrow$. Ετσι $\Rightarrow \notin \mathscr{L}_\Sigma$.

(iii) Επίσης τα σύμβολα φ, ψ για τις προτάσεις, είναι σύμβολα της μεταγλώσσας δεν είναι τύποι αυτά τα ίδια. Τα εισάγουμε για ευκολία αντί της φράσης ο σχηματισμός των συμβόλων π.χ. $(\forall x)(\forall y)[x + y = y + z]$ είναι ένα τύπος. Αντί λοιπόν να γράφουμε όλον τον τύπο κάθε φορά, εισάγουμε το μετασύμβολο φ για τον σχηματισμό αυτό, για ευκολία στη γραφή. Ετσι αντί να γράφουμε

$$(\forall x)(\forall y)[x + y = y + z] \in \textbf{Form}(\mathscr{L}_\Sigma)$$

διευκολύνεται η διατύπωση αν εισάγουμε την μετα - μεταβλητή και γράφουμε $\varphi \in \textbf{Form}(\mathscr{L}_\mathbb{R})$. Αυτό βέβαια δεν σημαίνει ότι το σύμβολο εμφανίζεται στο σύνολο $\textbf{Form}(\mathscr{L}_\mathbb{R})$.

1.3.11 Ορισμός. Η εμβέλεια (scope) ενός ποσοδείκτη, π.χ. του $(\forall)$ εντός ενός τύπου ϕ είναι ένα καλοσχηματισμένος υποτύπος του οποίου τα πρώτα σύμβολα είναι τα $(\forall x)$ και αμέσως μετά αρχίζει με αριστερή αγκύλη και τελειώνει με την αντίστοιχη δεξιά αγκύλη.

Για παράδειγμα στον τύπο $(\forall x)[\phi(x) \wedge \psi(x)]$ η εμβέλεια του $(\forall)$ είναι ο τύπος $[\phi(x) \wedge \psi(x)]$, ενώ στον τύπο $(\forall x)[\phi(x)] \wedge [\psi(x)]$ η εμβέλεια του $(\forall)$ είναι ο υποτύπος $[\phi(x)]$.

Κάθε εμφάνιση μιας μεταβλητής x στον τύπο ϕ θα λέγεται **δεσμευμένη ή φραγμένη (bound)** αν εμφανίζεται στους ποσοδείκτες $(\forall x), (\exists x)$ ή βρίσκεται στην εμβέλεια των ποσοδεικτών $(\forall x), (\exists x)$ εντός του τύπου φ. Σε αντίθετη περίπτωση μια εμφάνιση της μεταβλητής x στον τύπο φ λέγεται **ελεύθερη**. Ενα τύπος λέγεται **πρόταση** αν δεν περιέχει καθόλου ελεύθερες μεταβλητές. Οι έννοιες της δεσμευμένης και της ελεύθερης μεταβλητής μπορούν να οριστούν αυστηρά με επαγωγικό τρόπο.

Για παράδειγμα η εμφάνιση της μεταβλητής x είναι ελεύθερη στους τύπους: $[x = c]$, $[x = c] \to (\forall x)[x = c]$ ενώ στους τύπους $(\forall x)(\forall y)[R(x, y) \to R(y, x)], (\forall x)(\exists y)[y = f(x)]$ είναι δεσμευμένη.

Επίσης στον τύπο:

$$(\forall \epsilon)\,[\varepsilon > 0 \to (\exists \delta)\,[\,\delta > 0 \wedge (\forall y)[\,|x - y| < \delta \to |f(x) - f(y)| < \varepsilon\,]]]$$

που εκφράζει την συνέχεια της συναρτήσεως f, οι μεταβλητές ϵ, δ και y είναι δεσμευμένες ενώ η μεταβλητή x είναι ελεύθερη γιατί δεν είναι στην εμβέλεια κάποιου ποσοδείκτη.

1.3.12 Ορισμός. Μια γλώσσα $\mathscr{L}_\Sigma$ λέγεται **πρωτοβάθμια** αν επιτρέπει ποσοδείκτηση μόνον σε μεταβλητές $V = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ της γλώσσας $\mathscr{L}_\Sigma$. Τα σύμβολα των συναρτήσεων και σχέσεων είναι δοσμένα σταθερά σύμβολα. Οι μεταβλητές $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ αναφέρονται στα στοιχεία του φορέα A μιας $\sum$-δομής της οποίας η $\mathscr{L}_\Sigma$ είναι η γλώσσα περιγραφής της. Αν όμως επιτρέπουμε ποσοδείκτηση και σε μεταβλητές που αναφέρονται σε συναρτήσεις, σχέσεις ή υποσύνολα του A, τότε πλέον δεν μιλάμε για πρωτοβάθμιες γλώσσες, αλλά για γλώσσες ανώτερης τάξης.

Για παράδειγμα το αξίωμα της πληρότητας και το Αρχιμήδειο αξίωμα είναι τύποι δεύτερης τάξης. Το αξίωμα της πληρότητας διατυπώνεται στη μεταγλώσσα ως «κάθε μη - κενό υποσύνολο των πραγματικών αριθμών, που είναι φραγμένο εκ των άνω έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα» .

ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΜΙΑΣ ΠΡΩΤΑΒΑΘΜΙΑΣ ΓΛΩΣΣΑΣ

Εστω $\mathscr{L}_\Sigma$ μια γλώσσα οπλισμού $\sum = (\mathscr{F}, \mathscr{R}, \mathscr{C})$, και έστω $\mathfrak{A} = \langle A\,;\, \mathscr{F}_A, \mathscr{R}_A, \mathscr{C}_A \rangle$ μια Σ- δομή με φορέα το σύνολο A, όπου $\mathscr{F}_A := \{f^A \,|\, f \in \mathscr{F}\}$,$\mathscr{R}_A := \{R^A \,|\, R \in \mathscr{R}\}$, και $\mathscr{C}_A := \{c_k^A \,|\, k \in K\}$, και αν $R^A \in \mathscr{R}_n^A$ τότε $R^A \subseteq A^n$, αν δε $f^A \in \mathscr{F}_m^A$ τότε $f^A : A^m \to A$ και τέλος $c_k^A \in A$ για κάθε $i \in K$.

Η συνολική απεικόνιση, $R \mapsto R^A$, $f \mapsto f^A$ και $c_i \mapsto c_i^A$ λέγεται μια $\mathfrak{A}$-**ερμηνεία** της $\mathscr{L}_\Sigma$. Μπορούμε επίσης να ερμηνεύουμε τις μεταβλητές της γλώσσας σε στοιχεία του A, δηλαδή να έχουμε μια αντιστοιχία-αποτίμηση,

$$: V \to A,$$

οπότε έτσι μπορούμε να ερμηνεύουμε και τους όρους και τύπους της $\mathscr{L}_\Sigma$ σε όρους και τύπους της $\mathfrak{A}$. Οι ελεύθερες μεταβλητές στους τύπους παίρνουν μια συγκεκριμένη τιμή, και οι τύποι μετατρέπονται σε προτάσεις με μια συγκεκριμένη τιμή αλήθειας.

Τα σταθερά σύμβολα μιας γλώσσας, υπάρχουν για να συμβολίζουν κάποια διακεκριμένα στοιχεία του A, όπως ουδέτερα στοιχεία κ.λ.π. Μπορούμε όμως, και αυτό είναι πάντοτε χρήσιμο, να εισάγουμε σύμβολα - ονόματα για κάθε $a \in A$. Ετσι παίρνοντας την στοιχειώδη επέκταση της $\mathscr{L}_\Sigma$ με την επισύναψη του συνόλου $\{a : a \in A\}$ έχουμε μια γλώσσα που θα τη συμβολίζουμε με $\mathscr{L}_\Sigma(\mathfrak{A})$.

Από την παραπάνω συζήτηση μπορούμε να διατυπώσουμε ακριβέστερα τον ακόλουθο ορισμό.

1.3.13 Ορισμός. Μια **ερμηνεία** της $\mathscr{L}_\Sigma$ είναι ένα ζευγάρι $(\mathfrak{A}, I)$ όπου $\mathfrak{A}$ είναι μια Σ-δομή με οπλισμό $(\mathscr{F}_A, \mathscr{R}_A, \mathscr{C}_A)$ και I είναι μια αντιστοιχία με πεδίο ορισμού τα μη - λογικά σύμβολα της $\mathscr{L}_\Sigma$ και τιμές στον οπλισμό της $\mathfrak{A}$, έτσι ώστε:

$$I : \mathscr{R} \cup \mathscr{F} \cup \mathscr{C} \to \mathscr{R}_A \cup \mathscr{F}_A \cup \mathscr{C}_A$$

$$\begin{array}{ll} R \to R^A \equiv I(R) \equiv R_I & R \in \mathscr{R}\,,\, R^A \in \mathscr{R}_A \\ f \to f^A \equiv I(f) \equiv f^I & f \in \mathscr{F}\,,\, f^A \in \mathscr{F}_A \\ c_j \to c_{j,A} \equiv I(c_j) \equiv c_{j,I} & c_j \in \mathscr{C}\,,\, c_j^A \in \mathscr{C}_A \end{array}$$

Σημειώνουμε και πάλι ότι οι μεταβλητές της $\mathscr{L}_\Sigma$ ερμηνεύονται σαν μαθηματικές οντότητες - στοιχεία του μη - κενού συνόλου A με επαγωγή δε η ερμηνεία αυτή των μεταβλητών επεκτείνεται και στους όρους και τους τύπους της γλώσσας $\mathscr{L}(\Sigma)$. Με την αντιστοιχία αυτή θα ασχοληθούμε αργότερα.

1.3.14 Παράδειγμα. Εστω $\mathscr{L}(\Sigma)$ μια γλώσσα με οπλισμό $= (\mathscr{R}, \mathscr{F}, \mathscr{C})$ όπου, $\mathscr{R} = \{R_=, R_\leq\}$, $\mathscr{F} = \{f_+, f_\cdot\}, \mathscr{C} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ τότε μια ερμηνεία της $\mathscr{L}(\Sigma)$ στους φυσικούς αριθμούς $\langle \mathbb{N}\,; =, \leq\,; +, \cdot\,; 0, 1\rangle$ είναι η απεικόνιση τέτοια ώστε $R_{=,I} \equiv =$, $R_{\leq,I} \equiv \leq$, $f_{+,I} \equiv +, f_{\cdot,I} \equiv \cdot$ $\mathbf{0}_I \equiv 0$, $\mathbf{1}_I \equiv 1$. Ετσι ο τύπος $R_= (f_+(x_1, x_2), f_\cdot(x_1, x_2))$ της $\mathscr{L}(\Sigma)$ ερμηνεύεται σαν $n_1 + n_2 = n_1 \cdot n_2$ όπου $\alpha(x_1) = n_1, \alpha(x_2) = n_2$.

Η $\mathscr{L}(\Sigma)$ μπορεί επίσης να ερμηνευθεί και στις Σ-δομές $\mathfrak{R} = \langle\, \mathbb{R}\,; =, \leq\,; +, \cdot\,; 0, 1\rangle$ ή $\mathfrak{Q} = \langle \mathbb{Q}\,; \leq\,; +, \cdot\,; 0, 1\rangle$ με τον προφανή τρόπο.

Εχουμε ήδη αναφέρει ότι σε μια ερμηνεία, οι μεταβλητές της γλώσσας θα πρέπει να ερμηνευθούν σαν στοιχεία που μεταβάλλονται επί του . Μόνο έτσι είναι δυνατόν να ερμηνεύσουμε τους $\mathscr{L}(\Sigma)$-όρους και τους $\mathscr{L}(\Sigma)$-τύπους στην Σ-δομή $\mathfrak{A}$. Η ερμηνεία λοιπόν των μη-λογικών συμβόλων θα πρέπει να συμπληρωθεί και από την ερμηνεία των λογικών συμβόλων για να έχουμε μια πλήρη ερμηνεία της $\mathscr{L}(\Sigma)$ στην Σ- δομή $\mathfrak{A}$. Οι λογικοί σύνδεσμοι δεν παρουσιάζουν κανένα πρόβλημα : το "$\neg$" θα ερμηνεύεται «όχι» , το "$\wedge$" θα ερμηνεύεται «και» το «$\to$» , «συνεπάγεται» κ.λ.π. Το μόνο που αξίζει ιδιαίτερης προσοχής είναι οι μεταβλητές της $\mathscr{L}(\Sigma)$ που πρέπει να ερμηνεύονται σαν στοιχεία - μεταβλητές του και συνακόλουθα έχουμε και μια ερμηνεία των όρων και των τύπων. Ακριβέστερα έχουμε:

1.3.15 Ορισμός. Θα συμβολίζουμε με το ίδιο σύμβολο , την ακόλουθη συνάρτηση: $I : V \ni x \mapsto x^I \in$ που λέγεται και **αποτίμηση των μεταβλητών**. Ετσι το x^I στην ουσία είναι το νόημα που δίνουμε στη μεταβλητή x. Η συνάρτηση επεκτείνεται και στους όρους της $\mathscr{L}(\Sigma)$:

(i) Αν ο όρος t συμπίπτει με μια μεταβλητή $x \in V$, τότε $t^I := I(x) \equiv x^I$. Επίσης αν $t = c \in \mathscr{C}$, τότε $t^I := I(c) \equiv c^I \equiv c^A$

(ii) Αν $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ τότε $t^I = f^I(t_1^I, \ldots t_n^I)$.

Εχοντας ορίσει την ερμηνεία των μη-λογικών και των λογικών συμβόλων καθώς επίσης και των $\mathscr{L}(\Sigma)$-όρων, οι ατομικοί τύποι, αλλά και κάθε τύπος χωρίς ελεύθερες μεταβλητές, δηλαδή πρόταση, αποκτάει μια τιμή αληθείας, γίνεται δηλαδή ή αληθής ή ψευδής, ως προς την ερμηνεία - αποτίμηση I.

Εστω μια πρόταση φ της γλώσσας $\mathscr{L}(\Sigma)(A)$, τότε ορίζουμε επαγωγικά τη σχέση "$\models_I$", που λέγεται **σχέση ικανοποιησιμότητας:**

1.3.16 Ορισμός. Πρώτα δίνουμε τον ορισμό για τους ατομικούς τύπους:

(i) Εχουμε, $\mathfrak{A} \models_I (t_1 = t_2) \quad t_1^I = t_2^I$. Για ευκολία χρησιμοποιούμε μόνον ένα n-μελές κατηγόρημα R. Το ίδιο όμως ισχύει και για οποιοδήποτε άλλο. Απλά αυξάνονται οι ατομικοί τύποι.

(ii) $\mathfrak{A} \models_I R(t_1, \ldots, t_n) \quad (t_1^I, \ldots t_n^I) \in R_I$ Στη συνέχεια, με την επαγωγική υπόθεση ότι έχουμε ορίσει την σημασία του συμβόλου $\models_I$ για τύπους που κατασκευάστηκαν στο n-στό βήμα, ορίζουμε το σύμβολο για τους τύπους του (n+1)-στου βήματος.

(iii) $\mathfrak{A} \models_I \neg\varphi$ αν δεν ισχύει ότι $\mathfrak{A} \models_I \varphi$

(iv) $\mathfrak{A} \models_I (\varphi \wedge \psi) \quad \mathfrak{A} \models_I \varphi \quad \mathfrak{A} \models_I \psi$

(v) $\mathfrak{A} \models_I (\varphi \vee \psi) \quad \mathfrak{A} \models_I \varphi$ ή/και $\mathfrak{A} \models_I \psi$

(vi) $\mathfrak{A} \models_I (\varphi \to \psi) \quad \mathfrak{A} \models_I \neg\varphi \quad \mathfrak{A} \models_I \psi$ (δηλαδή $\mathfrak{A} \models_I \varphi \Rightarrow \mathfrak{A} \models_I \psi$

(vii) $\mathfrak{A} \models_I (\exists x)[\varphi(x)]$ αν υπάρχει ένα $a \in A$, τέτοιο ώστε $\mathfrak{A} \models_I \varphi(a)$.

Ακριβέστερα έχουμε $\mathfrak{A} \models_I \varphi(\mathbf{a}|\mathbf{x})$ όπου $\mathbf{a}|\mathbf{x}$ είναι η αντικατάσταση του **x** από το **a**, θα γράφουμε όμως πιο απλά $\mathfrak{A} \models_I \varphi(a)$.

(viii) $\mathfrak{A} \models_I (\forall x)[\varphi(x)]$ αν για κάθε $a \in A$ έχουμε $\mathfrak{A} \models_I \varphi(a)$.

Ετσι συμπληρώθηκε ο ορισμός του συμβόλου "$\models_I$" με επαγωγή στο μήκος ή την πολυπλοκότητα των τύπων.

Η σχέση ικανοποίησης μπορεί να θεωρηθεί και σαν μια σημαντική ερμηνεία των προτάσεων χωρίς ελεύθερες μεταβλητές, στο δισύνολο $\{0, 1\}$, όπου χρησιμοποιούμε το "0" για το «ψεύδος» και το "1" για την «αλήθεια» . Δηλαδή αν, **Sent** $(\mathscr{L}_\Sigma(A)) \equiv S((\mathscr{L}_\Sigma(A)))$ είναι οι προτάσεις της $\mathscr{L}_\Sigma(A)$, τότε:

$$I \; : \; \mathbf{Sent}\,(\mathscr{L}_\Sigma(A)) \to \{0, 1\}$$
$$\varphi \mapsto I(\varphi) := \begin{cases} 1 & \text{αν } \; \mathfrak{A} \models \varphi \\ 0 & \text{αν } \; \mathfrak{A} \not\models \end{cases}$$

1.3.17 Ορισμός. Αν $\mathfrak{A} \models \varphi$ τότε θα λέμε ότι η δομή $\mathfrak{A}$ είναι ένα **μοντέλο για την πρόταση** φ, αν δε $\mathfrak{A} \models \varphi$ για κάθε $\varphi \in \Sigma$ τότε θα λέμε ότι η δομή $\mathfrak{A}$ **είναι ένα μοντέλο για τη συλλογή των προτάσεων Σ**, και συχνά γράφουμε $\mathfrak{A} \models \Sigma$.

Είναι φανερό ότι η αλήθεια ή το ψεύδος του $\mathfrak{A} \models \varphi$ ως προς την αποτίμηση των μεταβλητών $I : V \to A$, εξαρτάται μόνον από τις τιμές $I(x)$, των μεταβλητών x που είναι ελεύθερες στον τύπο φ. Ετσι αν οι ελεύθερες μεταβλητές του φ είναι μεταξύ των $\{x_1, \ldots, x_n\}$ συμβολικά $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ και $a_1 = I(x_1), \ldots, a_n = I(x_n)$ τότε θα γράφουμε $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ αντί του $\mathfrak{A} \models \varphi(x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n)$.

Βλέπουμε ακόμη ότι στον ορισμό $\mathfrak{A} \models_I \varphi$, οι δεσμευμένες και οι ελεύθερες μεταβλητές παίζουν τελείως ξεχωριστούς ρόλους κατά την διαδικασία διαπίστωσης της αλήθειας της φ.

Στις ελεύθερες εμφανίσεις της μεταβλητής x, απονέμουμε μια σταθερή τιμή $I(x) \in A$, ενώ στις δεσμευμένες δεν απονέμουμε καμιά συγκεκριμένη σταθερή τιμή, αλλά ουσιαστικά μεταβάλλονται πλέον σε μεταβλητές του A.

Ας δούμε στη συνέχεια ορισμένες βασικές έννοιες από τη Θεωρία Μοντέλων.

Εστω δυο Σ-δομές $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$. Και στην περίπτωση των Σ-δομών έχουμε έννοιες, όπως, **ομομορφισμός, ισομορφισμός**, κ.λ.π. Ακριβέστερα έχουμε:

1.3.18 Ορισμός. **(i)** Μια συνάρτηση $h : A \to B$ θα λέγεται **ομομορφισμός** αν για κάθε $R \in \mathscr{R}$, για κάθε $f \in \mathscr{F}$ και για κάθε $c \in \mathscr{C}$, έχουμε:

$$(a_1, \ldots, a_k)_{I_A} \in R_{I_A} \Rightarrow (h(a_1), \ldots, h(a_2) \in R_{I_B}$$

$$h(f_{I_A}(a_1, \ldots, a_m)) = f_{I_B}(h(a_1), \ldots h(a_m))$$

και

$$h(c_{I_A}) = c_{I_B}.$$

όπου I_A συμβολίζει την ερμηνεία της $\mathscr{L}(\Sigma)$ στην Σ-δομή $\mathscr{A}$ με φορέα το σύνολο A, όμοια με την I_B.

(ii) Μια συνάρτηση $h : A \to B$ θα λέγεται **εμφύτευση** της $\mathscr{A}$ στην $\mathscr{B}$ αν η h είναι ένας $1-1$ ομομορφισμός.

(iii) Μια συνάρτηση $h : A \to B$ θα λέγεται **ισομορφισμός** μεταξύ των Σ-δομών $\mathscr{A}$ και $\mathscr{B}$ αν η h είναι μια εμφύτευση του A **επί του** , θα γράφουμε δε $\mathscr{A} \cong \mathscr{B}$.

(iv) Οι Σ-δομές $\mathscr{A}$ και $\mathscr{B}$ θα λέγονται **στοιχειωδώς ισοδύναμες** (elementary equivalent), συμβολικά $\mathscr{A} \cong \mathscr{B}$, αν για κάθε $\varphi \in \textbf{Form}(\mathscr{L}_\Sigma)$,

$$\mathscr{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathscr{B} \models \varphi$$

Ετσι οι δομές $\mathscr{A}$ και $\mathscr{B}$ δεν μπορούν να διαφοροποιηθούν από μια $\mathscr{L}(\Sigma)$-πρόταση.

Αν $\mathrm{Th}(\mathscr{A}) := \{\, \varphi \in \textbf{Form}(\mathscr{L}_\Sigma) | \, \mathscr{A} \models \varphi \,\}$, είναι η θεωρία του $\mathscr{A}$, τότε η σχέση $\equiv$ εκφράζεται και ως εξής: $\mathscr{A} \equiv \mathscr{B}$ αν $\mathrm{Th}(\mathscr{A}) = \mathrm{Th}(\mathscr{B})$.

Αν $h : A \to B$ είναι ένας ισομορφισμός, τότε με επαγωγή μπορεί να δειχτεί ότι αν $FV(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ τότε,

$$\mathscr{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathscr{B} \models \varphi[h(a_1), \ldots, h(a_n)]$$

Ετσι $\mathscr{A} \cong \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{A} \equiv \mathscr{B}$. **Το αντίστροφο δεν ισχύει.**

(v) Μια εμφύτευση $h : A \hookrightarrow B$ της $\mathscr{A}$ στην $\mathscr{B}$ θα λέγεται $\mathscr{L}_\Sigma$-**στοιχειώδης εμφύτευση** αν για κάθε $\mathscr{L}(\Sigma)$-τύπο με $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ έχουμε:

$$\mathscr{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathscr{B} \models \varphi[h(a_1), \ldots, h(a_n)],$$

για κάθε, $a_1, \ldots, a_n \in A$.

1.3.19 Ορισμός. Εστω $\mathscr{A}$ και $\mathscr{B}$ δυο Σ-δομές. Θα λέμε ότι η $\mathscr{A}$ είναι μια **υποδομή (ή υπομοντέλο),** συμβολικά $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$, της δομής $\mathscr{B}$ αν για όλα τα n-μελή σύμβολα σχέσεων και συναρτήσεων της $\mathscr{L}(\Sigma)$ έχουμε:

(i) $A \subseteq B \quad \& \quad c_{j,I_A} = c_{j,I_B}, \;\; j \in J$

(ii) $R_{I_A} = R_{I_B} \cap A^n$

(iii) $f_{I_A} = f_{I_B} \restriction A^n$.

Ετσι $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$ αν οι Σ-δομές $\mathscr{A}$ και $\mathscr{B}$ έχουν τις ίδιες σταθερές και οι σχέσεις και συναρτήσεις της $\mathscr{A}$ είναι περιορισμοί των αντίστοιχων σχέσεων και συναρτήσεων της $\mathscr{B}$, όπου $A \subseteq B$.

Για παράδειγμα το σώμα των ρητών $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ είναι μια υποδομή του σώματος $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ αλλά το διαταγμένο σώμα $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot, \leq, 0, 1 \rangle$ δεν είναι υποδομή του διαταγμένου σώματος $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, \leq, 0, 1 \rangle$.

1.3.20 Ορισμός. Εστω $\mathscr{A}$ και $\mathscr{B}$ δυο Σ-δομές. Τότε η δομή $\mathscr{A}$ είναι μια **στοιχειώδης υποδομή** της $\mathscr{B}$ (ή η $\mathscr{B}$ **είναι μια στοιχειώδης επέκταση** της $\mathscr{A}$, συμβολικά $\mathscr{A} \prec \mathscr{B}$ αν

(i) $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$ και,

(ii) Για κάθε φ με $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ και $a_1, \ldots, a_n \in A$ έχουμε: $\mathscr{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathscr{B} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$.

Αν $\mathscr{A} \prec \mathscr{B}$, τότε λέμε ότι οι Σ- δομές έχουν τις ίδιες αληθείς προτάσεις με παραμέτρους στο A.

Εχουμε ακόμη ότι: $\mathscr{A} \prec \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{A} \equiv \mathscr{B}$, το αντίστροφο δεν ισχύει. Για παράδειγμα αν $\mathscr{A} = \langle \mathbb{N} - \{0\}, < \rangle$ και $\mathscr{B} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$, τότε έχουμε $\mathscr{A} \cong \mathscr{B}$, $\mathscr{A} \equiv \mathscr{B}$, $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$, αλλά δεν ισχύει ότι $\mathscr{A} \prec \mathscr{B}$.

Στη συνέχεια θα συγχέουμε συνειδητά τα ονόματα $\mathbf{a}$ με τα πραγματικά αντικείμενα a, όταν δεν υπάρχει κίνδυνος παρανόησης.

Κεφάλαιο 2

ΥΠΕΡΓΙΝΟΜΕΝΑ ΔΟΜΩΝ

2.1 Εισαγωγή

Τα υπεργινόμενα δομών θα μπορούσαμε να τα χαρακτηρίσουμε και σαν κατασκευές αναφερόμενες σε μεταβαλλόμενες δομές, όπου με εφαρμογή της διαλεκτικής αρχής της «άρνησης της άρνησης» στο σχήμα σταθερό μεταβαλλόμενο, καταφέρνουμε να πάρουμε ποιοτικά ανώτερες ευσταθείς δομές που ικανοποιούν τους τύπους μιας γλώσσας $\mathscr{L}_\Sigma$.

2.2 Υπεργινόμενα Δομών

Υπεργινόμενα Δομών Στη συνέχεια μπορούμε να θεωρούμε δομές με μια ή περισσότερες γενικές σχέσεις ή πράξεις, από αυτές των πραγματικών αριθμών $(\mathbb{R};+,\cdot,\leq,0,1,)$, όμως για να διευκολύνουμε την ανάπτυξη του θέματος, θα περιοριστούμε σε γενικές δομές με οπλισμό $\Sigma = (\mathscr{R},\mathscr{F},\mathscr{C})$, όπου $\mathscr{R} = \{E,R\},\mathscr{F} = \emptyset,\mathscr{C} = \emptyset$. Το σύμβολο σχέσης E προορίζεται για τη σχέση της ισότητας, το δε R για σύμβολο μιας γενικής σχέσης. Στην ανάπτυξη του θέματος θα ακολουθήσουμε το [**?**].

Η γλώσσα για τις δομές αυτές θα συμβολίζεται απλά με $\mathscr{L}$. Ετσι η $\mathscr{L}$ είναι μια γλώσσα με μόνον ένα κατηγορηματικό σύμβολο για την ισότητα και ένα κατηγορηματικό σύμβολο για μια γενική σχέση.

Θα θεωρήσουμε και δω το διαλεκτικό σχήμα: **σταθερή δομή ενάντια σε μεταβαλλόμενη δομή.** Δηλαδή στην περίπτωση μας **δεν θα θεωρούμε μόνον μεταβαλλόμενα στοιχεία που ανήκουν στον φορέα μιας δομής**, όπως η $\langle\mathbb{R};+,\cdot,\leq,0,1\rangle$ **αλλά ταυτόχρονα θα μεταβάλλονται και οι Σ-δομές.**

Εστω T ένα σύνολο, που θα το χρησιμοποιούμε σαν πεδίο μεταβολής του χρόνου (χρονοσύνολο) και έστω $\{\mathfrak{A}_t : t \in T\}$ μια μεταβαλλόμενη Σ - δομή όπου $\mathfrak{A}_t := \langle A_t;R_t \rangle$. Αν θέλουμε ταυτόχρονα να θεωρήσουμε και μεταβαλλόμενα στοιχεία, όπου για κάθε $t \in T$, $f(t) \in A_t$, τότε είναι φανερό ότι θα πρέπει να θεωρήσουμε το καρτεσιανό γινόμενο $\mathfrak{A} \equiv \prod\limits_{t \in T} \mathfrak{A}_t := \langle A, R \rangle$, όπου Είναι φανερό

Σχήμα 2.1: Χαρακτηριστικό στοιχείο του: $A \equiv \prod_{t \in T} A_t := \{f | f : T \to \bigcup_{t \in T} A_t \quad \& \quad f(t) \in A_t, \ t \in T\}$

ότι κάθε στοιχείο $f \in \prod\limits_{t \in T} A_t$ είναι ένα μεταβαλλόμενο στοιχείο που αναφέρεται σε μεταβαλλόμενες Σ-δομές, έτσι ώστε για κάθε χρονοσημείο $t \in T$, $f(t) \in A_t$. Κάθε τέτοιο μεταβαλλόμενο στοιχείο λέγεται και **συνάρτηση επιλογής**, αφού επιλέγει για κάθε χρονοσημείο $t \in T$ ένα στοιχείο από το A_t. Για να υπάρχουν τέτοια μεταβαλλόμενα στοιχεία πρέπει να ισχύει το **Αξίωμα της Επιλογής**.

Η σχέση R, ορίζεται ως ακολούθως:

$$R := \{(f, g) \in A \times A \,|\, (\forall t \in T)[(f(t), g(t)) \in R_t]\}$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς, όπως και στην περίπτωση όπου $T = \mathbb{N}$ και $\mathfrak{A}_n = \langle \mathbb{R}, +, \cdot, \leq, 0, 1 \rangle$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ότι η δομή $\langle A, R \rangle$ δεν ικανοποιεί τις ιδιότητες πρώτης τάξης, που ικανοποιούνται στις στιγμιαίες δομές $\mathfrak{A}_t, \quad t \in T$. Είναι δηλαδή δυνατόν να έχουμε $\mathfrak{A}_t \models \varphi$ για κάθε $t \in T$, αλλά $\mathfrak{A} \not\models \varphi$. Εχουμε ήδη παρατηρήσει τέτοια παραδείγματα για την περίπτωση των πραγματικών αριθμών και για τα αξιώματα που λένε ότι στο $\mathbb{R}$ δεν υπάρχουν διαιρέτες του μηδενός και ακόμη ότι το $\mathbb{R}$ είναι ολικά διατεταγμέμο. Ωστόσο το $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ έχει και διαιρέτες του μηδενός αλλά και δεν είναι ολικά διατεταγμέμο. Στη συνέχεια δεν θα κάνουμε διάκριση μεταξύ ονόματος f και συνάρτησης f.

Παρατηρούμε ότι παρ' όλο που για κάθε $f, g, \in A$ είναι δυνατόν να μην ισχύει ότι $(f(t), g(t)) \in E_t$, για κάθε $t \in T$, μπορεί όμως για κάποια $t \in T$, πράγματι να έχουμε $(f(t), g(t)) \in E_t$. Ομοίως είναι δυνατόν, για κάποια $t \in T$ να έχουμε ότι $(f(t), g(t)) \in R_t$, ενώ για κάποια άλλα $(f(t), g(t)) \notin R_t$. Ετσι για κάθε $f, g \in A$, ορίζουμε την **τιμή αληθείας** των ατομικών τύπων ως ακολούθως:

$$\begin{array}{rcccl} E & : & A \times A & \to & \mathscr{P}(T) \\ & & (f,g) & \mapsto & E(f,g) := \{t \in T | f(t) = g(t)\} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccl} R & : & A \times A & \to & \mathscr{P}(T) \\ & & (f,g) & \mapsto & R(f,g) := \{t \in T | \, (f(t), g(t)) \in R_t\} \end{array}$$

Ετσι ο βαθμός ή η τιμή αλήθειας, με την οποία ισχύει η ισότητα μεταξύ των f, g είναι το σύνολο των στιγμών $t \in T$, κατά τις οποίες ισχύει πράγματι η ισότητα. Ομοια ερμηνεία ισχύει και για την $R(f, g)$.

Τις παραπάνω συναρτήσεις τιμών αλήθειας τις επεκτείνουμε και σε γενικούς τύπους της γλώσσας $\mathscr{L}(A)$, παίρνοντας έτσι **μια συνάρτηση αλήθειας** που αντί να παίρνει δυο τιμές στην τετριμμένη άλγεβρα του Boole $\mathbf{2} \equiv \{0, 1\}$, παίρνει τιμές στην δυναμοάλγεβρα του Boole $\mathscr{P}(T)$. Ετσι με επαγωγή ορίζουμε την συνάρτηση:

$$\begin{array}{rcccl} [\![\cdot]\!] & : & S\left(\mathscr{L}(A)\right) & \to & \mathscr{P}(T) \\ & & \varphi & \mapsto & [\![\varphi]\!] \end{array}$$

ως ακολούθως

(i) Για ατομικούς τύπους την έχουμε ήδη ορίσει:

$$[\![f = g]\!] := E(f, g) \quad [\![R(f, g)]\!] := R(f, g)$$

σημειωτέον τα f, g στα $[\![\ f = g \ ]\!]$ και $[\![\ R(f, g) \ ]\!]$ κανονικά θα έπρεπε να είναι $[\![\ \mathbf{f} = \mathbf{g} \ ]\!]$ και $[\![\ \mathbf{R}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \ ]\!]$.

(ii) Εστω τώρα ότι έχουμε ορίσει την τιμή αλήθειας για τις προτάσεις, $\varphi, \psi \in S(\mathscr{L}(A))$, τότε,

$$[\![\varphi \wedge \psi]\!] := [\![\varphi]\!] \cap [\![\psi]\!]$$

$$[\![\neg\varphi]\!] := T \setminus [\![\varphi]\!]$$

(iii) Για κάθε φ με FV$(\varphi) \subseteq \{x\}$, ας υποθέσουμε ότι έχουμε ορίσει την τιμή αλήθειας για κάθε αντικατάσταση της ελεύθερης μεταβλητής.

τότε,

$$[\![(\exists x)\varphi]\!] := \bigcup_{f \in A} [\![\varphi(f)]\!]$$

Σημειώστε ότι για κάθε πρόταση φ, η $[\![\,\varphi\,]\!]$ είναι υποσύνολο του $\mathscr{P}(T)$. Στην περίπτωση του $^*\mathbb{R}$, οι τιμές αλήθειας ήταν υποσύνολα του $\mathbb{N}$.

Εστω τώρα ένας τύπος φ με $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$, τότε η συνάρτηση αλήθειας $[\![\,\varphi(f_1, \ldots, f_n)\,]\!]$ είναι ίση με το σύνολο των στιγμών $t \in T$, για τις οποίες ισχύει η $\varphi\,(f_1(t), \ldots, f_n(t))$ στην στιγμιαία δομή $\mathfrak{A}_t$. Ακριβέστερα έχουμε:

2.2.1 Θεώρημα. *Εστω φ ένας $\mathscr{L}$-τύπος με $FV(\varphi) \subseteq \{\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n}\}$, τότε, για κάθε $\mathbf{f_1}, \ldots, \mathbf{f_n} \in \mathbf{A}$, έχουμε:*

$$[\![\,\varphi(\mathbf{f_1}, \ldots, \mathbf{f_n})\,]\!] = \{\mathbf{t} \in \mathbf{T} : \mathfrak{A}_\mathbf{t} \models \varphi[\,\mathbf{f_1}(\mathbf{t}), \ldots, \mathbf{f_n}(\mathbf{t})\,]\}$$

Proof: Το αποτέλεσμα ισχύει για ατομικούς τύπους εξ ορισμού. Εστω τώρα ότι $\varphi \equiv \psi_1, \wedge\psi_2$ και ότι το αποτέλεσμα ισχύει για τους τύπους ψ_1 και ψ_2. Τότε,

$$\begin{aligned}
[\![\,\varphi(f_1, \ldots, f_n)\,]\!] &= [\![\,\psi_1(f_1, \ldots, f_n)\,]\!] \cap [\![\,\psi_2(f_1, \ldots, f_n)\,]\!] \\
&= \{t \in T : \mathfrak{A}_t \models \psi_1[f_1(t), \ldots, f_n(t)]\}1 \\
&\qquad \cap \{t \in T : \mathfrak{A}_t \models \psi_2[f_1(t_1), \ldots f_n(t)]\} \\
&= \{t \in T : \mathfrak{A}_t \models (\psi_1 \wedge \psi_2)[f_1(t), \ldots, f_n(t)]\} \\
&= \{t \in T : \mathfrak{A}_t \models \varphi[f_1(t), \ldots f_n(t)]\}
\end{aligned}$$

Ετσι το αποτέλεσμα ισχύει για τύπους $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$. ⊣□

Εστω τώρα ότι $\varphi \equiv \neg\psi$ και ότι το αποτέλεσμα ισχύει για τον τύπο ψ. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
[\![\,\varphi(f_1, \ldots, f_n)\,]\!] &= T \setminus [\![\,\psi(f_1, \ldots, f_n)\,]\!] \\
&= T \setminus \{t \in T : \mathfrak{A}_t \models \psi[f_1(t), \ldots, f_n(t)]\} \\
&= \{t \in T : \mathfrak{A}_t \models \neg\psi[f_1(t), \ldots, f_n(t)]\} \\
&= \{t \in T : \mathfrak{A}_t \models \varphi[f_1(t), \ldots, f_n(t)]\}
\end{aligned}$$

Αρα στην περίπτωση αυτή ισχύει. ⊣□

Τέλος έστω $\varphi \equiv (\exists x_k)[\psi]$.Αν $\alpha = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$ είναι μια αποτίμιση των μεταβλητών $x_1 \ldots, x_n \ldots$ τότε θα συμβολίζουμε με $\alpha(\kappa|f(t))$ την ίδια αποτίμηση μεταβλητών εκτός του ότι η μεταβλητή x_k αποτιμάται με το στοιχείο $f(t)$, δηλ.,

$$k\,(k|f) := (\,f_1(t), \ldots, f_{k-1}(t), f(t), f_{k+1}(t), \ldots f_n(t)\,)$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω $k \leq n$. Εχουμε:

$$\begin{aligned}
[\![\,\varphi(f_1, \ldots, f_n)\,]\!] &= \llbracket\,(\exists x_k)[](f_1, \ldots f_n)\,\rrbracket \\
&= \bigcup_{f \in A} [\![\,\psi(\alpha(k\,|\,f))\,]\!] \\
&= \bigcup_{f \in A} \{t \in T : \mathfrak{A}_t \models \psi[\alpha(k\,|\,f)]\}
\end{aligned}$$

Είναι φανερό ότι αν,

$$\{t \in T \ : \ \exists \ f \in , \ \ \mathfrak{A}_t \models \psi[\alpha\,(\,k|f(t))]\} \equiv X$$

τότε

$$X \subseteq \{t \in T : \mathfrak{A}_t \models (\exists x_k \psi)[f_1(t), \ldots, f_n(t)]\} \equiv t(\varphi)$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει και η αντίστροφη σχέση. Εστω $t \in T(\varphi)$, τότε υπάρχει $a \in A_t$ τέτοιο ώστε,

$$\mathfrak{A}_t \models \psi[\alpha(k|a)]$$

Αν τώρα πάρουμε μια $f \in A$ με $f(t) = a$, τότε βλέπουμε ότι $t \in X$, έτσι $X = T(\varphi)$ και επομένως ο τύπος ισχύει και στην τελευταία αυτή περίπτωση. ⊣

Από το Θεώρημα 2.2.1, αν κάθε $\mathfrak{A}_t$ ταυτίζεται με κάποια δομή $\mathfrak{B}$, $t \in T$ οπότε στην περίπτωση αυτή έχουμε αντί το γινόμενο $\prod\limits_{t \in T} A_t$ την δύναμη B^T, και αν για κάθε $b \in B$ ορίσουμε την σταθερή συνάρτηση

$$\begin{array}{cccc} \hat{b} & : & T & \rightarrow & B \\ & & t & \mapsto & \hat{b} \equiv b \end{array}$$

τότε μπορεί κανείς να δείξει ότι:
Για κάθε τύπο φ με $FV(\varphi) \subseteq \{x_1 \ldots, x_n\}$ και για κάθε $\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_n} \in \mathbf{B}$ έχουμε ότι:

$$\mathfrak{B} \models \varphi[b_1, \ldots b_n] \ \Leftrightarrow \ [\![\, \varphi(\widehat{b_1} \ldots, \widehat{b_n} \,]\!] = T$$

Δηλαδή ο φ ικανοποιείται στη δομή $\mathfrak{B}$ αν στην δύναμη B^T ικανοποιείται για κάθε χρονική στιγμή $t \in T$.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε την ακόλουθη χρήσιμη πρόταση:

2.2.2 Πρόταση. *Εστω φ ένας $\mathscr{L}(A)$*-**τύπος με** *$FV(\varphi) \subseteq \{\mathbf{x}\}$ $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbf{A}$, τότε,*

$$[\![\, \mathbf{f} = \mathbf{g} \,]\!] \cap [\![\, \varphi(\mathbf{f}) \,]\!] \subseteq [\![\, \varphi(\mathbf{g}) \,]\!].$$

Proof: Εχουμε ότι,

$$[\![\, f = g \,]\!] = \{t \in T \,|\, f(t) = g(t)\}$$

και από το Θεώρημα 2.2.1 έχουμε,

$$[\![\, \varphi(f) \,]\!] = \{t \in T \,|\, \mathfrak{A}_t \models \varphi[f(t)]\}$$

άρα,

$$\begin{aligned} [\![\, f = g \,]\!] \cap [\![\, \varphi(f) \,]\!] &= \{t \in T \,|\, [f(t) = g(t)] \wedge \mathfrak{A}_t \models \varphi[f(t)]\} \\ &= \{t \in T \,|\, [f(t) = g(t)] \wedge \mathfrak{A}_t \models \varphi[g(t)]\} \\ &\subseteq \{t \in T \,|\, \mathfrak{A}_t \models \varphi[g(t)\} = [\![\, \varphi(g) \,]\!] \end{aligned}$$

Είμαστε τώρα έτοιμοι να αποδείξουμε την βασική **Αρχή του Μεγίστου**, που μας λέει ότι στον ορισμό,

$$[\![\ \exists x\varphi\ ]\!] := \bigcup_{f\in A} [\![\ \varphi(f)\ ]\!]$$

υπάρχει στοιχείο $f \in A$ έτσι ώστε να επιτυγχάνεται το supremum $\bigcup\limits_{f\in A} [\![\ \varphi(f)\ ]\!]$, ως προς το μερικά διατεταγμέμο σύνολο $\langle \mathscr{P}(T), \subseteq \rangle$.

2.2.3 Θεώρημα. **(Αρχή του μεγίστου)** *Εστω φ ένας $\mathscr{L}$(A)-τύπος με* $\mathbf{FV}(\varphi) \subseteq \{\mathbf{x}\}$. *Τότε υπάρχει* $\mathbf{g} \in \mathbf{A}$ *έτσι ώστε:*

$$[\![\ \exists x\varphi(x)\ ]\!] := \bigcup_{f\in A} [\![\ \varphi(f)\ ]\!] = [\![\ \varphi(g)\ ]\!]$$

Proof: Με την προϋπόθεση ότι ισχύει το Αξίωμα της επιλογής AC, μπορούμε να διατάξουμε καλώς το A με τη μορφή $\{f_\xi : \xi < \alpha\}$ για κάποιο διατακτικό α. Για κάθε $\xi < \alpha$, θέτουμε:

$$T_\xi := [\![\ \varphi(f_\xi)\ ]\!] \setminus \bigcup_{n<\xi} [\![\ \varphi(f_n)\ )$$

Ετσι έχουμε:

$$[\![\ \exists x\varphi\ ]\!] = \bigcup_{f\in A} [\![\ \varphi(f)\ ]\!] = \bigcup_{\xi<\alpha} [\![\ \varphi(f_\xi)\ ]\!] = \bigcup_{\xi<\alpha} T_\xi \qquad (*)$$

αφού $[\![\ \varphi(f_\xi)\ ]\!] \cap [\bigcup\limits_{n<\xi} [\![\ \varphi(f_n)\ ]\!]] = \emptyset$.

Επίσης, αν $\xi \neq n$ τότε $T_\xi \cap T_n = \emptyset$, έτσι μπορούμε να επιλέξουμε ένα $g \in A$, που να ικανοποιεί τη σχέση,

$$g \restriction T_\xi = f_\xi \restriction T_\xi \qquad \xi < a$$

Τότε $T_\xi \subseteq [\![\ g = f_\xi\ ]\!]$, είναι δε φανερό ότι $T_\xi \subseteq [\![\ \varphi(f_\xi)\ ]\!]$, έτσι από την Πρόταση 2.2.2 έχουμε:

$$T_\xi \subseteq [\![\ g = f_\xi\ ]\!] \cap [\![\ \varphi(f_\xi) \subseteq]\!] \varphi(g) [\![\qquad \}\xi < a$$

Αρα, $\bigcup\limits_{\xi<a} T_\xi \subseteq [\![\ \varphi(g)\ ]\!]$ και επομένως από την $(*)$ έχουμε:

$$[\![\ \exists x\varphi\ ]\!] \subseteq [\![\ \varphi(g)\ ]\!]$$

Αφού δε,

$$[\![\,\exists\varphi\,]\!] := \bigcup_{f\in A} [\![\,\varphi(f)\,]\!]$$

άρα η αντίστροφη σχέση είναι φανερή, έτσι λοιπόν,

$$[\![\,\exists x\varphi\,]\!] = [\![\,\varphi(g)\,]\!].$$

και η απόδειξη συμπληρώθηκε. ⊣

Μέχρι στιγμής έχουμε κατασκευάσει μια δομή $\mathfrak{A} = \langle A\,; E, R\rangle$ με τιμές αλήθειας στην άλγεβρα του Boole $\mathscr{P}(T)$. Η δομή $\mathfrak{A}$ είναι η δομή μετά την άρνηση της σταθερότητας, και των δομών $\mathfrak{A}_t$ καθ' εαυτών, αλλά και των στοιχείων $f_t \in A_t,\ t \in T$. Ετσι **κάθε $\mathbf{f} \in \mathbf{A}$ είναι ένα μεταβαλλόμενο στοιχείο με στιγμιαίες τιμές $\mathbf{f_t} \in \mathbf{A_t}, \mathbf{t} \in \mathbf{T}$ η δε τιμή αλήθειας $[\![\,\varphi\,]\!]$ κάθε πρότασης είναι το σύνολο των χρονικών στιγμών $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$, για τις οποίες η φ είναι αληθής.**

Ο επόμενος στόχος μας είναι να **αρνηθούμε την άρνηση της σταθερότητας, και των δομών και των στοιχείων.** Με την δεύτερη αυτή άρνηση, ελπίζουμε να περάσουμε από την δομή των Boole $\langle A\,;\,E, R\rangle$ (Boolean - valued structure), των μεταβαλλόμενων $\mathscr{L}$-δομών και ταυτόχρονα μεταβαλλόμενων στοιχείων, σε μια συνηθισμένη $\mathscr{L}$-δομή, όπως ακριβώς από το $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ πήραμε την $^*\mathbb{R}$. Στο δεύτερο μέρος αυτού του βιβλίου, εξετάζεται, ο τρόπος μελέτης της $\langle A\,;\,E, R\rangle$, σαν δομής το Boole, χωρίς αναγκαίο πέρασμα στη σταθερότητα.

Το βήμα της άρνησης γίνεται πάλι με βάση ένα μεγιστικό (maximal) ελεύθερο φίλτρο, δηλαδή ένα ελεύθερο υπερφίλτρο $\mathcal{F}_M$. Το $\mathcal{F}_M$ παράγεται από το φίλτρο του Fréchet $\mathcal{F}$, που και εδώ ορίζεται με ανάλογο τρόπο, όπως και στην περίπτωση των «ουρών ακολουθιών δεικτών'από το $\mathbb{N}$. Το υπερφίλτρο $\mathcal{F}_M$ ταυτόχρονα επιβάλλει και ένα «καθεστώς αλήθειας'στο μοντέλο $\mathfrak{A}$. Ας ξαναθυμηθούμε όμως πρώτα κάποια βασικά αποτελέσματα για τα φίλτρα.

2.2.1 Η Έννοια του Φίλτρου και η Αναγωγική Μείωση. (reduction)

2.2.4 Ορισμός. Εστω T ένα μη-κενό σύνολο. Ενα **φίλτρο** $\mathscr{F}$ επί του T (ακριβέστερα επί της $\mathscr{P}(T)$) είναι μια μη-κενή κλάση υποσυνόλων του T, $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(T)$, τέτοια ώστε:

(F$_1$) $T \in \mathscr{F}$

(F$_2$) Αν , $\in \mathscr{F}$ τότε $\cap B \in \mathscr{F}$.

(F$_3$) An $A \in \mathscr{F}$ και $\subseteq B$ τότε $\in \mathscr{F}$.

Δυϊκά μπορούμε να ορίσουμε την έννοια του ιδεώδους ή ιδεατού. Το $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{P}(T)$ λέγεται **ιδεώδες** ανν

(I$_1$) $\emptyset \in \mathscr{I}$

(I$_2$) Αν $,\ \in \mathscr{I}$ τότε $\cup B \in \mathscr{I}$.

(I$_3$) An $A \in \mathscr{I}$ και $B \subseteq A$ τότε $\in \mathscr{I}$.

Είναι φανερό ότι αν $\mathscr{F}^c := \{A^c : A \in \mathscr{F}\}$ τότε το $\mathscr{F}$ είναι φίλτρο ανν το $\mathscr{F}^c$ είναι ιδεώδες και αντίστροφα, αν $^c := \{A^c : A \in \}$ τότε το είναι ιδεώδες ανν το ^{c} είναι φίλτρο.

Οι ίδιοι ακριβώς ορισμοί ισχύουν και στην περίπτωση μιας γενικής αλγέβρας Boole $\mathbb{B}$ αντί της $\mathscr{P}(T)$ ή ακόμα και ενός δικτυωτού.

Ασκηση. Να εξεταστεί αν οι συνθήκες (F_2) & (F_3) είναι ισοδύναμεσ μστη ακόλουθη συνθήκη:

$$\in \mathscr{F},\ \&\ \in \mathscr{F} \Leftrightarrow\ \cap B \in \mathscr{F}$$

2.2.5 Παράδειγμα. **(i)** Για κάθε $\in T$ το **κύριο (principal) ή τετριμμένο** φίλτρο ορίζεται ως εξής:

$$\mathscr{F}_x := \{A \in \mathscr{P}(T) : x \in A\}$$

(ii) Το **φίλτρο του Fréchet** επί του T, ορίζεται ανάλογα ως εξής:

$$\mathscr{F} := \{A \subseteq T | T \setminus A \ \{\ \ \} \subseteq \mathscr{P}(\mathrm{T}).$$

(iii) Εστω $(, \mathscr{A}, P)$ ένας χώρος πιθανότητας και,

$$\mathscr{F} := \{A \in \mathscr{A} : P(A) = 0\}$$

Τότε το $\mathscr{F}$ είναι ένα δ-φίλτρο (κλειστό δηλαδή ως προς αριθμήσιμες τομές).

(iv) Αν $(, \mathscr{T})$ είναι ένας τοπολογικός χώρος, τότε το σύστημα γειτονίων ενός σημείου $x \in T$

$$\mathscr{F}(x) := \{G \in \mathscr{T} : G \quad \text{είναι μια περιοχή του } x\}$$

είναι ένα φίλτρο.

2.2.6 Πρόταση. *Εστω $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{P}(T)$ ένα ιδεώδες επί του T. Αν,*

$$A \sim_{\mathscr{I}} B \Leftrightarrow (A \triangle B) \in \mathscr{I}$$

τότε η σχέση $\sim_{\mathscr{I}}$ είναι μια ισοδυναμία.

Proof: Αφήνεται σαν άσκηση. ⊣

Εστω τώρα η οικογένεια των γνήσιων φίλτρων επί του T,

$$\mathfrak{F} := \{\mathscr{F} : \mathscr{F}\text{είναι ένα γνήσιο φίλτρο επί του}, \mathscr{F} \neq 2^T\}$$

Το $\mathfrak{F}$ είναι ένα επαγωγικό σύνολο (κάθε αύξουσα αλυσίδα έχει ένα άνω φράγμα). Από το Λήμμα του Zorn έχουμε ότι το $\mathfrak{F}$ έχει ένα μεγιστικό (maximal) στοιχείο. Ετσι έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

2.2.7 Ορισμός. Κάθε στοιχείο του συνόλου των μεγιστικών στοιχείων του $\mathfrak{F}$ λέγεται **υπερφίλτρο επί του T**

Με κατάλληλη χρήση του Λήμματος του Zorn μπορούμε να επεκτείνουμε κάθε γνήσιο φίλτρο επί του T σε ένα υπερφίλτρο επί του T.

2.2.8 Πρόταση. *Ενα φίλτρο $\mathscr{F}$ επί του T είναι ένα υπερφίλτρο ανν για κάθε $A \subseteq T$, ή $A \in \mathscr{F}$ (και επομένως) $T \setminus A \notin \mathscr{F}$ ή $T \setminus A \in \mathscr{F}_M$ (και επομένως) $A \notin \mathscr{F}_M$*

Proof: ($\Leftarrow$): Εστω ότι το $\mathscr{F}_M$ ικανοποιεί την ανωτέρω ιδιότητα, και έστω $\mathscr{F}_M \subset \mathscr{F}$ και $\mathscr{F}_M \neq \mathscr{F}$, άρα $\mathscr{F} \setminus \mathscr{F}_M \neq \emptyset$ και επομένως έστω $A \in \mathscr{F} \setminus \mathscr{F}_M \neq \emptyset$. Λόγω της συνθήκης $T \setminus A \notin \mathscr{F}_M$. Επειδή $\mathscr{F}_M \subset \mathscr{F}$, έχουμε ότι ούτε το A ούτε το $T \setminus A$ ανήκουν στο $\mathscr{F}$ και επομένως το $\emptyset = A \cap (T \setminus A) \in \mathscr{F}$ και έτσι $\mathscr{F} = 2^T$ που έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεσή μας ότι το φίλτρο $\mathscr{F}$ ήταν γνήσιο, άρα το $\mathscr{F}_M$ είναι ένα υπερφίλτρο. ⊣
($\Rightarrow$): Αντίστροφα έστω ότι το $\mathscr{F}_M$ είναι ένα υπερφίλτρο επί του T και έστω $A \subseteq T$. Ας υποθέσουμε ότι $T \setminus A \notin \mathscr{F}_M$, θα δείξουμε ότι $A \in \mathscr{F}_M$. Εστω $\mathscr{B} := \{A \cap B : B \in \mathscr{F}_M\}$. Εστω $\mathscr{F}(\mathscr{B})$ το φίλτρο επί του T που παράγεται από το $\mathscr{B}$. Εχουμε, $\mathscr{F}_M \subset \mathscr{F}(\mathscr{B})$ και αυτό γιατί αν $B \in \mathscr{F}_M$, τότε $A \cap B \in \mathscr{B} \subset \mathscr{F}(\mathscr{B})$ και άρα $B \in \mathscr{F}(\mathscr{B})$. Θα δείξουμε και την αντίστροφη σχέση. Πράγματι επειδή $T \setminus \notin \mathscr{F}_M$ έχουμε ότι $\emptyset \not\ni \mathscr{B}$ και επομένως το $\mathscr{F}(\mathscr{B})$ είναι ένα γνήσιο φίλτρο. Το $\mathscr{F}_M$ όμως είναι μεγιστικό και άρα $\mathscr{F}(\mathscr{B}) \subset \mathscr{F}_M$, επειδή δε $A \in \mathscr{F}(\mathscr{B})$ έχουμε αντίφαση. ⊣

2.2.9 Πρόταση. *Εστω $\mathscr{F}_M$ ένα υπερφίλτρο επί του T. Ας υποθέσουμε επίσης ότι αν $A_i \subset T$ $i = 1, \ldots, n$ με,*

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n \in \mathscr{F}_M$$

τότε, για κάποιο i, $A_i \in \mathscr{F}_M$.

Proof: Για να φθάσουμε σε αντίφαση, έστω ότι $A_i \notin \mathscr{F}_M$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$. Από την Πρόταση 2.2.8, έχουμε ότι $\setminus A_i \in \mathscr{F}_M$, έτσι

$$\emptyset = \bigcap_{1 \leq i \leq n} (T \setminus A_i) \cap (\bigcup_i A_i) \in \mathscr{F}_M$$

που είναι μια αντίφαση. ⊣

2.2.10 Λήμμα. *Το υπερφίλτρο $\mathscr{U}$ επί του T είναι τετριμμένο ανν υπάρχει ένα πεπαρασμένο σύνολο A τέτοιο ώστε $A \in \mathscr{U}$.*

Κάθε υπερφίλτρο που παράγεται από το φίλτρο του Fréchet λέγεται ελεύθερο υπερφίλτρο. Τα ελεύθερα υπερφίλτρα επί του $\mathbb{N}$ έχουν μια πολύ χρήσιμη για την απειροστική ανάλυση, ιδιότητα:

2.2.11 Πρόταση. *Κάθε μη-τετριμμένο υπερφίλτρο επί του $\mathbb{N}$, $\mathscr{U}$ είναι* **-μη-πλήρες** *(ή countably incomplete), δηλαδή, υπάρχει ακολουθία (A_n) με $A_n \in \mathscr{U}$ για κάθε n και ταυτόχρονα $\bigcap\limits_n A_n = \emptyset$.*

Proof: Εστω $n \in \mathbb{N}$. Λόγω ότι το $\mathscr{U}$ είναι μη τετριμμένο υπερφίλτρο, υπάρχει $_n \in \mathscr{U}$ με $n \notin A_n$. Για παράδειγμα έστω $A_n := \mathbb{N} \setminus \{n\}$. Είναι φανερό ότι $\imath_n A_n = \emptyset$. ⊣

Εστω τώρα $\mathscr{F}_M$ ένα υπερφίλτρο (μεγιστικό φίλτρο) που παράγεται από το φίλτρο του Fréchet $\mathscr{F}$ (ελεύθερο υπερφίλτρο). Το προϊόν της άρνησης της άρνησης είναι μια δομή $\mathfrak{A}/\mathscr{F}_M := (A/\mathscr{F}_M; R/\mathscr{F}_M)$ (την σχέση της ισότητας $= /\mathscr{F}_M \equiv =_{\mathscr{F}_M}$, δεν την περιλαμβάνουμε, αφού πάντα εννοείται ότι υπάρχει) που ορίζεται με ανάλογο τρόπο με αυτόν που χρησιμοποιήσαμε για τον ορισμό της $\left\langle \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \approx, \leq, +, \cdot, 0, 1 \right\rangle$, ως ακολούθως: Ορίζουμε πρώτα τη σχέση ισοδυναμίας επί του A, πάνω στην οποία ουσιαστικά, βασίζεται η άρνηση της άρνησης:

$$f =_{\mathscr{F}_M} g \Leftrightarrow [\![\, f = g \,]\!] \in \mathscr{F}_M$$

καθώς επίσης,

$$(f, g) \in R/\mathscr{F}_M \Leftrightarrow [\![\, (f, g) \,]\!] \in \mathscr{F}_M.$$

Επειδή το $\mathscr{F}_M$ είναι ένα υπερφίλτρο, η σχέση $=_{\mathscr{F}_M}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας. Εστω τώρα το σύνολο πηλίκο:

$$A/\mathscr{F}_M \equiv A/=_{\mathscr{F}_M} := \{[f] : f \in A\}$$

όπου $[f] := \{g \in A \,|\, f =_{\mathscr{F}_M} g\}$ είναι η κλάση ισοδυναμίας του $f \in A$.

Ετσι η δομή που είναι προϊόν της άρνησης της άρνησης είναι η $\mathfrak{A}/\mathscr{F}_M := (\,A/\mathscr{F}_M; R/\mathscr{F})$, την οποία θέλουμε να αποδείξουμε ότι είναι μια συνηθισμένη $\mathscr{L}$-δομή με την ιδιότητα ότι:

Αν μια μεταβαλλόμενη πρόταση $\{_{\mathbf{t}} : \mathbf{t} \in \mathbf{T}\}$ είναι τέτοια ώστε το σύνολο των χρονικών στιγμών $t \in T$, για τις οποίες η $\varphi_{\mathbf{t}}$ ισχύει, δηλαδή για τις οποίες έχουμε $\mathfrak{A}_t \models \varphi_t$, είναι ένα «μεγάλο σύνολο» ανήκει δηλαδή στο υπερφίλτρο $\mathscr{F}_M$, τότε η πρόταση ισχύει και στη δομή $\mathfrak{A}/\mathscr{F}_M$.

Η $\mathscr{L}$-δομή $\mathfrak{A}/\mathscr{F}_M$, που πλέον είναι μια δομή με δίτιμη λογική, σε αντίθεση με τη δομή του Boole $\mathfrak{A} = \langle A; R\rangle$, που ήταν μια δομή με πλειότιμη λογική, λέγεται **υπεργινόμενο** της μεταβαλλόμενης δομής $\{\mathfrak{A}_t : t \in T\}$, ως προς το υπερφίλτρο $\mathscr{F}_M$. Αν κάθε $\mathscr{L}$-δομή $\mathfrak{A}_t$ ταυτίζεται με μια σταθερή δομή $\mathscr{B}$, τότε το υπεργινόμενο λέγεται **υπερδύναμη της $\mathscr{B}$ ως προς το $\mathscr{F}_M$.** Για παράδειγμα η δομή $^*\mathfrak{R} := \left\langle \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\approx_{\mathscr{F}_M};+_{\mathscr{F}_M},\cdot_{\mathscr{F}_M},\leq_{\mathscr{F}} 0,1\right\rangle$ είναι υπερδύναμη της $\langle \mathbb{R},+,\cdot,\leq,0,1\rangle$ ως προς το ελεύθερο υπερφίλτρο $\mathscr{F}_M$. Το ακόλουθο θεώρημα είναι βασικότατο, και μαζί με το Πρόταση 2.2.2, μας δίνει το φημισμένο Θεώρημα του Łoś (συνήθως προφέρεται Λός, αλλά η σωστή Πολωνέζικη προφορά του είναι, γουάsh.).

2.2.12 Θεώρημα. *Εστω φ ένας $\mathscr{L}$- τύπος με $FV(\varphi) \subseteq \{x_1,\dots,x_n\}$ τότε για κάθε $f_1,\dots,f_n \in A$ έχουμε:*

$$\mathfrak{A}/\mathscr{F}_M \models \varphi[[f_1],\dots,[f_n]] \leftrightarrow [\![\, \varphi(f_1,\dots,f_n)\,]\!] \in \mathscr{F}_M$$

Proof: Η απόδειξη γίνεται και πάλι με επαγωγή στο μήκος ή στο βαθμό πολυπλοκότητας του τύπου φ. Οι ατομικοί τύποι της δομής $\mathfrak{A}/\mathscr{F}_M$ είναι οι ακόλουθοι:

$$[f_1] =_{\mathscr{F}_M} [f_2] \qquad R/\mathscr{F}_M([f_1],[f_2])$$

Εχουμε βεβαίως εξ ορισμού, $[f_1] =_{\mathscr{F}_M} [f_2] \leftrightarrow [\![\, f_1 = f_2\,]\!] \in \mathscr{F}_M$, όμοια $R/\mathscr{F}_M([f_1],[f_2]) :\leftrightarrow [\![\, R(f_1,f_2)\,]\!] \in \mathscr{F}_M$. Ετσι οι ατομικοί τύποι ισχύουν εξ ορισμού.

Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις, που είναι και ικανές:

(i) Εστω $\varphi \equiv \psi_1 \wedge \psi_2$ τότε,

$$\begin{aligned}[\![\, \varphi(f_1,\dots,f_n)\,]\!] \in \mathscr{F}_M &\leftrightarrow [\![\, (\psi_1 \wedge \psi_2)(f_1,\dots f_n)\,]\!] \in \mathscr{F}_M \\ &\leftrightarrow [\![\, \psi_1(f_1,\dots,f_n)\,]\!] \in \mathscr{F}_M \& [\![\, \psi_2(f_1,\dots,f_n)\,]\!] \in \mathscr{F}_M\end{aligned}$$

και από την υπόθεση της επαγωγής έχουμε,

$$\begin{aligned}&\leftrightarrow \mathfrak{A}/\mathscr{F}_M \models \psi_1([f_1],\dots,[f_n]) \& \mathfrak{A}/\mathscr{F}_M \models \psi_2([f_1],\dots,[f_n]) \\ &\leftrightarrow \mathfrak{A}/\mathscr{F}_M \models (\psi_1 \wedge \psi_2)([f_1],\dots,[f_n]) \\ &\leftrightarrow \mathfrak{A}/\mathscr{F}_M \models \varphi([f_1],\dots,[f_n])\end{aligned}$$

Ετσι στην περίπτωση αυτή το αποτέλεσμα ισχύει. ⊣□

(ii) Εστω $\varphi \equiv \neg\psi$, τότε

$$\begin{aligned}[\![\, (f_1,\dots,f_n)\,]\!] \in \mathscr{F}_M &\leftrightarrow [\![\, \neg\psi(f_1,\dots,f_n)\,]\!] \in \mathscr{F}_M \\ &\leftrightarrow T - [\![\, \psi(f_1,\dots,f_n)\,]\!] \in \mathscr{F}_M\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leftrightarrow \quad [\![\, \psi(f_1,\ldots,f_n) \,]\!] \notin \mathscr{F}_M \\
&\leftrightarrow \quad \mathfrak{A}/\mathscr{F}_M \models \psi([f_1],\ldots,f_n]) \qquad (*) \\
&\leftrightarrow \quad \mathfrak{A}/\mathscr{F}_M \models \neg\psi([f_1],\ldots,[f_n]) \\
&\leftrightarrow \quad \mathfrak{A}/\mathscr{F}_M \models \varphi([f_1],\ldots,[f_n]).
\end{aligned}$$

Η σχέση $(*)$ ισχύει από την υπόθεση της επαγωγής. Αρα το αποτέλεσμα ισχύει και στην περίπτωση αυτή. $\dashv\Box$

(iii) Τέλος έστω $\varphi \equiv (\exists x_k)[\psi]$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $k \leq n$, τότε έχουμε για κάποιο $f \in A$:

$$\begin{aligned}
[\![\, \varphi(f_1,\ldots,f_n) \,]\!] \in \mathscr{F}_M \quad &\leftrightarrow \quad [\![\, (\exists x_k[\psi(f_1,\ldots,f_n)] \,]\!] \in \mathscr{F}_M \\
&\leftrightarrow \quad [\![\, \psi(f_1,\ldots,f_{k-1},f,f_{k+1},\ldots,f_n) \,]\!] \in \mathscr{F}_M \\
&\leftrightarrow \quad \mathfrak{A}/\mathscr{F}_M \models \psi([f_1],[f_{k-1},[f],[f_{k+1},\ldots,[f_n]) \\
&\leftrightarrow \quad \mathfrak{A}/\mathscr{F}_M \models (\exists x_k\psi)([f_1],\ldots,[f_n]) \\
&\leftrightarrow \quad \mathfrak{A}/\mathscr{F}_M \models \varphi([f_1],\ldots,[f_n])
\end{aligned}$$

Ετσι η απόδειξη συμπληρώθηκε. $\dashv\blacksquare$

Το παραπάνω θεώρημα μαζί με το Θεώρημα 2.2.1 δίνουν το ακόλουθο ονομαστό θεώρημα για τα υπεργινόμενα,

2.2.13 Θεώρημα. *(Θεώρημα του Łoś) Για κάθε $\mathscr{L}$- τύπο φ με $FV(\varphi) \subseteq \{x_1,\ldots,x_n\}$ και για κάθε $\mathbf{f_1},\ldots,\mathbf{f_n} \in \mathbf{A}$ έχουμε:*

$$\mathfrak{A}/\mathscr{F}_{\mathbf{M}} \models \varphi([\mathbf{f_1}],\ldots,[\mathbf{f_n}]) \leftrightarrow \{\mathbf{t} \in \mathbf{T} : \mathfrak{A}_{\mathbf{t}} \models \varphi(\mathbf{f_1}(\mathbf{t}),\ldots,\mathbf{f_n}(\mathbf{t}))\} \in \mathscr{F}_{\mathbf{M}}.$$

Ειδικά αν σ είναι μια $\mathscr{L}$- πρόταση τότε,

$$\mathfrak{A}/\mathscr{F}_{\mathbf{M}} \models \sigma \leftrightarrow \{\mathbf{t} \in \mathbf{T} : \mathfrak{A}_{\mathbf{t}} \models \sigma\} \in \mathscr{F}_{\mathbf{M}}.$$

Η διαλεκτική ερμηνεία του Θεωρήματος του Łoś είναι η ακόλουθη: Ενας $\mathscr{L}$ - τύπος ϕ, είναι αληθής στην $\mathscr{L}$ - δομή $\mathfrak{A}/\mathscr{F}_M$ $\langle A/\mathscr{F}_M, R/\mathscr{F}_M\rangle$, ανν είναι αληθής για ένα μεγάλο σύνολο στιγμών $t \in T$, σύνολο δηλαδή, που ανήκει στο υπερφίλτρο $\mathscr{F}_M$. Αν δε ορίσουμε την πεπερασμένα προσθετική $0-1$ πιθανότητα,

$$\mu_{\mathscr{F}_M}(A) := \begin{cases} 1 & \text{αν } A \in \mathscr{F}_M \\ 0 & \text{αν } A \notin \mathscr{F}_M \end{cases}$$

τότε το θεώρημα λέει ότι ο τύπος είναι αληθής στην δομή $\mathfrak{A}/\mathscr{F}_M$ ανν είναι αληθής $\mu_{\mathscr{F}_M}$ - σχεδόν βεβαίως.

Αν $(A_t)_{t\in T}$ είναι μια οικογένεια συνόλων και $\mathscr{U}$ ένα υπερφίλτρο επί του τότε το **συνολοθεωρητικό υπεργινόμενο**, συμβολικά $(_t)_{\mathscr{U}}$ ορίζεται με όμοιο τρόπο, δηλαδή,

$$(_t)_{\mathscr{U}} := \prod_{t\in T} A_t / \approx_{\mathscr{U}}$$

Ασκηση. Αν $(_t)_{t\in T}$ και $(_t)_{t\in T}$ είναι δύο οικογένειες συνόλων τότε έχουμε:

(i) $(_t)_{\mathscr{U}} \cup (_t)_{\mathscr{U}} = (A_t \cup {}_t)_{\mathscr{U}}$.

(ii) $(_t)_{\mathscr{U}} \cap (_t)_{\mathscr{U}} = (A_t \cap {}_t)_{\mathscr{U}}$.

(iii) $(_t)_{\mathscr{U}} - (_t)_{\mathscr{U}} = (A_t - {}_t)_{\mathscr{U}}$.

Στην περίπτωση τώρα που έχουμε μια σταθερή $\mathscr{L}$ - δομή $\mathfrak{B} = \langle B, R\rangle$ έχουμε δηλαδή μόνον μεταβαλλόμενα στοιχεία εντός της $\mathfrak{B}$ και όχι μεταβαλλόμενες δομές, και $\mathscr{F}_M$ είναι υπερφίλτρο, τότε βρισκόμαστε στην **περίπτωση των υπερδυνάμεων** και μπορούμε να εμφυτεύσουμε την $\mathfrak{B}$ στην $\mathfrak{B}^T/\mathscr{F}_M$ ως εξής:

η δε συνάρτηση,

$$\begin{aligned} \hat{b} : T &\leftrightarrow B^T/\mathscr{F}_M \\ t &\mapsto [\hat{b}](t) := [\hat{b}] \end{aligned}$$

είναι σταθερή συνάρτηση επί του T. Η συνάρτηση $i(\cdot)$ είναι μία εμφύτευση της δομής $\mathfrak{B}$ στην δομή $\mathfrak{B}^T/\mathscr{F}_M$, η οποία λόγω του ότι η δομή $\mathfrak{B}^T/\mathscr{F}_M$ έχει για φορέα ένα σύνολο πηλίκο, λέγεται **κανονική εμφύτευση**. Το ακόλουθο θεώρημα είναι **το βασικό θεώρημα για τις υπερδυνάμεις:**

2.2.14 Θεώρημα. *Η κανονική εμφύτευση* $\mathbf{i} : \mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{B}^{\mathbf{T}}/\mathscr{F}_{\mathbf{M}}$ *είναι μια στοιχειώδης εμφύτευση. Αρα οι* $\mathscr{L}$*- δομές* $\mathfrak{B}$ *και* $\mathfrak{B}^{\mathbf{T}}/\mathscr{F}_{\mathbf{M}}$ *είναι στοιχειωδώς ισοδύναμες.*

Proof: Εστω φ ένας $\mathscr{L}$-τύπος με $\mathrm{FV}(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, c_n\}$ και έστω $b_1, \dots, b_n \in B$. Από το Θεώρημα του Loś έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}^T/\mathscr{F}_M \models \varphi\,(i(b_1), \dots, i(b_n)) \quad &\leftrightarrow \quad \mathfrak{B}^T/\mathscr{F}_M \models \varphi([\hat{b}_1], \dots, [\hat{b}_n]) \\ &\leftrightarrow \quad \{t \in T : \mathfrak{B} \models \varphi\left(\hat{b}_1(t), \dots, \hat{b}_n(t)\right)\} \in \mathscr{F}_M \\ &\leftrightarrow \quad \mathfrak{B} \models \varphi(b_1, \dots, b_n) \end{aligned}$$

Ετσι η απόδειξη συμπληρώθηκε. $\dashv$

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΣΥΜΠΑΓΙΑΣ[1].

Με τη χρήση των υπεργινομένων και του Θεωρήματος του Loś μπορούμε να αποδείξουμε και το ονομαστό θεώρημα της μαθηματικής λογικής, γνωστού σαν «Θεώρημα της Συμπαγίας» (compactness theorem).

Το θεώρημα του Loś μας λέει ότι για κάθε οικογένεια $\mathfrak{A}_t : t \in T$ $\mathscr{L}$– δομών, και για κάθε ελεύθερο υπερφίλτρο $\mathscr{F}_M$, αν κάθε $\mathfrak{A}_t$ ικανοποιεί ένα σύνολο Σ, από προτάσεις πρώτης τάξης, τότε και το υπεργινόμενο $\prod_{t\in T}\mathfrak{A}_t/\mathscr{F}_M$ ικανοποιεί επίσης τις ίδιες προτάσεις Σ. Το Θεώρημα της συμπαγότητας είναι μια συνέπεια του Θεωρήματος του Loś, και μας λέει ότι για κάποιο κατάλληλο υπερφίλτρο $\mathscr{D}$, το υπεργινόμενο $\prod_{t\in T}\mathfrak{A}_t/\mathscr{D} \equiv \mathfrak{A}$ μπορεί να ικανοποιεί ένα σύνολο προτάσεων πρώτης τάξης Σ, παρ' όλο που είναι δυνατόν καμιά δομή $\mathfrak{A}_t$, $t \in T$, να μην ικανοποιεί τις προτάσεις αυτές. Ακριβέστερα έχουμε:

2.2.15 Θεώρημα. (Θεώρημα της συμπαγίας) *Εστω* $\mathbf{\Sigma}$ *ένα σύνολο* $\mathscr{L}$ *- προτάσεων. Αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του* Σ *έχει ένα μοντέλο, τότε και το* Σ *έχει ένα μοντέλο.*

Proof: Εστω T η οικογένεια όλων των πεπερασμένων υποσυνόλων του Σ. Είναι βολικό να σκεπτόμαστε το T σαν πεδίο μεταβολή του χρόνου. Κάθε $t \in T$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο προτάσεων. Για κάθε $t \in T$, έστω $\mathfrak{A}_t$ μία $\mathscr{L}$ - δομή που ικανοποιεί τις προτάσεις στο t. Σύμφωνα με το Θεώρημα του Loś, αν $\mathfrak{A} := \prod_{t\in T}\mathfrak{A}_t/\mathscr{D}$ τότε για κάθε $\varphi \in \Sigma$, θα έχουμε:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad [\![\varphi]\!] := \{t \in T \,|\, \mathfrak{A}_t \models \varphi\} \in \mathscr{D}$$

για κάποιο ελεύθερο υπερφίλτρο $\mathscr{D}$. Αλλά αν $\varphi \in t$ τότε $\mathfrak{A}_t \models \varphi$, έτσι $\{t \in T \,|\, \varphi \in t\} \subseteq \{t \in T \,|\, \mathfrak{A}_t \models \varphi\}$. Για να έχουμε λοιπόν,

$$[\![\varphi]\!] \in \mathscr{D} \qquad \bar{\varphi} := \{t \in T \,|\, \varphi \in t\} \in \mathscr{D}$$

Πρέπει λοιπόν να κατασκευάσουμε ένα υπερφίλτρο $\mathscr{D}$, που να περιέχει όλα τα σύνολα $\bar{\varphi}$. Παρατηρούμε όμως ότι το σύνολο

$$S := \{\bar{\varphi} \mid \varphi \in \Sigma\}$$

[1] Μερικοί Έλληνες συγγραφείς χρησιμοποιούν τον απαράδεκτο όρο «συμπάγεια» για αποδώσουν τον Αγγλικό όρο "compactness". Τα έγγυρα λεξικά του Δημητράκου αλλά και του Lidell-Scott, χρησιμοποιούν τον όρο «συμπαγία» για κάτι που έχει την ιδιότητα του συμπαγούς. Αν λοιπόν έτσι έχουν τα πράγματα τότε το «συμπάγεια» είναι σαν να χρησιμοποιούμε το «ευτύχεια» αντί «ευτυχία» ή το «συζύγεια» αντί του «συζυγία»

έχει ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, δηλαδή κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του Σ έχει μη - κενή τομή. Παράγματι, αν $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Sigma$ τότε υπάρχει $t \in T$ με $t = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. Αλλά τότε έχουμε ότι $t \in \bar{\varphi}_i$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$ και επομένως $\bar{\varphi} \cap \cdots \cap \bar{\varphi}_n \neq \emptyset$. Είναι γνωστό όμως, ότι τότε υπάρχει ένα υπερφίλτρο $\mathscr{D}$ που περιέχει το Σ και η απόδειξη συμπληρώθηκε. ⊣

Από το Θεώρημα Συμπαγότητας έχουμε επίσης τα ακόλουθα πορίσματα που οι αποδείξεις τους αφήνονται ως ασκήσεις.

Ασκηση (1) Αν Σ είναι ένα σύνολο από $\mathscr{L}$ - προτάσεις και φ είναι μια $\mathscr{L}$ - πρόταση με $\Sigma \models \varphi$, τότε για κάποιο πεπερασμένο υποσύνολο Σ_0 του Σ έχουμε $_0 \models \varphi$.

Ασκηση (2) Εστω $\mathfrak{A}$ μια $\mathscr{L}$-δομή με φορέα το σύνολο A. Εστω επίσης $T = \{t \in \mathscr{P}(A) : t \text{ είναι πεπερασμένο }\}$. Για κάθε t έστω $\mathfrak{A}_t$ η υποδομή που παράγεται από το $t \in T$. Τότε υπάρχει υπερφίλτρο $\mathscr{D}$ επί του T έτσι ώστε η δομή $\mathfrak{A}$ να μπορεί να εμφυτευτεί στο υπεργινόμενο $\prod_{t \in T} \mathfrak{A}_t / \mathscr{D}$.

Υπόδ.: Σημειώστε ότι για κάθε $t \in T$, an $F_{to} := \{t \in T | to \subseteq t\}$ και $F := \{A \subseteq T | F_{to} \subseteq A$ για κάποιο $to \in T\}$, τότε το F είναι ένα γνήσιο φίλτρο με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής.

Κεφάλαιο 3

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΕ ΥΠΕΡΔΟΜΕΣ

3.1 Εισαγωγή.

Στο τμήμα αυτό θα θεωρήσουμε την υπερδομή (εποικοδόμημα) που μπορούμε να κατασκευάσουμε, έχοντας σαν βάση μια Σ -δομή $\mathfrak{A}$. Αυτό είναι αναγκαίο αν θέλουμε να μελετήσουμε οντότητες που αναφέρονται και ορίζονται ως προς τη δομή $\mathfrak{A}$. Για παράδειγμα, υποσύνολα του φορέα A της δομής $\mathfrak{A}$, συναρτήσεις επί του A, χώροι πιθανότητας επί του A κ.λ.π. Γενικώς αν $\mathfrak{B}$ είναι μια άλλη δομή που ορίζεται με όρους της $\mathfrak{A}$, τότε η $\mathfrak{B}$ μπορεί να οριστεί συνολοθεωρητικά από την $\mathfrak{A}$. Ολες αυτές οι δομές που μπορούν να οριστούν συνολοθεωρητικά από την $\mathfrak{A}$ σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων βρίσκονται όλες στην υπερδομή με βάση την $\mathfrak{A}$.

Εστω $\mathscr{L}$ μια γλώσσα με οπλισμό Σ και $\mathfrak{A}$ μια Σ-δομή ή $\mathscr{L}$- δομή με φορέα A. Τα στοιχεία του A τα θεωρούμε σαν πρωτοστοιχεία (Urelements ή individuals), χωρίς δηλαδή καμία συνολοθεωρητική δομή, δηλαδή έχουμε ότι, για κάθε $x, x \notin r$ για όλα τα $r \in A$. Η θεώρηση των στοιχείων του A ως πρωτοστοιχείων γίνεται για να διευκολυνθεί η μαθηματική μελέτη. Αν θεωρούσαμε τα πάντα ως σύνολα,– το οποίο είναι δυνατόν, αρχίζοντας από το κενό σύνολο, όπως γίνεται στη συνολοθεωρία ZF (Zermelo - Fraenkel – τότε θα ήταν εξαιρετικά δύσκολη έως αδύνατη μια πραγματική μαθηματική μελέτη. Το ίδιο εξ άλλου συμβαίνει και στην καθημερινή μας ζωή: Οταν θέλουμε να μελετήσουμε κάποια μακροσκοπικά αντικείμενα, δεν αρχίζουμε συχνά την μελέτη από το σωματιδιακό - μικροσκοπικό επίπεδο.

Τα πρωτοστοιχεία εξαρτώνται κύρια από το αντικείμενο μελέτης, που θεωρούμε ότι μας δίνεται πραγματωμένο εκ των προτέρων. Το A μπορεί για παράδειγμα να είναι οι ρητοί, οι πραγματικοί αριθμοί, ένα τοπολογικός χώρος, κ.λ.π.

Ενα σύστημα που κάνει χρήση ατόμων - στοιχείων και είναι ασθενέστερο από το ZF, είναι το σύστημα KPU (Kripke-Platek με άτομα) (βλ.το [**?**].

3.2 Υπερδομές.

Εστω τώρα $\mathfrak{A}$ μια $\mathscr{L}$- δομή με φορέα το σύνολο A. Συμβολίζουμε τον φορέα με A αντί για να δώσουμε έμφαση στα Urelements. Ορίζουμε την ακόλουθη ιεραρχία:

$$V_0 \equiv V_0(\mathfrak{A}) := A, \ldots, V_{n+1} \equiv V_{n+1}(\mathfrak{A}) := V_n \cup \mathscr{P}(V_n), \ldots$$

Ορίζουμε επίσης τα σύνολα της ιεραρχίας ως ακολούθως:

$$\mathscr{S}_1 := V_1 - A,\ \mathscr{S}_2 := V_2 - A, \cdots, \mathscr{S}_{n+1} := V_{n+1} - A, \cdots$$

Τέλος θεωρούμε την υπερδομή επί της $\mathfrak{A}$ ως εξής:

$$V \equiv V(\mathfrak{A}) := \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$$

Είναι φανερό ότι για τις ανάγκες των κλασσικών μαθηματικών (Ανάλυση, Αλγεβρα κ.λ.π.) επί της $\mathfrak{A}$, είναι αρκετό να θεωρήσουμε την υπερδομή μέχρι τον πρώτο οριακό διατακτικό αριθμό. Επίσης τα σύνολα της υπερδομή είναι τα

$$\mathscr{S} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{S}_n$$

Θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια με συνέπεια τις ακόλουθες μεταβλητές:

$$\begin{cases} p, q, r, p_1, q_1, r_1, \cdots \quad \text{για τα πρωτοστοιχεία του } A \\ X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1, \ldots, A, B, C, \ldots \text{ για σύνολα στο } \mathscr{S} \equiv V - A \\ u, v, u_1, v_1 \cdots, \quad \text{για γενικές μεταβλητές} \end{cases} \qquad (*)$$

Αν $A = \mathbb{R}$, τότε έχουμε μια υπερδομή με βάση το $\mathbb{R}$. Συνήθως όταν μας ενδιαφέρει, για παράδειγμα ένας τοπολογικός χώρος Ω, τότε επιλέγουμε σαν πρωτοστοιχεία το $A = \Omega \cup \mathbb{R}$, έτσι όταν θα χρειαστούμε πραγματικούς αριθμούς να είμαστε σίγουροι ότι υπάρχουν στην υπερδομή. Σημειώστε ότι $\emptyset \subseteq A$ και επομένως $\emptyset \in V$.

Η γλώσσα $\mathscr{L}(V(\mathfrak{A}))$ της υπερδομής $V(\mathfrak{A})$ είναι μια επέκταση της γλώσσας $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$.

Επεκτείνουμε την $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$ επισυνάπτοντας ένα σύμβολο του ανήκειν «$\in$» και πιθανά άλλα σύμβολα σχέσεων, συναρτήσεων και σταθερών συμβόλων. Για τις μεταβλητές της $\mathscr{L}(V(\mathfrak{A}))$ ακολουθούμε την σύμβαση $(*)$. Στο σύνολο των ατομικών μας τύπων επισυνάπτουμε τώρα και τύπους της μορφής:

$$\begin{array}{l} (p \in X), \quad (X \in Y), \qquad X, Y \in \mathscr{S} \ p \in A \\ (\forall x \in Y), \text{ για όλα τα σύνολα} X \in \mathscr{S} \text{ που είναι στοιχεία του } Y \\ (\exists x \in Y), \text{ για κάποιο σύνολο } X \in \mathscr{S}, \text{που είναι στοιχείο του } Y \end{array}$$

Εχοντας καθορίσει τους ατομικούς τύπους της $\mathscr{L}(V)$, οι υπόλοιποι τύποι καθορίζονται με τον γνωστό τρόπο.

Μια $\mathscr{L}(V(\mathfrak{A}))$- υπερδομή στην ουσία μπορεί να θεωρηθεί σαν μια δομή $(V(\mathfrak{A})\,;\mathscr{S}, E, \cdots)$
όπου:

(i) $\mathfrak{A} = (A; \cdots)$ είναι μια $\mathscr{L}$-δομή, τα δε στοιχεία του A λέγονται πρωτοστοιχεία (Urelements).

(ii) $\mathscr{S}$ είναι ένα μη - κενό σύνολο με $\mathscr{S} \cap A = \emptyset$, τα στοιχεία του οποίου λέγονται σύνολα.

(iii) $E \subseteq V \times \mathscr{S}$ είναι μια διμελής σχέση που ερμηνεύει το σύμβολο του ανήκειν «$\in$».

(iv) Σχέσεις, συναρτήσεις και επί του $A \cap \mathscr{S}$, που ερμηνεύουν αντίστοιχα σύμβολα της $\mathscr{L}(\in, \cdots)$.

Παρ' όλο που το σύμβολο της ισότητας έχει περιληφθεί στα λογικά σύμβολα, είναι βολικό, στις κατασκευές που θα ακολουθήσουν, να την περιλαμβάνουμε στα μη - λογικά σύμβολα. Απλοποιώντας κάπως το συμβολισμό, θα συμβολίζουμε μια υπερδομή ως εξής:

$$\langle V(\mathfrak{A}), =, \in \rangle$$

χωρίς να αναφερόμαστε στις ερμηνείες του οπλισμού της $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$.

3.2.1 Ορισμός. Ενα σύνολο $A \in \mathscr{S}$ θα λέγεται **μεταβατικό** (transitive), συμβολικά $\mathrm{Tran}(A)$, ανν $(\forall X \in A)(\forall u \in X\ [u \in A]$. Ετσι κάθε στοιχείο του A είναι ή άτομο - στοιχείο ή υποσύνολο του A.

Για παράδειγμα αν,

$$4 := \{0,1,2,3\} = \Big\{\emptyset; \{\emptyset\}; \{\emptyset, \{\emptyset\}\}; \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\Big\}$$
$$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in 4 \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq 4$$

Γενικά **όλοι οι διατακτικοί αριθμοί είναι μεταβατικά σύνολα και ολικά διαταγμένοι από τη σχέση του ανήκειν $\in$,** έτσι στην ουσία είναι μεταβατικά σύνολα, τα στοιχεία των οποίων είναι επίσης μεταβατικά.

Ενα παράδειγμα **μη - μεταβατικού συνόλου** είναι το ακόλουθο: Εστω $A = \{\{2\}, 3\}, X = \{2\}, u = 2$ τότε $2 \in X = \{2\}$ και $\{2\} \in A = \{\{2\}, 3\}$ αλλά $2 \notin \{\{2\}, 3\} = A$.

Τα πρωτοστοιχεία δεν θεωρούνται μεταβατικά, όμως κάθε σύνολο ατόμων - στοιχείων θεωρείται μεταβατικό σύνολο, όπως μεταβατικό θεωρείται και το κενό σύνολο.

Εστω $u \in V(\mathbb{R})$, τότε **η τάξη ή ο βαθμός του u (rank)** είναι ο ελάχιστος φυσικός $n \in \mathbb{N}$ με $u \in V_n(\mathbb{R})$. Συμβολικά θα γράφουμε $r(u) = n$. Ετσι οι οντότητες που ανήκουν στο $V_n \setminus V_{n-1}, \quad n \geq 1$, είναι **οντότητες βαθμού (rank) n.**

Εστω $(V(\mathfrak{A}), =, \in)$ μια υπερδομή. Τότε έχουμε τις ακόλουθες προτάσεις:

3.2.2 Πρόταση. **(i)** *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το V_n είναι ένα μεταβατικό σύνολο. Σημειώστε ότι από τον ορισμό της υπερδομής έχουμε:*

$$V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \cdots \subseteq V_n \subseteq V_{n+1} \subseteq \cdots$$
$$V_0 \in V_1 \in V_2 \in \cdots \in v_n \in V_{n+1} \in \cdots$$

(ii) *Αν $X \in \mathscr{S}_n,\ n = 1, 2, \ldots$ τότε $\{X\} \in V_{n+1}$ και $\mathscr{P}(X) \in V_{n+2}$.*

(iii) *Αν $u, s \in V_n,\ n = 0, 1, \cdots$ τότε $(u, s) \in V_{n+2}$ και*

αν $u_1, \cdots, u_k \in V_n,\ k \geq 2$ τότε $(u_1, \ldots, u_k) \in V_{n+2k-2},\ n = 0, 1, \ldots$.

(iv) *Αν $X, Y, \in S_n,\ n = 1, 2, \ldots$ τότε $X \times Y \in V_{n+3}$.*

Proof: **(i)** Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στον n. Το V_0 είναι μεταβατικό εξ ορισμού. Εστω ότι το V_n είναι μεταβατικό τότε, θα δείξουμε ότι και το V_{n+1} είναι επίσης μεταβατικό. Εστω $X \in \mathscr{S}_{n+1}$. Τότε ή $X \in \mathscr{P}(V_n)$. Στην πρώτη περίπτωση $X \subseteq V_n$, από την υπόθεση της επαγωγής, στην δε δεύτερη περίπτωση $X \subseteq V_n$, από τον ορισμό του δυναμοσυνόλου. Αλλά $V_n \subseteq V_{n+1}$, άρα $X \subseteq V_{n+1}$ και επομένως το V_{n+1} είναι ένα μεταβατικό σύνολο. ⊣□

(ii) Αφού $X \in \mathscr{S}_n$ τότε $\{X\} \in \mathscr{P}(V_n) \cup V_n = V_{n+1}$. Στη συνέχεια αφού το V_n είναι μεταβατικό, από την $X \in V_n$ έχουμε ότι $X \subseteq V_n$ και επομένως $\mathscr{P}(X) \subseteq \mathscr{P}(V_n) \subseteq V_{n+1} \in V_{n+2}$, άρα $\mathscr{P}(X) \in V_{n+2}$. ⊣□

(iii) Εχουμε ότι $(u, s) := \{\{u\}, \{u, s\}\}$. Αλλά $\{u\} \in V_{n+1}, \{u, s\} \in V_{n+1}$

Ετσι $\{\{u\}, \{u, s\}\} \subseteq V_{n+1}$ και επομένως $(u, s) \in V_{n+2}$. Ο δεύτερος ισχυρισμός είναι φανερός (επαγωγή στο $k \geq 2$). ⊣⊡

(iv) $X + Y \subseteq V_{n+2}$, αφού $(x, y) \in X \times Y \Rightarrow x, y \in V_n$ και έτσι $(x, y) \in V_{n+2}$. Αλλά $X \times Y \subseteq V_{n+2}$ συνεπάγεται ότι $X \times Y \in V_{n+3}$. ⊣⊡

3.2.3 Πρόταση. **(i)** *Εστω* $X, Y \in \mathscr{S}_n, n = 1, 2, \cdots$ *και* $f : X \longrightarrow Y$ *μια συνάρτηση, τότε* $f \in V_{n+3}$.

(ii) *Για κάθε* $u \in X$, $f(u) \in V_n$.

(iii) *Αν* $A \subseteq X$ *τότε* $f(A) \in V_{n+1}$.

Proof: **(i)** Από την Πρόταση 3.2.2 (iv), έχουμε ότι $X \times Y \subseteq V_{n+2}$. Επειδή έχουμε $f \subseteq X \times Y$ έχουμε $f \subseteq V_{n+2}$ και έτσι $f \in V_{n+3}$.

(ii) Εχουμε ότι για κάθε $\alpha, f(\alpha) \in Y \in V_n$. Ετσι το V_n είναι μεταβατικό έχουμε $f(\alpha) \in V_n$.

(iii) Εχουμε $f(A) \subseteq Y \in V_n$. Αφού όμως το V_n είναι μεταβατικό έοχυμε $Y \subseteq V_n$. Ετσι $f(A) \subseteq V_n$ και $f(A) \in V_{n+1}$. ⊣⊡

Ασκήσεις. **(1)** Εστω $C[a, b] := \{f | f : [a, b] \to \mathbb{R} \;\; \& \;\; f$ είναι συνεχής$\}$

Να δειχτεί ότι $C[a, b] \in V_4(\mathbb{R})$.

(2) Εστω $\|f\| := \sup\{|f(t)| : t \in [a, b]\}$. Να δειχτεί ότι $\|f\| \in V_6(\mathbb{R})$, για κάθε $f \in C[a, b]$.

(3) Εστω $(, \mathscr{A}, P)$ ένας χώρος πιθανότητας. Να ευρεθεί ο βαθμός του, δηλ. το ελάχιστο επίπεδο $V_n()$ στο οποίο ανήκει.

Εστω τώρα μια ακολουθία $\{u_n\} n \in \mathbb{N}$ με $u_n \in V_{n+1} - V_n$. Είναι φανερό ότι τότε $\{u_n\} \notin V(\mathbb{R})$. Τέτοιου είδους ακολουθίες δεν θα μας ενδιαφέρουν στη συνέχεια και θα περιοριστούμε μόνον στις λεγόμενες $\mathbf{VV}(\mathfrak{A})$ - **φραγμένες**. Ακριβέστερα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

3.2.4 Ορισμός. Εστω $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία οντοτήτων της $V(\mathfrak{A})$, θα λέμε ότι η ακολουθία $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι V- φραγμένη ανν υπάρχει $k \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε,

$$u_n \in V_k \qquad n \in \mathbb{N}$$

Για να ορίσουμε την τάξη μιας V- φραγμένης ακολουθίας $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, παρατηρούμε ότι αν,

$$\mathbb{N}_m := \{n \in \mathbb{N} | r(u_n) = m\}, \quad m = 0, 1, \ldots, k,$$

για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, τότε επειδή,,

$$\mathbb{N} = \mathbb{N}_0 \cup \mathbb{N}_1 \cup \cdots \cup \mathbb{N}_k \quad \& \quad \mathbb{N} \in \mathscr{F}_M$$

όπου $\mathscr{F}_M$ είναι ένα ελεύθερο υπερφίλτρο, τότε από την Πρόταση 2.2.9 έχουμε,

$$\mathbb{N}_i \in \mathscr{F}_M \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Τον φυσικό αυτό αριθμό θα τον ονομάζουμε **τάξη** της $\{u_n\}$, συμβολικά $r(\{u_n\})$. Η τάξη μιας ακολουθίας είναι δηλαδή ο φυσικός αριθμός που εμφανίζεται σαν τάξη όρων της ακολουθίας, οι δείκτες των οποίων αποτελούν ένα «μεγάλο σύνολο». Ετσι αλλάζοντας τους όρους μιας ακολουθίας σε ένα «μικρό σύνολο» δεικτών, πράγμα που δεν αλλάζει τη συμπεριφορά της ακολουθίας, μπορούμε να υποθέτουμε ότι όλοι οι όροι της ακολουθίας έχουν τάξη μικρότερη ή ίση με την τάξη $r(\{u_n\})$.

Τέλος, συνηθίζεται να δίνεται μια γραφική παράσταση για μια υπερδομή επί του $\mathbb{R}$.

3.3 Μη-Συμβατικά Πλαίσια.

Στην Απειροστική μη-συμβατική ανάλυση η έννοια του μη-συμβατικού πλαισίου δίνεται σύμφωνα με τον επόμενο ορισμό.

3.3.1 Ορισμός. Μία τριάδα $\langle V(X), V(Y), * \rangle$ είναι ένα μη-συμβατικό πλαίσιο εάν :

1. $V(X)$ και $V(Y)$ είναι κλασικές υπερδομές με αντίστοιχα σύνολα βάσης τα X και Y, τα οποία είναι απειροσύνολα.

2. Η συνάρτηση $* : V(X) \to V(Y)$ είναι μία φραγμένη στοιχειώδης εμφύτευση (Αρχή Μεταφοράς) .

3. $Y = {}^*X$.

4. Για κάθε άπειρο $\subseteq X$ το σύνολο $A = \{{}^*a : \ a \in A\}$ είναι γνήσιο υποσύνολο του ${}^*A = *(A)$.

Η υπερδομή $V(X)$ λέγεται *συμβατικό σύμπαν*, ενώ η υπερδομή $V(Y)$ λέγεται *μη-συμβατικό σύμπαν*.

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τον τρόπο που κατασκευάζονται οι εμφυτεύσεις $i(\cdot)$ και $m(\cdot)$, οπότε η εμφύτευση $*$ παίρνεται σαν σύνθεση των i και m.

3.3.1 V-Φραγμένες Υπερδυνάμεις.

Θα περιοριστούμε στη συνέχεια στην περίπτωση $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{R}; +, \cdot, \leq, 0, 1 \rangle$. Οπως έχουμε ήδη σημειώσει, μπορούμε να θεωρούμε την υπερδομή $V(\mathbb{R})$ σαν μια συνηθισμένη δομή $(V(\mathbb{R}), =, \in)$, χωρίς να μνημονεύουμε τον οπλισμό της δομής $\mathfrak{A} = (\mathbb{R}, +, \cdot, \leq, 0, 1)$. Ακολουθώντας την ίδια ακριβώς πορεία, που ακολουθήσαμε στην κατασκευή της $(\mathfrak{A}^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M,\ R/\mathscr{F}_M)$ από την $\mathfrak{A} = (A, R)$ και της $({}^*\mathbb{R}, +, \cdot, \leq, 0, 1)$ από την $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq, 0, 1)$ μπορούμε να κατασκευάσουμε την δομή $\left\langle V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M, =_{\mathscr{F}_M}, \in_{\mathscr{F}_M} \right\rangle$. Πιο συγκεκριμένα, κατά την άρνηση της σταθερότητας του $V(\mathbb{R})$ θα χρησιμοποιήσουμε, αφ' ενός διακριτό χρόνο $\mathbb{N}$, και αφ' ετέρου V- φραγμένες ακολουθίες, σαν μεταβαλλόμενα στοιχεία. Για το λόγο αυτό το τελικό προϊόν ονομάζεται **φραγμένη υπερδύναμη του $\mathbf{V}(\mathbb{R})$.**

Τα αντίστοιχα βήματα είναι τα εξής:

(i)**Άρνηση της σταθερότητας των στοιχείων του** $V(\mathbb{R})$. Για το βήμα αυτό θα θεωρήσουμε V-φραγμένες ακολουθίες στοιχείων του $V(\mathbb{R})$, δηλαδή,

$$V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}} := \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_n \text{ είναι μια } V\text{- φραγμένη ακολουθία στοιχείων του } V(\mathbb{R})\}$$

(ii) Αρνηση της άρνησης της σταθερότητας των στοιχείων του $V(\mathbb{R})$.

Εστω $\mathscr{F}_M$ ένα ελεύθερο υπερφίλτρο. Τα επιχειρήματα που μας οδήγησαν στο ελεύθερο υπερφίλτρο, κατά την κατασκευή του ${}^*\mathbb{R}$, εξακολουθούν να ισχύουν. Ακολουθώντας τη διαδικασία του Τμήματος 2.2, για τη δομή $\langle V(\mathbb{R}), =, \in \rangle$ παίρνουμε τελικά την φραγμένη υπερδύναμη:

$$\left\langle V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M, =_{\mathscr{F}_M}, \in_{\mathscr{F}_M} \right\rangle$$

όπου

$$V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M := \{[u_n] | \{u_n\} \in V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}\}$$

$$[u_n] := \{\{u_n\} \in V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}} | \{n \in \mathbb{N} | u_n = u_n\} \in \mathscr{F}_M\}$$

$$[u_n] =_{\mathscr{F}_M} [u_n] \quad \{n \in \mathbb{N} | u_n = u_n\} \in \mathscr{F}_M$$

$$[u_n] \in_{\mathscr{F}_M} [u_n] \quad \{n \in \mathbb{N} | u_n \in u_n\} \in \mathscr{F}_M$$

Εστω τώρα,

$$V_k(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M := \{[u_n] \,|\, (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad V_k(\mathbb{R}) - \ .\},\ k = 0, 1 \cdots$$

Ετσι το $V_k(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M$ είναι το προϊόν της εφαρμογής της αρχής της «άρνησης της άρνησης» στο ιεραρχικό επίπεδο $V_k(\mathbb{R})$. Είναι εύκολο να αποδείξει κανείς ότι:

$$^*\mathbb{R} := \mathbf{V_0}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_\mathbf{M} \subseteq \cdots \subseteq \mathbf{V_k}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_\mathbf{M} \subseteq \cdots$$

$$\mathbf{V}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_\mathbf{M} = \bigcup_{\mathbf{k=0}}^{\infty} \mathbf{V_k}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_\mathbf{M}$$

Η εμφύτευση $i(\cdot)$ που εμφανίζεται στα σχήματα των υπερδομών ορίζεται τώρα με τον προφανή τρόπο:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}(\cdot) : \mathbf{V}(\mathbb{R}) &\hookrightarrow \mathbf{V}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_\mathbf{M} \\ \mathbf{u} &\mapsto [\mathbf{u}, \mathbf{u}, \cdots] \end{aligned}$$

Η φραγμένη υπερδύναμη όμως $V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M$ δεν ισούται με ολόκληρη την υπερδομή $V(^*\mathbb{R})$. Χρειαζόμαστε λοιπόν μια εμφύτευση της $V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M$ στην $V(^*\mathbb{R})$. Κατά την εμφύτευση η σχέση $\in_{\mathscr{F}_M}$ αντιστοιχίζεται στη σχέση $\in_{^*\mathbb{R}}$, n δ $\in =_{\mathscr{F}_M}$ στην $=_{^*\mathbb{R}}$. Αυτό επιτυγχάνεται με την Συνάρτηση Σύνθλιψης του Mostowski (Mostowski's collapsing function).

3.3.2 Η Συνάρτηση Σύνθλιψης του Mostowski.

´Εχουμε ήδη κατασκευάσει μεταξύ των δομών,

- $(V(\mathbb{R}), \in_\mathbb{R}, =_\mathbb{R})$ και
- $\left\langle V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M, \in_{\mathscr{F}_M}, =_{\mathscr{F}_M} \right\rangle$

την εμφύτευση,

$$i(\cdot) : V(\mathbb{R}) \hookrightarrow V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M$$

Ετσι ώστε να ισχύει το Θεώρημα του Loś, οπότε για τις προτάσεις της $\mathscr{L}(V(\mathbb{R}))$ έχουμε και μια αρχή μεταφοράς.

Η υπερδομή εξ άλλου που κατασκευάζεται αν πάρουμε για πρωτοστοιχεία τα στοιχεία του $^*\mathbb{R}$, δεν ταυτίζεται με την $V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M$. Αξίζει να σημειώσουμε ότι η πράξη του να πάρουμε τα στοιχεία του $^*\mathbb{R}$ σαν πρωτοστοιχεία έχει σαν συνέπεια την αλλαγή των σχέσεων $\in_\mathbb{R}$ και $=_\mathbb{R}$ της $V(\mathbb{R})$ στις αντίστοιχες σχέσεις $\in_{^*\mathbb{R}}$ και $=_{^*\mathbb{R}}$ της υπερδομής $V(^*\mathbb{R})$. Στόχος μας στη συνέχεια είναι η κατασκευή της εμφύτευσης

$$m : (V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M, \in_{\mathscr{F}_n}, =_{\mathscr{F}_m}) \hookrightarrow (V(^*\mathbb{R}), \in_{^*\mathbb{R}}, =_{^*\mathbb{R}})$$

γνωστής ως «εμφύτευση σύνθλιψης του Mostowski», με την ιδιότητα

$$u \in_{\mathscr{F}_u} A \qquad m(u) \in_{^*\mathbb{R}} m(A)$$

Η εμφύτευση m θα κατασκευαστεί κατά στάδια με επαγωγή στην τάξη των αντικειμένων.

Για $k = 0$ έχουμε, ${}^*\mathbb{R} := V_0(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M$, έτσι στο ιεραρχικό αυτό επίπεδο έχουμε μόνον τα πρωτοστοιχεία του ${}^*\mathbb{R}$, και στην $V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M$ αλλά και στην υπερδομή $V({}^*\mathbb{R})$. Ετσι απαιτούμε η συνάρτηση σύνθλιψης να είναι η ταυτοτική συνάρτηση επί του ${}^*\mathbb{R}$. Δηλαδή

$$m \restriction {}^*\mathbb{R} = id_{{}^*\mathbb{R}}$$

Εστω τώρα ότι για $k \geq 0$ έχουμε ορίσει την συνάρτηση,

$$m([A]) \quad [A] \in V_k(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M$$

Τότε για τα στοιχεία $[A] \in V_{k+1}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M$, $[A] \notin {}^*\mathbb{R}$, η συνάρτηση m ορίζεται ως εξής:

$$m([A]) := \{m([B]) | [B] \in_{\mathscr{F}_M} [A]\}$$

Τελικά η επαγωγή μας εξασφαλίζει μια συνάρτηση,

$$\begin{aligned} m : V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M &\hookrightarrow V({}^*\mathbb{R}) \\ u &\mapsto m(u) \end{aligned}$$

η οποία είναι ένα ισομορφισμός μεταξύ των δομών

$$\left\langle V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M,\ \in_{\mathscr{F}_M},\ =_{\mathscr{F}_M} \right\rangle \qquad \left\langle m[V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M],\ \in_{{}^*\mathbb{R}}, =_{{}^*\mathbb{R}} \right\rangle$$

όπου $m[V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M] \subsetneq V({}^*\mathbb{R})$. Ετσι τελικά έχουμε την επιθυμητή επέκταση της συμβατικής υπερδομής στην μη - συμβατική υπερδομή $V({}^*\mathbb{R})$, βλ. και Σχήμα 3.1.

Ετσι για κάθε $u \in V(\mathbb{R})$, έχουμε ορίσει το $u = m(i(u)$.

Η εμφύτευση υπερδομών,

$$* : V(\mathbb{R}) \quad \hookrightarrow \quad V({}^*\mathbb{R})$$

ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(α) **Αρχή της επέκτασης:** Το $\mathbb{R}$ είναι ένα γνήσιο υποσύνολο του ${}^*\mathbb{R}$ και για κάθε $r \in \mathbb{R}$, ${}^*r = r$.

(β) Για κάθε $v, u, \in V(\mathbb{R})$,

$$v \in u \leftrightarrow {}^*v \in {}^*u \qquad \& \qquad u = v \leftrightarrow {}^*v = {}^*v$$

Σχήμα 3.1: Μη-συμβατική επέκταση.

όπου για ευκολία δεν έχουμε κάνει την διάκριση $\in_{\mathbb{R}}$ και $\in_{^*\mathbb{R}}$. Παρατηρούμε ακόμα ότι η ιδιότητα (β) είναι συνέπεια του γεγονότος ότι μεταξύ των δομών με φορείς $V(\mathbb{R})$ και $V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M$ έχουμε μια αρχή μεταφοράς, που είναι συνέπεια του Θεωρήματος του Loѕ̀ για τα υπεργινόμενα, και ότι μεταξύ των δομών $V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M$ και $V(^*\mathbb{R})$ υπάρχει μια ισομορφική εμφύτευση, που εξασφαλίζεται από την συνάρτηση σύνθλιψης του Mostowski. Ετσι τελικά έχουμε μια αρχή μεταφοράς μεταξύ των δομών με φορείς τις υπερδομές $V(\mathbb{R})$ και $V(^*\mathbb{R})$:

(γ) **Αρχή της μεταφοράς.** Για κάθε πρόταση φ της $\mathscr{L}(V(\mathbb{R}))$ έχουμε:

$$V(\mathbb{R}) \models \varphi \qquad V(^*\mathbb{R}) \models {}^*\varphi.$$

Τελικά η εμφύτευση υπερδομών $* : V(\mathbb{R}) \hookrightarrow V(^*\mathbb{R})$ καθορίζεται αξιωματικά ή από τις (α) και (β) ή από τις (α) και (γ), που είναι ισοδύναμες με τις πρώτες.

Για περισσότερα για τη Συνάρτηση Σύνθλιψης του Mostowski, δείτε π.χ. τα **[?, ?]**

3.3.3 Θεμέλια των Μη-Συμβατικών Μαθηματικών.

Τα μη - συμβατικά μαθηματικά μοντέλα, είναι συνέπεια και στηρίζονται στα Θεωρήματα των Löwenheim - Skolem. Εχουμε ήδη παρατηρήσει, ότι για κάθε δομή $\mathfrak{A}$ μπορούμε με τη χρήση υπεργινομένων και κύρια υπερδυνάμεων να κατασκευάσουμε μια μη - συμβατική δομή ${}^*\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^T/\mathscr{F}_M$ στην οποία η $\mathfrak{A}$ εμφυτεύεται στοιχειωδώς. Το μη - συμβατικό αντικείμενο ${}^*\mathfrak{A}$ είναι ένα αντικείμενο υψηλότερης τάξης ή τύπου από το αντικείμενο $\mathfrak{A}$. Ωστόσο **η θεωρία**

και η μεθοδολογία για αντικείμενα χαμηλότερης τάξης που σχετίζονται με την $\mathfrak{A}$, μεταφέρονται άθικτες για κατάλληλα αντικείμενα μεγαλύτερης που σχετίζονται με την δομή $\mathfrak{A}$.

Οσο μεγαλύτερη είναι η τάξη ενός αντικειμένου στην ιεραρχία των τύπων, τόσο ρευστό και ασαφές είναι, και τόσο η μελέτη του δυσκολεύει και χρειάζεται προχωρημένες μεθοδολογίες, όπως π.χ. της Συναρτησιακής Ανάλυσης. Για παράδειγμα το $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \equiv \mathbb{R}^{\propto}$ είναι ένας χώρος Hilbert, δηλαδή ένα υψηλού τύπου αντικείμενο. Μεταβαίνοντας όμως στο ${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M$ καταφέρνουμε να έχουμε μια θέαση του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ που αξιωματικά δεν διαχωρίζεται από το $\mathbb{R}$, δηλαδή το ${}^*\mathbb{R}$ πληρεί όλα τα αξιώματα πρώτης τάξης των πραγματικών αριθμών, και επομένως δίκαια ονομάζεται ένα σύνολο μη - συμβατικών πραγματικών αριθμών. Ανάλυση επί του $\mathbb{R}^{\propto}$ στην ουσία ανάγεται σε ανάλυση επί του $\mathbb{R}$.**Ο μη-συμβατικός τρόπος μελέτης ενός αντικειμένου υψηλής τάξης ή τύπου είναι να πλησιάσουμε από άποψη τάξης, το εν λόγω αντικείμενο με ένα μη - συμβατικό αντικείμενο με γνωστή συμβατική θεωρία και στη συνέχεια να προσπαθήσουμε να μεταφέρουμε την συμβατική αυτή θεωρία στην μη - συμβατική, απλοποιώντας έτσι τη μελέτη του αρχικού αντικειμένου.**

Το ${}^*\mathbb{R}$ μπορεί να θεωρηθεί και σαν το αποτέλεσμα της εμφύτευσης του $\mathbb{R}$, σε ένα περιβάλλον αντικειμένων μεγαλύτερης τάξης όπως τα στοιχεία του $\mathbb{R}^{\propto}$, όπου λόγω των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των στοιχείων του $\mathbb{R}^{\propto}$ και των στοιχείων του $\mathbb{R}$, παρατηρούμε ότι και άλλες, εκτός των σταθερών ακολουθιών, αρχίζουν να συμπεριφέρονται σαν πραγματικοί αριθμοί.

Ακόμα αν $\mathbb{R}[t] := \{\frac{a_n t^n + \cdots + a_0}{b_m t^m + \cdots + b_0} \ , a_i, b_i \in \mathbb{R}, \quad b_m \neq 0\}$ είναι το σύνολο των ρητών πολυωνύμων ως προς την μεταβλητή t και $f(t) < g(t)$ ανν υπάρχει $\in \mathbb{R}_+$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (0\varepsilon)$, $f(x) < g(x)$, τότε το $\mathbb{R}[t]$ είναι ένα μη - Αρχιμήδειο διαταγμένο σώμα, στο οποίο οι πραγματικοί αριθμοί εμφυτεύονται σαν σταθερές συναρτήσεις.

Μάλιστα η συνάρτηση $y = x$ είναι ένα απειροστό στο $\mathbb{R}[t]$. Παρατηρούμε δηλαδή και εδώ, ότι εμφυτεύοντας το $\mathbb{R}$ σε ένα περιβάλλον με αντικείμενα ανώτερης τάξης, τελικά ανακαλύπτουμε, ότι υπάρχουν και άλλα αντικείμενα εκτός από τις σταθερές συναρτήσεις που συμπεριφέρονται σαν πραγματικοί αριθμοί. Στο δεύτερο μέρος του βιβλίου αυτού, όπου θα μελετήσουμε μεθόδους Ανάλυσης του Boole (Boolean analysis), θα θεωρήσουμε «πραγματικούς αριθμούς» με στοιχεία τυχαίες μεταβλητές ή και σε άλλη περίπτωση ααυτοσυζυγείς τελεστές, βλ. και $[T]$.

Συνοπτικά η μεθοδολογία των **γενικών μη - συμβατικών μαθηματικών** (όχι μόνο της μη - συμβατική ανάλυσης του Robinson) είναι η ακόλουθη:

(i) Εστω ότι θέλουμε να μελετήσουμε κάποια αντικείμενα υψηλής τάξης ή τύπου, π.χ. τυχαίες μεταβλητές, αυτοσυζυγείς τελεστές, μέτρα πιθανότητας κ.λ.π. Προσπαθούμε να βρούμε ένα τρόπο να θεωρήσουμε τα αντικείμενα αυτά σαν

Σχήμα 3.2: Ρητά Πολυώνυμα ως απειροστά

μη - συμβατικούς πραγματικούς και γενικά σαν αντικείμενα μιας μη - συμβατικής δομής. Συνήθως χρησιμοποιούμε, υπερδυνάμεις, δυνάμεις του Boole και άλλες μεθόδους που δεν έχουν ακόμα αναπτυχθεί.

(ii) Για να κάνουμε, η θεωρία υπεράνω της $\mathfrak{A}$ να μεταφέρεται και να αντιστοιχεί σε μια κατάλληλη θεωρία υπεράνω της $^*\mathfrak{A}$, είναι ανάγκη να κατασκευάσουμε την υπερδομή $V(^*\mathfrak{A})$ υπεράνω της $^*\mathfrak{A}$ και να εμφυτεύσουμε κατάλληλα (δηλ. στοιχειωδώς) την υπερδομή $V(\mathfrak{A})$ στην $V(^*\mathfrak{A}$.
Σχηματικά έχουμε το Σχήμα 3.3.

Σχήμα 3.3: Αντικείμενα υψηλού τύπου αναπαρίστανται στην τρίτη υπερδομή, με αντικείμενα $^*A$ του ίδιου τύπου με τα αντικείμενα του τύπου .

2.3.6. Ασκηση: Οι εμφυτεύσεις m και $*$ είναι βεβαίως 1 - 1 αλλά δεν είναι επί. Αν $Im(f)$ συμβολίζει την εικόνα μέσω της f του πεδίου ορισμού της τότε,

$$Im(*) \subsetneq Im(m) \subsetneq V({}^*\mathbb{R}).$$

3.4 Εσωτερικά Σύνολα και Αρχές Προέκτασης: Βασικές προτάσεις.

Μπορούμε αν θέλουμε να θεωρήσουμε όλο το υποτμήμα 2.3 σαν μια κατασκευή που αποδεικνύει ότι πράγματι υπάρχει μια ισομορφική στοιχειώδης εμφύτευση υπερδομών:

$$* : V(\mathbb{R}) \hookrightarrow V({}^*\mathbb{R})$$

με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Αρχή της επέκτασης. *Το $\mathbb{R}$ είναι ένα γνήσιο υποσύνολο του ${}^*\mathbb{R}$ και για κάθε $r \in \mathbb{R}$, ${}^*r = r$.*

(ii) Αρχή της μεταφοράς. *Εστω φ ένας $\mathscr{L}(V(\mathbb{R}))$-τύπος με $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \cdots, x_n\}$. Εστω επίσης, $v_1, \cdots v_n \in V(\mathbb{R})$ τότε:*

$$\mathbf{V}(\mathbb{R}) \models \varphi(\mathbf{v_1}, \cdots, \mathbf{v_n}) \quad \text{ανν} \quad \mathbf{V}({}^*\mathbb{R}) \models \varphi({}^*\mathbf{v_1}, \cdots {}^*\mathbf{v_n})$$

Θεωρώντας τις δύο παραπάνω αρχές σαν αξιώματα, μπορούμε στην ουσία να παραγάγουμε όλα τα αποτελέσματα της μη - συμβατικής ανάλυσης. Αργότερα, για τοπολογικές έννοιες και έννοιες από τη θεωρία μέτρου θα χρειαστούμε ένα τρίτο αξίωμα την **αρχή του κορεσμού**.

Οπως έχουμε ήδη σημειώσει ότι η αρχή της μεταφοράς για τους ατομικούς τύπους της $\mathscr{L}(V(\mathbb{R}))$ γίνεται:

$$v \in u \qquad {}^*v \in {}^*u \qquad v = u \qquad {}^*v = {}^*u.$$

Επομένως η συνολοθεωρία υπεράνω του $\mathbb{R}$ είναι ίδια με την συνολοθεωρία υπεράνω του ${}^*\mathbb{R}$. Αυτό είναι αρκετό για να δούμε ότι η αρχή της μεταφοράς είναι ισοδύναμη με τις ακόλουθες προτάσεις. Ωστόσο θα δώσουμε και μερικές λεπτομερέστερες υποδείξεις:

3.4.1 Θεώρημα. *Εστω $v, u, v_1, \cdots, v_n$ οντότητες της $V(\mathbb{R})$. Τότε,*

(i) ${}^*\{v_1, \cdots v_n\} = \{{}^*v_1, \cdots {}^*v_n\}$

(ii) ${}^*(v_1, \cdots v_n) = ({}^*v_1, \cdots {}^*v_n)$

(iii) $v \subseteq u \qquad {}^*v \subseteq {}^*u$

(iv) $^*(\bigcup_{i=1}^{n} v_i) = \bigcup_{i=1}^{n} {}^*v_i$ και $^*(\bigcap_{i=1}^{n} v_i) = \bigcap_{i=1}^{n} {}^*v_i$

(v) $^*(v_i \times v_2 \times \cdots, \times v_n) = {}^*v_1 \times {}^*v_2 \times \cdots \times {}^*v_n$

(vi) *Αν R είναι μια σχέση στο $v_1 \times \cdots \times v_n$, δηλαδή $R \subseteq v_1 \times \cdots \times v_n$ τότε και $^*R \subseteq {}^*v_1 \times \cdots \times {}^*v_n$ και για $n = 2$, $^*[\mathrm{dom(R)}] = \mathrm{dom(^*R)}$ και $^*[\mathrm{cod(R)}] = \mathrm{cod(^*R)}$.*

(vii) *Αν $f : v \to u$ τότε $^*f : {}^*v \to {}^*u$ και $^*[f(c)] = {}^*f({}^*c), \quad c \in v$.*

Επίσης η f είναι $1-1$ ανν $^*f$ είναι $1-1$.

Proof: **(i)** Εστω $v = \{v_1, \cdots v_n\}$ και έστω η πρόταση:

$$(\forall x \in v)[(x = v_1) \vee \cdots \vee (x = v_n)]$$

Παίρνοντας την $*$ - μεταφορά της έχουμε:

$$(\forall x \in {}^*v)[(x = {}^*v_1) \vee \cdots \vee (x = {}^*v_n)]$$

άρα

$$^*v = \{{}^*v_1, \cdots, {}^*v_n\}. \qquad \dashv\square$$

(ii) Για $n = 2$, έχουμε, $(v_1, v_2) := \{\{v_1\}, \{v_1, v_2\}\}$ και,

$$\begin{aligned} ^*(v_1, v_2) &= {}^*\{\{v_1\}, \{v_1, v_2\}\} \\ &= \{{}^*\{v_1\}, {}^*\{v_1, v_2\}\} && \text{(i)} \\ &= \{{}^*\{v_1\}, \{{}^*v_1, {}^*v_2\}\} && \text{(i)} \\ &= ({}^*v_1, {}^*v_2) \end{aligned}$$

Με επαγωγή παίρνουμε το αποτέλεσμα για κάθε n. $\dashv\square$

(iii) $v \subseteq u$ ανν $(\forall x \in v)[x \in u]$

ανν $(\forall x \in {}^*v)[x \in {}^*u]$ (αρχή μεταφοράς)

ανν $^*v \subseteq {}^*u$. $\dashv\square$

(iv) Θα δείξουμε τη σχέση με την ένωση για $n = 2$. Τη γενική σχέση την παίρνουμε με επαγωγή. Η απόδειξη για τη σχέση με την τομή είναι όμοια. Εστω $v = v_1 \cup v_2$ και έστω η πρόταση:

$$(\forall x \in v)[(x \in v_1) \vee (x \in v_2)] \qquad (\forall x \in {}^*v)[(x \in {}^*v_1) \vee (x \in {}^*v_2)]$$

Ετσι έχουμε δείξει ότι $^*(v_1 \cup v_2) \subseteq {}^*v_1 \cup {}^*v_2$. Όμοια έχουμε $(\forall x \in {}^*v_1)[x \in {}^*v]$ και με την $*$--μεταφορά έχουμε $(\forall x \in {}^*v_1)[x \in {}^*x]$ και $(\forall x \in {}^*v_2)[x \in {}^*v]$ δηλαδή $^*v_1 \subseteq {}^*v$ και $^*v_2 \subseteq {}^*v$ άρα και $^*v_1 \cup {}^*v_2 \subseteq {}^*v$. Αρα $^*v = {}^*v_1 \cup {}^*v_2$. $\dashv\square$

(v) Θα αποδείξουμε την περίπτωση $n = 2$. Ο τύπος που ορίζει το καρτεσιανό γινόμενο είναι:

$$(\forall z \in (v_1 \times v_2))(\exists \times \in v_1)(\exists y \in v_2)[z = (x, y)]$$

Ετσι με $*$--μεταφορά έχουμε,

$$(\forall z \in {}^*(v_1 \times v_2))(\exists x \in {}^*v_1)(\exists y \in {}^*v_2)[z = (x, y)]$$

Αυτό όμως σημαίνει $z \in {}^*(v_1 \times v_2) \Rightarrow z \in {}^*v_1 \times {}^*v_2$, έτσι ${}^*(v_1 \times v_i) \subseteq {}^*v_1 \times {}^*v_2$. Ομοια η σχέση ${}^*v_1 \times {}^*v_2 \subseteq {}^*(v_1 \times v_2)$ παίρνεται με $*$--μεταφορά της $(\forall x \in v_1)(\forall y \in v_2)(\exists z \in (v_1 \times v_2))[z = (x, y)]$. ⊣□

(vi) Η σχέση R είναι μια σχέση επί των $v_1, \ldots, v_n$ αν

$$(\forall x \in R)(\exists x_1 \in v_1) \ldots (\exists x_n \in v_n)[x = (x_1, \ldots, x_n)]$$

Η $*$--μεταφορά της πρότασης αυτής μας λέει ότι η ${}^*R$ είναι μια σχέση επί των ${}^*v_1, \ldots, {}^*v_2$.

Για $n = 2$, θα δείξουμε τώρα ότι ${}^*[\mathrm{dom(R)}] = \mathrm{dom}({}^*\mathrm{R})$. Εξ ορισμού έχουμε $(\forall x \in \mathrm{dom}({}^*\mathrm{R}))(\exists \mathrm{y} \in {}^*\mathrm{v}_2)[(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in {}^*\mathrm{R}]$. Ετσι έχουμε επίσης

$$(\forall x \in \mathrm{dom(R)})(\exists \mathrm{y} \in \mathrm{v}_2)[(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in {}^*\mathrm{R}$$

Η $*$--μεταφορά της τελευταίας πρότασης μας δίνει

$$(\forall x \in {}^*\mathrm{dom(R)}(\exists \mathrm{y} \in {}^*\mathrm{v}_2)[(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{R}]$$

Από την οποία παίρνουμε ότι ${}^*[\mathrm{dom(R)}] = \mathrm{dom}({}^*\mathrm{R})$. Όμοια και για τη σχέση ${}^*[\mathrm{cod(R)}] = \mathrm{cod}({}^*\mathrm{R})$. ⊣□

(vii) Η συνάρτηση $f : v \longrightarrow u$ ορίζεται από τον τύπο:

$$\varphi \equiv (f \subseteq v \times u) \wedge (\forall x \in v)(\forall y \in u)(\forall z \in u)[(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Rightarrow y = z]$$

Παίρνοντας την $*-$μεταφορά της φ έχουμε:

$$\begin{aligned} {}^*\varphi \;\; \equiv \;\; & ({}^*f \subseteq {}^*v \times {}^*u) \wedge \\ & \wedge(\forall x \in {}^*v)(\forall y \in {}^*u)(\forall z \in {}^*u)[(x, y) \in {}^*f \wedge (x, z) \in {}^*f \Rightarrow y = z]. \end{aligned}$$

Ετσι η ${}^*f : {}^*v \longrightarrow {}^*u$ είναι μια συνάρτηση, και αν $c \in v$ είναι μια σταθερά τότε υπάρχει μια μοναδική σταθερά $b \in u$ έτσι ώστε να ισχύει ο ατομικός τύπος $b = f(c)$. Η $*$--μεταφορά του τύπου αυτού μας δίνει ${}^*b = {}^*f({}^*c)$. Τότε $*$--μεταφέροντας τον τύπο που ορίζει την 1 - 1 συνάρτηση έχουμε τελειώσει την απόδειξη. ⊣■

3.4.1 Εσωτερικές Οντότητες.

Οι εσωτερικές οντότητες είναι το σπουδαιότερο είδος οντοτήτων που θα συναντούμε στη συνέχεια και ιδιαίτερα στο Κεφάλαιο 3.

3.4.2 Ορισμός. Εστω $u \in V(^*\mathbb{R})$ τότε:

(i) Το u λέγεται **συμβατικό** ανν $u = {}^*v$ για κάποιο $v \in V(\mathbb{R})$.

(ii) Το u λέγεται **εσωτερικό** (εσωτερική οντότητα) ανν υπάρχει $A \in \mathscr{S}$ τέτοιο ώστε $u \in {}^*A$.

(iii) Το u λέγεται **εξωτερικό** (ή εξωτερική οντότητα) ανν δεν είναι εσωτερικό.

Είναι φανερό ότι η οντότητα u **είναι συμβατική ανν** $u \in Im(*)$**.**

Η ονομασία «συμβατική οντότητα» αιτιολογείται ως εξής: Εστω $u \in V_k(\mathbb{R}), k \geq 0$ μια οντότητα στην υπερδομή $V(\mathbb{R})$. Τέτοιες οντότητες θα τις ονομάζουμε συνήθως **πραγματικές οντότητες**, για να τις διακρίνουμε από τις συμβατικές οντότητες. Ας θεωρήσουμε ακόμα την κλάση ισοδυναμίας που παράγεται από την σταθερή ακολουθία $\{u, u, \ldots\}$ δηλαδή έστω $i(u) := [u, u, \ldots]$. Στη συνέχεια έστω $*(\cdot) := m(i(\cdot))$. Ετσι αρχίζοντας με σταθερές ακολουθίες της $V(\mathbb{R})$ καταλήγουμε σε συμβατικές οντότητες, όπως θα ανάμενε κανείς. Ετσι τίθεται το φυσιολογικό ερώτημα: Τι είδους οντότητες παίρνουμε μέσα από τη διαλεκτική μας διαδικασία, όταν αρχίσουμε από όχι αναγκαστικά σταθερές ακολουθίες; Η απάντηση δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα:

3.4.3 Θεώρημα. *Η οντότητα* $u \in V(^*\mathbb{R})$ *είναι εσωτερική ανν* $u \in Im(m)$, *οπότε υπάρχει αυθαίρετη* $V(\mathbb{R})$*-φραγμένη ακολουθία* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *τέτοια ώστε:* $u = m([u_n]) u \in {}^*[V_{k+1}(\mathbb{R})]$ *ανν* $\{n \in \mathbb{N} | u_n \in V_{k+1}(\mathbb{R})\} \in \mathscr{F}_M, \quad k \geq 0.$

Proof: Εστω u μια εσωτερική οντότητα. Τότε εξ' ορισμού υπάρχει $k \geq 1$ με $u \in {}^*[V_k(\mathbb{R})] = m(i(V_k(\mathbb{R})))$. Αλλά από τον ορισμό της $m(\cdot)$ έχουμε:

$$m\left(i\left(V_k(\mathbb{R})\right)\right) := \{m([g]) | [g] \in_{\mathscr{F}_M} i(V_k(\mathbb{R}))\}$$

Ετσι $u \in m\Big((i(V_k(\mathbb{R}))\Big)$ συνεπάγεται ότι $u = m([g])$ για κάποια V - φραγμένη ακολουθία $g = \{u_n\}$. Αρα $u \in I_m(m)$.

Αντίστροφα Εστω $u \in I_m(m)$. Τότε $u = m([g])$ για κάποιο $[g] \in_{\mathscr{F}_M} i(V_k(\mathbb{R}))$ $k \geq 1$. Επομένως $u = m([g]) \in m(i(V_k(\mathbb{R})) = {}^*V_k(\mathbb{R})$. Αρα το u είναι μια εσωτερική οντότητα. Τέλος, αν u είναι με εσωτερική οντότητα, τότε από τον ορισμό έχουμε: $u \in {}^*[V_k(\mathbb{R})], \quad k \geq 1$. Αυτό όμως σημαίνει ότι για κάποια V - φραγμένη ακολουθία $\{u_n\}$ έχουμε $u = m([u_n])$. Ετσι, $u \in {}^*[V_k(\mathbb{R})]$

ανν $m([u_n]) \in m(i(V_k(\mathbb{R})))$

ανν $[u_n] \in_{\mathscr{F}_M} i(V_k(\mathbb{R}))$
ανν $\{n \in \mathbb{N} | u_n \in V_k(\mathbb{R})\} \in \mathscr{F}_M$
Αρα τελικά έχουμε:

$$u \in {}^*[V_k(\mathbb{R})], \quad k \geq 1 \;\; \{n \in \mathbb{N} | v_n \in V_k(\mathbb{R})\} \in \mathscr{F}_M, \quad k \geq 1,$$

όπου $\{u_n\}$ είναι μια $V(\mathbb{R})$- φραγμένη ακολουθία, που ορίζει την κλάση ισοδυναμίας $[u_n]$. Ετσι η έννοια των εσωτερικών οντοτήτων συμπίπτει με αυτή που ήδη έχουμε εισάγει, πριν από τον παράδειγμα 1.4.12.

Ασκηση. **(1)** Να δειχτεί ότι κάθε στοιχείο μιας εσωτερικής οντότητας είναι εσωτερική οντότητα και ότι τα στοιχεία του ${}^*\mathbb{R}$ είναι εσωτερικές οντότητες.
(2) Να υπολογιστούν τα εσωτερικά σύνολα που παράγονται από τις ακόλουθες V - φραγμένες ακολουθίες:

$$\begin{aligned} A_n :=&(-1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}), n = 1, 2, \ldots \\ A_n :=&(0, 1+\frac{1}{n}), n = 1, 2, \ldots \\ A_n :=&\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x-\frac{1}{n})^2 + y^2 < 1\} \;\; n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

3.4.4 Θεώρημα. *Το σύνολο όλων των εσωτερικών οντοτήτων της υπερδομής $V({}^*\mathbb{R})$ είναι το ${}^*V(\mathbb{R}) = \cup_{n=0}^{\infty} {}^*V_n(\mathbb{R})$.*

Proof: Εστω $u \in {}^*V_n(\mathbb{R})$. Τότε υπάρχει $n \geq 0$ με $u \in {}^*V_n(\mathbb{R})$ έτσι η u είναι εσωτερική οντότητα, αφού του ${}^*V_n(\mathbb{R})$ είναι μια συμβατική οντότητα. Αντίστροφα, έστω ότι το u είναι εσωτερικό. Αρα υπάρχει $v \in V_k(\mathbb{R}), k \geq 1$ με $u \in {}^*v$. Αλλά $v \in V_k(\mathbb{R})$ ανν ${}^*v \in {}^*V_k(\mathbb{R})$, έτσι έχουμε λόγω και της μεταβατικότητας ότι $u \in {}^*V_k(\mathbb{R})$. Επειδή ολόκληρος ο μηχανισμός των υπερδυνάμεων χρησιμοποιεί τύπους της γλώσσας $\mathscr{L}(V(\mathbb{R}))$ για να ορίσει τις αντίστοιχες οντότητες, είναι χρήσιμο να έχουμε ένα κριτήριο όπου όταν μια οντότητα ορίζεται με τύπους να μπορούμε να την αναγνωρίζουμε αν είναι εσωτερική ή εξωτερική. Αυτό γίνεται μέσα από την σπουδαία «Αρχή του Εσωτερικού Ορισμού» του Keisler. Πριν όμως ένα ορισμός:

3.4.5 Ορισμός. Ενας τύπος φ της $\mathscr{L}(V(\mathbb{R}))$ λέγεται αντίστοιχα **πραγματικός, συμβατικός, εσωτερικός, ή εξωτερικός** ανν όλες οι σταθερές που περιέχει έχουν την αντίστοιχη ιδιότητα. Ετσι για παράδειγμα η $*$ - μεταφορά ενός πραγματικού τύπου είναι ένας συμβατικός τύπος.

3.4.6 Θεώρημα. *(Αρχή του εσωτερικού ορισμού (ΑΕΟ)) Εστω $A, u_1, \ldots, u_n$ αυθαίρετες εσωτερικές οντότητες με $A \in \mathscr{S}$ και έστω φ ένα εσωτερικός τύπος με $FV(\varphi) \subseteq \{x_0, \ldots, x_n\}$ τότε το σύνολο*

$$\{x \in A \mid \varphi(x, u_1, \ldots, u_n)\}$$

είναι εσωτερικό.

Proof: Οι σταθερές του τύπου $\varphi, u_1, \ldots, u_n$ αλλά και το σύνολο Α αφού είναι εσωτερικές οντότητες, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $A, u_1, \ldots, u_n \in {}^*(V_k(\mathbb{R})$.

Ετσι η πρόταση της $\mathscr{L}(V(\mathbb{R}))$,

$$(\forall x_1 \ldots, x_n, y \in V_k(\mathbb{R}))(\exists z \in V_{k+1}(\mathbb{R}))(\forall x \in V_k(\mathbb{R}))$$
$$[(x \in z) \leftrightarrow (x \in y) \wedge \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)]$$

ισχύει στην υπερδομή $V(\mathbb{R})$. Επομένως η $*$-μεταφορά της ισχύει στην $V({}^*\mathbb{R})$, δηλαδή έχουμε,

$$(\forall x_1 \ldots, x_n, y \in {}^*V_k(\mathbb{R}))(\exists z \in {}^*V_{k+1}(\mathbb{R}))(\forall x \in {}^*V_k(\mathbb{R}))$$
$$[(x \in z) \leftrightarrow (x \in y) \wedge \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)]$$

Αντικαθιστώντας τις μεταβλητές $x_1, \ldots, x_n$ με τις σταθερές $u_1, \ldots, u_n$ και την y με τη σταθερή Α, εξασφαλίζουμε την ύπαρξη ενός συνόλου $z \in {}^*V_{k+1}(\mathbb{R})$ τέτοιου ώστε, $(x \in z) \leftrightarrow (x \in A) \;\;\&\;\; \varphi(x, u_1, \ldots, u_n)$. Ετσι αφού $z \in {}^*V_{k+1}(\mathbb{R})$ και $z = \{x \in A | \varphi(x_1, u_1, \ldots, u_n)\}$ έπεται ότι το σύνολο $\{x \in A \mid \varphi(x_1, u_1, \ldots, u_n)\}$ είναι εσωτερικό.

3.4.7 Παράδειγμα. **(1)** Εστω $f : {}^*\mathbb{R} \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ μια εσωτερική συνάρτηση. Τότε το σύνολο $\{x \in {}^*\mathbb{R} \mid \quad f \quad *$-συνεχής στο $x\}$ είναι εσωτερικό.
(2) Εστω $f : {}^*V_k(\mathbb{R}) \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ μια εσωτερική συνάρτηση, τότε το μηδενικό σύνολο $Z_f := \{x \in {}^*V_k(\mathbb{R}) | (x, 0) \in f\}$ της f είναι εσωτερικό.
(3) Εστω A και B δύο εσωτερικά σύνολα. Αρα υπάρχει $k \geq 1$ με $A, B \in {}^*V_k(\mathbb{R})$. Εστω τώρα $A \cup B := \{x \in {}^*V_k(\mathbb{R}) | (x \in A) \vee (x \in B)\}$, τότε η ένωση $A \cup B$ είναι εσωτερικό σύνολο από την $A.E.O.$
(4) Εστω $\mathscr{I}$ το σύνολο των κλειστών και φραγμένων διαστημάτων του $\mathbb{R}$. Τότε κάθε διάστημα $\{x \mid a \leq x \leq b, \;\; a, b \in {}^*\mathbb{R}\} \in {}^*\mathscr{I}$ είναι εσωτερικό. Τα συμβατικά $*$-διαστήματα είναι αυτά με $a, b \in \mathbb{R}$.

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι αφού $x \in A$ ανν ${}^*x \in {}^*A$ για κάθε σύνολο A, της υπερδομής $V(\mathbb{R})$, τότε το ${}^*A$ περιέχει ένα στοιχειακό αντίγραφο του A, που ορίζεται ως εξής:

$${}^{\sigma}A := \{{}^*x : x \in A\}$$

και λέγεται **συμβατικό αντίγραφο του** A. Το $^*A$ είναι αυστηρά υπερσύνολο του $^{\sigma}A$, εκτός αν το A είναι πεπερασμένο σύνολο. Ακριβώς αυτά τα επί πλέον ιδεώδη (ή φανταστικά) στοιχεία, είναι που κάνουν τη μέθοδο της μη συμβατικής ανάλυσης χρήσιμη. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με κάποια υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και κάποιες βασικές ιδιότητες του $\mathbb{R}$ που $*$- μεταφέρονται στο $^*\mathbb{R}$.

3.4.8 Πρόταση. **(i)** $*$ **-- καλή διάταξη.** *Για κάθε μη - κενό , εσωτερικό υποσύνολο* $A \subseteq {}^*\mathbb{N}$*, υπάρχει ένα πρώτο στοιχείο* $x \in A$.

(ii) $*$ **- επαγωγή.** *Αν* $S \subseteq {}^*\mathbb{N}$ *είναι ένα εσωτερικό υποσύνολο του* $^*\mathbb{N}$ *και ισχύει :* $0 \in S$ *και για κάθε* $x \in S$ *έχουμε ότι* $x+1 \in S$ *τότε* $S = {}^*\mathbb{N}$.

(iii) $*$ **- πληρότητα.** *Κάθε μη - κενό, εσωτερικό υποσύνολο* $A \subseteq {}^*\mathbb{R}$*, που έχει ένα άνω φράγμα, έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα.*

(iv) $*$ **- Αρχιμήδεια ιδιότητα.** *Για κάθε* $x \in {}^*\mathbb{R}$*, υπάρχει* $n \in {}^*\mathbb{N}$ *με* $|x| < n$.

Proof: Ολες οι αποδείξεις είναι $*$ - μεταφορά των αντιστοίχων πραγματικών ιδιοτήτων.

(i) Επειδή το A είναι εσωτερικό, υπάρχει $k \geq 1$ με $A \in {}^*[V_k(\mathbb{R})]$. Αφού $A \subseteq {}^*\mathbb{N}$ η $*$ - μεταφορά της $(\forall X \in V(\mathbb{R}))[X \subseteq \mathbb{N} \to X \in \mathscr{P}(\mathbb{N})]$ δίνει ότι $A \in {}^*[\mathscr{P}(\mathbb{N})]$. Επειδή το $\mathbb{N}$ είναι καλώς διαταγμένο έχουμε:

$$(\forall X \in \mathscr{P}(\mathbb{N}))[(X = \emptyset) \vee (\exists m \in X)(\forall x \in X)[m \leq x]]$$

Η $*$ - μεταφορά μας δίνει την ιδιότητα (i)

$$(\forall X \in {}^*(\mathscr{P}(\mathbb{N}))[(X = \emptyset) \vee (\exists m \in X)(\forall x \in X)[m \leq x]]$$

Επειδή το $A \in {}^*[\mathscr{P}(\mathbb{N})]$ και $A \neq \emptyset$ έχουμε το ζητούμενο.

(ii) Η μαθηματική επαγωγή για το $\mathbb{N}$ είναι:

$$(\forall X \in \mathscr{P}(\mathbb{N}))][(0 \in X) \wedge (\forall y \in X)[y+1 \in X] \to (X = \mathbb{N})]$$

με $*$ - μεταφορά έχουμε:

$$(\forall X \in {}^*\mathscr{P}(\mathbb{N}))[(0 \in X) \wedge (\forall y \in X) \to (X = {}^*\mathbb{N})]$$

Επειδή το S είναι εσωτερικό, $S \in {}^*\mathscr{P}(\mathbb{N})$ και έτσι έχουμε το ζητούμενο.

(iii) Εστω ότι ο τύπος $\varphi(y, X) \equiv (\forall x \in X)[x \leq y]$, σημαίνει ότι το y είναι άνω φράγμα για το X και ο τύπος,

$$\psi(u, X) \equiv \varphi(u, X) \wedge (\forall u'[\varphi(u', X)] \rightarrow [u \equiv u'$$

σημαίνει ότι το u είναι το ελάχιστο άνω φράγμα για το X, τότε το αξίωμα της πληρότητας για το $\mathbb{R}$ γράφεται:

$$(\forall X \in \mathscr{P}(\mathbb{R}))[(\exists x \in \mathbb{R})[x \in X] \wedge (\exists y \in \mathbb{R})[\varphi(y, X)] \rightarrow (\exists u \in \mathbb{R})[\psi(u, X)]]$$

η δε $*$-μεταφορά είναι η,

$$(\forall X \in {}^*\mathscr{P}(\mathbb{R}))[(\exists x \in {}^*\mathbb{R})[x \in X] \wedge (\exists y \in {}^*\mathbb{R})[\varphi(y, X)] \rightarrow (\exists u \in {}^*\mathbb{R})[\psi(u, X)]]$$

που στην ουσία λέει ότι κάθε μη - κενό **εσωτερικό** υποσύνολο του ${}^*\mathbb{R}$ που έχει ένα άνω φράγμα, έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα.

(iv) Η Αρχιμήδεια ιδιότητα δίδεται από τον τύπο,

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N}0[|x| < n]$$

Ετσι ισχύει, $(\forall x \in {}^*\mathbb{R})(\exists n \in {}^*\mathbb{N})[|x| < n]$

3.4.9 Σχόλιο. **(i)** Βλέπουμε ότι παρ' όλο που το ${}^*\mathbb{R}$ δεν είναι ούτε Αρχιμήδειο ούτε πλήρες ωστόσο είναι $*$ - Αρχιμήδειο και $*$--πλήρες. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει ένας «τοπικός παρατηρητής» ενσωματωμένος στο ${}^*\mathbb{R}$ τότε ο τοπικός αυτός παρατηρητής εκλαμβάνει τις $*$--ιδιότητες ως απλές ιδιότητες. Δηλαδή γι' αυτόν το ${}^*\mathbb{R}$ είναι και Αρχιμήδειο και πλήρες. Μόνον ο απόλυτος εξωτερικός παραρητηρητής μπορεί να κάνει διαχωρισμούς του τύπου «εξωτερικός--εσωτερικός». Γενικότερα ισχύει η ακόλουθη αρχή.

(ii) Η $*$-μεταφορά μετασχηματίζει τις ποσοδεικτήσεις πάνω σε αυθαίρετα σύνολα στο $V(\mathbb{R})$ σε ποσοδεικτήσεις πάνω σε εσωτερικά σύνολα στο $V({}^*\mathbb{R})$. Από το γεγονός αυτό αντλούν και τη μεγάλη σπουδαιότητα, που έχουν τα εσωτερικά σύνολα στην ανάπτυξη της απειροστικής ανάλυσης.

3.4.10 Θεώρημα. *Εστω $G(0) \equiv \mathcal{O}$ ο γαλαξίας του μηδενός, δηλ. όλοι οι πεπερασμένοι υπερπραγματικοί. Τότε έχουμε:*

$${}^*\mathbb{N} \cap \mathcal{O} = \mathbb{N}$$

Proof: Είναι φανερό ότι ${}^{\sigma}\mathbb{N} \subseteq \mathcal{O}$ και ${}^{\sigma}\mathbb{N} \subseteq {}^{*}\mathbb{N}$ έτσι έχουμε ${}^{\sigma}\mathbb{N} \subseteq \mathcal{O} \cap {}^{*}\mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι και ${}^{*}\mathbb{N} \cap \mathcal{O} \subseteq {}^{\sigma}\mathbb{N}$. Πράγματι αν $a \in {}^{*}\mathbb{N} \cap \mathcal{O}$ τότε $a \in {}^{*}\mathbb{N}\ \&\ a \in \mathcal{O}$. Αλλά $a \in \mathcal{O}$ συνεπάγεται ότι υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ με $a \leq m_0$. Ετσι $a \in {}^{*}\mathbb{N}\ \&\ a \leq m_0$ για κάποιο $m_0 \in {}^{\sigma}\mathbb{N}$, συνεπάγεται ότι $a \in {}^{\sigma}\mathbb{N}$, αφού πάντα ${}^{\sigma}N \subseteq {}^{*}\mathbb{N}$.

Μπορεί ακόμα κανείς να αποδείξει ότι:

Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ τότε ${}^{\sigma}A \subseteq {}^{*}A$ και ${}^{*}A \cap {}^{\sigma}\mathbb{R} = {}^{\sigma}A$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι οι άπειροι υπερ - φυσικοί ${}^{*}\mathbb{N} - {}^{\sigma}\mathbb{N}$ είναι εξωτερικό σύνολο. Θα αποφεύγουμε να συμβολίζουμε το ${}^{*}\mathbb{N} - {}^{\sigma}\mathbb{N}$ με ${}^{*}\mathbb{N}_{\infty}$, γιατί υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης ότι το ${}^{*}\mathbb{N}_{\infty}$ είναι συμβατικό σύνολο, λόγω του $*$ και άρα εσωτερικό.

3.4.11 Πρόταση. *Το σύνολο των υπερφυσικών άπειρων αριθμών*

$$ {}^{*}\mathbb{N} - {}^{\sigma}\mathbb{N} $$

είναι ένα εξωτερικό σύνολο.

Proof: Ας υποθέσουμε ότι το ${}^{*}\mathbb{N} - {}^{\sigma}\mathbb{N}$ είναι εσωτερικό. Επειδή ${}^{*}\mathbb{N} - {}^{\sigma}\mathbb{N} \subseteq {}^{*}\mathbb{N}$, η Πρόταση 3.4.8 (i) εφαρμόζεται και επομένως το ${}^{*}\mathbb{N} - {}^{\sigma}\mathbb{N}$ θα έπρεπε να έχει πρώτο στοιχείο. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού για κάθε $x \in {}^{*}\mathbb{N} - {}^{\sigma}\mathbb{N}$ έχουμε επίσης $x - 1 \in {}^{*}\mathbb{N} - {}^{\sigma}\mathbb{N}$. Αρα το ${}^{*}\mathbb{N} - {}^{\sigma}\mathbb{N}$ δεν είναι εσωτερικό.

3.4.12 Πρόταση. *Το σύνολο ${}^{\sigma}\mathbb{N}$ είναι εξωτερικό*

Proof: Αν το ${}^{\sigma}\mathbb{N}$ ήταν εξωτερικό, τότε από την ΑΕΟ και το σύνολο ${}^{*}\mathbb{N} - {}^{\sigma}\mathbb{N} = \{x \in {}^{*}\mathbb{N} | x \notin {}^{\sigma}\mathbb{N}\}$ θα ήταν εσωτερικό. Αρα το ${}^{\sigma}\mathbb{N}$ είναι εξωτερικό σύνολο.

3.4.13 Θεώρημα. *Εστω $A \in V(\mathbb{R})$ και $A \subseteq \mathbb{R}$, τότε: το ${}^{\sigma}A$ είναι εσωτερικό ανν το A είναι πεπερασμένο.*

Proof: $(\Leftarrow)$ Εστω ότι το A είναι πεπερασμένο, δηλαδή

$$ A = \{a_1, \ldots, a_n\} $$

Τότε $\models (\forall x \in A)[x = a_1 \vee \ldots \vee x = a_n]$ ανν ${}^{*} \models (\forall x \in {}^{*}A)[x = {}^{*}a_1 \vee \ldots \vee x = {}^{*}a_n]$ από την αρχή της μεταφοράς (ΑΜ). Αρα ${}^{*}A = \{{}^{*}a_1, \ldots, {}^{*}a_n\} = A$ αφού για κάθε $a \in \mathbb{R}$, ${}^{*}a = a$. Ετσι το A είναι όχι μόνο εσωτερικό αλλά και συμβατικό.

$(\Rightarrow)$ Θα δείξουμε την αντίθετο-αντίστροφη πρόταση. Εστω ότι το A είναι απειροσύνολο τότε θα δείξουμε ότι είναι εξωτερικό. Επειδή το A είναι απειροσύνολο, υπάρχει ένα απειροσύνολο $B \subseteq A$ τέτοιο ώστε να είναι ισοδύναμο με τους φυσικού $\mathbb{N}$. Υπάρχει δηλαδή μια 1 - 1 και επί συνάρτηση $f : B \to \mathbb{N}$. Αν το ${}^{\sigma}A$ είναι εσωτερικό τότε και το ${}^{\sigma}A \cap {}^{*}B = {}^{\sigma}B$ είναι εσωτερικό. Από την συνάρτηση $f : B \to \mathbb{N}$ παράγεται η εσωτερική συνάρτηση, ${}^*f : {}^*B \to {}^*\mathbb{N}$. Αλλά ${}^*f({}^\sigma B) = {}^\sigma\mathbb{N}$. Ετσι το ${}^\sigma\mathbb{N}$ σαν εικόνα ενός εσωτερικού συνόλου ${}^*B$, μέσω μιας εσωτερικής συνάρτησης θα έπρεπε να είναι ένα εσωτερικό σύνολο, που είναι μια αντίφαση. Αρα το ${}^\sigma A$ είναι εξωτερικό.

3.4.14 Πόρισμα. *Τα σύνολα ${}^\sigma\mathbb{R}, {}^\sigma\mathbb{Q}$ και ${}^\sigma\mathbb{Z}$ είναι εξωτερικά.*

3.4.15 Θεώρημα. *Το σύνολο $m(0)$ των απειροστών είναι εξωτερικό.*

Proof: Θα ακολουθήσουμε και δω τον ίδιο γενικό τρόπο απόδειξης που ακολουθήσαμε και στις αποδείξεις των αποτελεσμάτων: Πρόταση 3.4.11-Θεώρημα 3.4.13. Ας υποθέσουμε έτσι ότι το $m(0)$ είναι εσωτερικό. Τότε όμως, επειδή είναι και φραγμένο εκ των άνω (π.χ. από το 1), εφαρμόζεται η Πρόταση 3.4.8(iii). Αρα το $m(0)$ έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα εστω το s, δηλαδή $s = \sup m(0)$. Είναι φανερό ότι $s > 0$ Ακόμα $s \notin m(0)$ γιατί διαφορετικά καταλήγουμε σε άτοπο αφού και το $2s > s$ θα ήταν απειροστό και επομένως θα ανήκε στο $m(0)$. Αν όμως $s \notin m(0)$ τότε και το $\frac{s}{2}$ θα ήταν ένα άνω φράγμα που είναι άτοπο. Επομένως και στις δύο περιπτώσεις οδηγηθήκαμε σε άτοπο και άρα το $m(0)$ είναι εξωτερικό.

Αξίζει να συνοψίσουμε την μέθοδο που ακολουθήσαμε σ' όλες αυτές τις προηγούμενες αποδείξεις. Αξιόλογη μέθοδος απόδειξης. Χρησιμοποιούμε την μέθοδο της «εις άτοπον απαγωγής» με στόχο να φθάσουμε στην αντίφαση, ότι ένα σύνολο που γνωρίζουμε ότι είναι εξωτερικό, αποδεικνύεται ότι είναι εσωτερικό, κάτω από την υπόθεση που έχουμε αρνηθεί.

Ετσι από το γεγονός ότι το $m(0)$ είναι εξωτερικό και με τη χρήση της ΑΕΟ μπορούμε να αποδείξουμε ότι οι ακόλουθες οντότητες είναι εξωτερικές οντότητες:

(i) Κάθε μονάδα $m(a)$ για $a \in {}^*\mathbb{R}$

(ii) Το σύνολο $\mathcal{O} \equiv G(0)$ των πεπερασμένων υπερπραγματικών.

(iii) Κάθε γαλαξίας $G(a), a \in {}^*\mathbb{R}$

(iv) Τα θετικά ή αρνητικά απειροστά,

(u) Οι θετικοί ή αρνητικοί πεπερασμένοι υπερπραγματικοί

(vi) Τα σύνολα ${}^*\mathbb{R} - {}^\sigma\mathbb{R}$ των άπειρων υπερπραγματικών καθώς επίσης και τα σύνολα του των θετικών και αρνητικών υπερπραγματικών.

3.4.2 Ο Τελεστής του Δυναμοσυνόλου και τα Εσωτερικά Σύνολα.

Παρόλο που ο τελεστής του δυναμοσυνόλου, τυπικά δεν είναι μια οντότητα (βλ.[**?**, p.20]), μπορούμε ωστόσο να θεωρούμε την συνάρτηση,

$$\begin{array}{rcccc} \mathscr{P}(\cdot) & : & V(\mathbb{R}) & \rightarrow & V(\mathbb{R}) \\ & & A & \mapsto & \mathscr{P}(A) \end{array}$$

σαν $\mathscr{P} \restriction V_n(\mathbb{R}), \qquad n \geq 0$ οπότε έχουμε και τον αντίστοιχο τελεστή,

$$\begin{array}{rcccc} {}^*\mathscr{P}(\cdot) & : & {}^*V(\mathbb{R}) & \rightarrow & {}^*V(\mathbb{R}) \\ & & A & \mapsto & {}^*\mathscr{P}(A) \end{array}$$

σαν $*$-επέκταση όλων των $\mathscr{P} \restriction V_n$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$ που δρα πάνω σε εσωτερικές οντότητες, και που βεβαίως είναι στοιχεία του ${}^*V(\mathbb{R})$.

Πρέπει κανείς να σημειώσει τη διαφορά στα,

$${}^*[\mathscr{P}(A)], \quad A \in V(\mathbb{R}) \qquad\qquad {}^*[\mathscr{P}](A), \quad A \in {}^*V(\mathbb{R})$$

3.4.16 Πρόταση. *Εστω $A \in \mathscr{I} := V(\mathbb{R}) - \mathbb{R}$, τότε οι εσωτερικές οντότητες του $\mathscr{P}({}^*A)$ είναι ακριβώς τα στοιχεία του ${}^*\mathscr{P}(A)$.*

Proof: Εστω η ακόλουθη πρόταση της $\mathscr{L}(V(\mathbb{R}))$:

$$(\forall X \in V_n(\mathbb{R}))[X \subseteq A \leftrightarrow X \in \mathscr{P}(A)]$$

Η $*$-μεταφορά μας λέει ότι

$$(\forall X \in {}^*V_n(\mathbb{R}))[X \subseteq {}^*A \leftrightarrow X \in {}^*\mathscr{P}(A)]$$

Ετσι αν X είναι μια εσωτερική οντότητα, της $V({}^*\mathbb{R})$, τότε υπάρχει $n \geq 1$ με $X \in {}^*V_n(X)$, επομένως ένα υποσύνολο του ${}^*A$ είναι εσωτερικό ανν $X \in {}^*\mathscr{P}(A)$. Εχουμε ήδη παρατηρήσει ότι ${}^\sigma\mathbb{N} \notin {}^*\mathscr{P}(\mathbb{N})$ αλλά ${}^\sigma\mathbb{N} \in \mathscr{P}({}^*\mathbb{N})$. Ετσι τα εσωτερικά υποσύνολα του ${}^*\mathbb{N}$ είναι τα ${}^*\mathscr{P}(\mathbb{N})$ τα δε εσωτερικά τα $\mathscr{P}({}^*\mathbb{N}) - {}^*\mathscr{P}(\mathbb{N})$ και επί πλέον έχουμε

$${}^\sigma[\mathscr{P}(\mathbb{N})] \subsetneq {}^*[\mathscr{P}(\mathbb{N})] \subsetneq \mathscr{P}({}^*\mathbb{N})$$

Η ίδια σχέση ισχύει και για γενικότερα σύνολα $X \in \mathscr{I}$.

3.4.3 Αρχές Προέκτασης (Prolongation Principles).

Οι ακόλουθες βασικές προτάσεις συναντώνται στην βιβλιογραφία σαν πορίσματα μιας γενικής αρχής, με διάφορα ονόματα: «Αρχή της μονιμότητας» στους Robinson και Lightstone και «Αρχή του Cauchy ή της συνέχειας» στους Stroyan - Luxenmburg. Ολες αυτές οι σχετικές προτάσεις έχουν σαν κεντρικό θέμα **την συμπεριφορά διαφόρων εσωτερικών οντοτήτων στο σύνορο και κατά την μετάβαση μεταξύ δύο ειδών δεικτών : τους πεπερασμένους φυσικούς και τους άπειρα μεγάλους υπερφυσικούς**. Η ονομασία που προτείνουμε «αρχές προέκτασης» (prolongation principles) εκφράζει ακριβώς το γεγονός ότι ιδιότητες που παρατηρούνται αναφορικά με τη μια κατηγορία δεικτών, επεκτείνονται ή προεκτείνονται, και στην άλλη κατηγορία δεικτών. Η πρώτη πρόταση, γνωστή σαν **αριθμήσιμη συμπερίληψη** (countable comprehension) έχει σαν κεντρικό θέμα το ακόλουθο πρόβλημα:

Είναι γνωστό ότι αν έχουμε μια ακολουθία πραγματικών οντοτήτων $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τότε υπάρχει μια κανονική επέκταση $({}^*u_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}}$ με τη χρήση της αρχής της μεταφοράς. Ας υποθέσουμε όμως τώρα ότι έχουμε μια αριθμήσιμη οικογένεια εσωτερικών συνόλων $(A_n)_{n\in{}^\sigma\mathbb{N}}$. Ζητάμε να βρούμε μια εσωτερική ακολουθία $A : {}^*\mathbb{N} \to {}^*V(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε $A(n) \equiv A_n$ για κάθε $n \in {}^\sigma\mathbb{N}$. Αξίζει να σημειώσουμε ότι η αρχή της μεταφοράς δεν προσφέρει στην περίπτωσή μας καμιά βοήθεια, αφού η οντότητα $(A_n)_{n\in{}^\sigma\mathbb{N}}$ είναι εξωτερική ακόμα και στην περίπτωση που το A_n είναι εσωτερικό σύνολο για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αυτό συμβαίνει γιατί το ${}^\sigma\mathbb{N}$ είναι εξωτερικό. Ετσι η ακόλουθη πρόταση είναι αναγκαία.

3.4.17 Θεώρημα. (Αριθμήσιμη Ευρύτητα). *Για κάθε εσωτερικό σύνολο A και για κάθε συνάρτηση $f : {}^\sigma\mathbb{N} \to A$, υπάρχει μια εσωτερική συνάρτηση $g : {}^*\mathbb{N} \to A$ που είναι επέκταση της f.*

Proof: Αφού το A είναι εσωτερικό, θα έχουμε $A \in {}^*(V_k(\mathbb{R}), \quad k \geq 1$. Εστω λοιπόν $f = (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathrm{A}_n \in {}^*(V_k(\mathbb{R})$. Αφού τα A_n είναι εσωτερικά σύνολα έχουν την μορφή,

$$A_n = m([B_i^n]) \quad \text{με} \quad [B_i^n] \in V_k(\mathbb{R})^{\mathbb{N}/\mathscr{F}_M}$$

Ορίζουμε τώρα την ακολουθία,

$$\begin{aligned} B_i : \mathbb{N} &\to V_k(\mathbb{R}) \\ n &\to B_i(n) := B_i^n \end{aligned}$$

όπου B_i^n είναι ένας αντιπρόσωπος της κλάσης $[B - i^n]$. Αν τώρα θέσουμε, $g := m([B_i])$ τότε η συνάρτηση

$$g : {}^*\mathbb{N} \to V({}^*\mathbb{R})$$

είναι εσωτερική εξ ορισμού και,

$$g(n) := ([B_i(n)]) = m([B_i^n]) = A_n \qquad \text{για κάθε} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ετσι η συνάρτηση g είναι η ζητούμενη. $\dashv\square$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε τους ακόλουθους συμβολισμούς: Για $H \in {}^*\mathbb{N} - {}^\sigma\mathbb{N}$ και $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε:

$$\begin{aligned}
\mathbb{N}[0,n] &:= \{k \in \mathbb{N} | 0 \le k \le n\}, \\
\mathbb{N}[n,\infty) &:= \mathbb{N} - \mathbb{N}[0,n-1] \\
{}^*\mathbb{N}[n,H] &:= \{k \in {}^*\mathbb{N} | n \le k \le H\} \qquad \text{και} \\
{}^*\mathbb{N}(\infty,H] &:= \{k \in {}^*\mathbb{N} | k \in {}^*\mathbb{N} - {}^\sigma\mathbb{N} \& k \le H\}
\end{aligned}$$

Το ακόλουθο θεώρημα είναι γνωστό σαν **Αρχή της Υπερχείλισης** (overflow principle) και είναι μια προς τα πάνω αρχή προέκτασης.

3.4.18 Θεώρημα. (Αρχή της υπερχείλισης). *Εστω A ένα εσωτερικό υποσύνολο του ${}^*\mathbb{N}$. Αν για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$ έχουμε $\mathbb{N}[n_0,\infty) \subseteq A$ τότε υπάρχει ένας άπειρα μεγάλος φυσικός $H \in {}^*\mathbb{N}$ τέτοιος ώστε ${}^*\mathbb{N}[n_0,H] \subseteq A$. Για $n_0 = 0$, η αρχή λέει ότι αν το A είναι εσωτερικό και ${}^\sigma\mathbb{N} \subseteq A$ τότε το A περιέχει ένα άπειρα μεγάλο φυσικό $H \in {}^*\mathbb{N} - {}^\sigma\mathbb{N}$.*

Proof: Επειδή το A είναι ένα εσωτερικό υποσύνολο του ${}^*\mathbb{N}$, τότε και το ${}^*\mathbb{N} - A$ θα είναι εσωτερικό από την ΑΕΟ και

$${}^*\mathbb{N} - A \subseteq {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}[n_0,\infty) = ({}^*\mathbb{N} - {}^\sigma\mathbb{N}) \cup \mathbb{N}[0,n-1]$$

Αν το A είναι μη--φραγμένο στο ${}^*\mathbb{N}$ τότε δεν υπάρχει τίποτα για απόδειξη. Αν το A είναι φραγμένο εκ των άνω τότε το εσωτερικό σύνολο ${}^*\mathbb{N} - A$ περιέχει άπειρα μεγάλους ακέραιους. Από την αρχή της $*$-καλής διάταξης (Πρόταση 3.4.8(ii)) υπάρχει το

$$H + 1 := \min\{k : n_0 < k, k \in {}^*\mathbb{N} - A\}$$

Αρα το $H \in A$ και $H \in \mathbb{N} - {}^\sigma\mathbb{N}$ $\dashv\blacksquare$

3.4.19 Θεώρημα. (Αρχή της υπο-Διαρροής*(underflow)***).** *Εστω A ένα εσωτερικό υποσύνολο του ${}^*\mathbb{N}$. Αν για κάποιο άπειρα μεγάλο φυσικό $H \in {}^*\mathbb{N} - {}^\sigma\mathbb{N}$ έχουμε ${}^*\mathbb{N}(\infty,H] \subseteq A$ τότε υπάρχει πεπερασμένο $n_0 \in \mathbb{N}$ με ${}^*\mathbb{N}[n_0,H] \subseteq A$.*

Proof: Είναι δυνατόν να παρατηρήσει κανείς ότι η αρχή της υποχείλισης είναι η αντίθετο-αντίστροφη (contrapositive) της αρχής της υπερχείλισης. Θα δώσουμε όμως και μια ανεξάρτητη απόδειξη, με την εις άτοπο απαγωγή. Εστω ότι για κάθε $n_0 \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}[n_0,\infty) \cap A = \emptyset$. Τότε $\mathbb{N}[n_0,\infty) \subseteq A^c$. Αλλά το A^c είναι εσωτερικό από την ΑΕΟ, έτσι από την αρχή της υπερχείλισης, υπάρχει $H \in {}^*\mathbb{N} - {}^\sigma\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε, ${}^*\mathbb{N}[n_0, H] \subseteq A^c$. Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί το A περιέχει όλους τους υπερακαίρεους ${}^*\mathbb{N}(\infty, H]$ για κάποιο $H \in {}^*\mathbb{N} - {}^\sigma\mathbb{N}$. ⊣▮

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε το Ακολουθιακό Λήμμα του Robinson, το οποίο μας λέει ότι μια εσωτερική ακολουθία απειροστών προεκτείνεται σαν απειροστική ακολουθία και για άπειρα μεγάλους υπερφυσικούς δείκτες.

3.4.20 Θεώρημα. (Ακολουθιακό Λήμμα του Robinson). *Εστω $(a_n)_{n\in {}^*\mathbb{N}}$ μια εσωτερική ακολουθία στο ${}^*\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $a_n \approx 0$ για κάθε $n \in {}^\sigma\mathbb{N}$. Τότε υπάρχει ένας άπειρα μεγάλος υπερφυσικός $H \in {}^*\mathbb{N} - {}^\sigma\mathbb{N}$ έτσι ώστε,*

$$a_n \approx 0 \quad \text{για κάθε} \quad n \leq H$$

Proof: Εστω το σύνολο,

$$A = \{n \in {}^*\mathbb{N} : (\forall k {}^*\mathbb{N})[k \leq n \to k \in \mathrm{dom(a)} \wedge |\mathrm{a}| < \frac{1}{\mathrm{k}}]\}$$

Το σύνολο A είναι εσωτερικό από την ΑΕΟ και περιέχει το σύνολο των φυσικών ${}^\sigma\mathbb{N}$ εξ ορισμού. Από την αρχή της υπερχείλισης, περιέχει έναν υπερφυσικό $H \in {}^*\mathbb{N} - {}^\sigma\mathbb{N}$ με $|a_n| < \frac{1}{n} \approx 0$ για κάθε άπειρα μεγάλο υπερφυσικό $n \leq H$. ⊣▮

3.4.21 Θεώρημα. **(i)** *Κάθε αριθμήσιμη ακολουθία $(a)_{n\in {}^\sigma\mathbb{N}}$ θετικών απειροστών έχει ένα απειροστικό άνω φράγμα.*

(ii) *Κάθε αριθμήσιμη ακολουθία $(b_n)_{n\in {}^\sigma\mathbb{N}}$, θετικών άπειρων υπερπραγματικών έχει ένα άπειρα μεγάλο κάτω φράγμα.*

Proof:

Από την Αριθμήσιμη Ευρύτητα (Θεώρημα 3.4.17), η ακολουθία $(a_n)_{n\in {}^\sigma\mathbb{N}}$ μπορεί να επεκταθεί σε μια εσωτερική ακολουθία $(a_n)_{n\in {}^*\mathbb{N}}$. Αλλά για κάθε $n \in {}^\sigma\mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$a_n \approx 0$$

επομένως από το Ακολουθιακό Λήμμα του Robinson (Θεώρημα 3.4.20), υπάρχει $H \in {}^*\mathbb{N} - {}^\sigma\mathbb{N}$ με $a_n \approx 0$ για κάθε $0 \leq n \leq H$. Αρα το σύνολο $a_0, a_1, \ldots, a_H\}$ είναι ένα υπερπεπερασμένο σύνολο και επομένως το $max_{1\leq n\leq H} a_n$ υπάρχει πάντοτε. ⊣▯

Εφαρμόζουμε το (i) στην ακολουθία $(\frac{1}{b_n})_n \in {}^\sigma\mathbb{N}$. ⊣▮

3.4.22 Θεώρημα.

(i) **Απειροστική υπερχείλιση***(overflow). Αν ένα εσωτερικό υποσύνολο του* $^*\mathbb{R}$ *περιέχει κάθε θετικό απειροστό, τότε το A περιέχει επίσης και έναν θετικό συμβατικό πραγματικό. Δηλαδή :* $A \subseteq {}^*\mathbb{R}, A$ *εσωτερικό και* $m(0)^+ \subseteq A \Rightarrow (\exists \delta^\sigma \mathbb{R}^+[^*(0,\delta) \subseteq A]$.

(ii) **Απειροστική υπο - διαρροή***(underflow). Αν ένα εσωτερικό σύνολο A περιέχει κάθε συμβατικό θετικό πραγματικό αριθμό, τότε το A περιέχει επίσης κάποιο θετικό απειροστό. Δηλαδή: Αν* $(0,x] \subseteq A$ *για κάθε* $x \in {}^\sigma\mathbb{R}^+$ *τότε υπάρχει* $\in m(0)^+$ *με* $[,x] \subseteq {}^\sigma\mathbb{R}^+$.

Proof: Οι αποδείξεις και των δύο προτάσεων ανάγονται στις αντίστοιχες προτάσεις της υπο-διαρροής και της υπερχείλισης. Για παράδειγμα για την (i) εφαρμόζουμε την αρχή της υποχείλισης στο σύνολο,

$$A' = \{n \in {}^*\mathbb{N} | (\forall k \in {}^*\mathbb{N})[n \leq k \to a_n < \frac{1}{k}\}$$

το οποίο είναι εσωτερικό από την ΑΕΟ. ⊣▮

Μια διαφορετική απόδειξη χρησιμοποιεί την $*$ - πληρότητα (Πρόταση 3.4.8(ii)) και το Θεώρημα 3.4.21, και έχει ως εξής:

Αν ένα εσωτερικό σύνολο περιέχει κάθε θετικό απειροστό, αλλά δεν περιέχει ένα συμβατικό θετικό πραγματικό, τότε το A θα ήταν ένα εσωτερικό υποσύνολο του $^*\mathbb{R}$ φραγμένο εκ των άνω αλλά χωρίς ελάχιστο άνω φράγμα. ⊣▮

3.4.23 Παράδειγμα. Εστω f και g δύο εσωτερικές συναρτήσεις. Ας υποθέσουμε ακόμα ότι έχουμε αποδείξει ότι για κάθε $t \in {}^*[0,1]$, υπάρχει ένα απειροστό $\delta_t > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f(t) - g(t)| < \delta t$$

Να ευρεθεί μια **ομοιόμορφη εκτίμηση** > 0 με

$$|f(t) - g(t)| < \delta t \in {}^*[0,1]$$

Εστω

$$A = \{x \in {}^*\mathbb{R} | x > 0 \wedge (\forall t \in {}^*[0,1])[|f(t) - g(t)| < x]\}$$

Το σύνολο A είναι εσωτερικό από την ΑΕΟ και περιέχει κάθε θετικό συμβατικό αριθμό. Ετσι από την αρχή της Απειροστικής υποχείλισης υπάρχει θετικό απειροστό $\delta > 0$ με $\delta \in A$, το οποίο είναι η ζητούμενη ομοιόμορφη εκτίμηση.

Βιβλιοφραφικά Σχόλια.

- Γιά Μοντέλα και υπεργινόμενα δείτε τα: [**?**, **?**].
- Για Μαθηματική Λογική δείτε τα: [**?**, **?**, **?**, **?**].
- Για τη Θεωρία Μοντέλων γενικά, τα: [5, **?**, **?**, **?**, **?**, **?**, **?**, **?**].
- Για την Απειροστική Ανάλυση: [35, 41, 31, 15, 42, 29, 37, 1, 27, 40] κλ.π.
- Για τα Θεμέλια των Μαθηματικών: [7, 13, 39, 29, 37, **?**].

Βιβλιογραφία

[1] Albeverio S., J. E. Fenstad, R. H. Krohn and T. Lindstrom, *Nonstandard Methods in Stochastic Analysis and Mathematical Physics*. Academic Press, 1986.

[2] Αξελός, Κ. *Ο Ηράκλειτος και η Φιλοσοφία*, Εξάντας, Αθήνα, 1974.

[3] Ballard, D. and K. Hrbacek, Standard foundations for nonstandard analysis. *The Journal of Symbolic Logic* **57** (1992), 741-748.

[4] Baron, M. *The Origins of the Infinitesimal Analysis.* 1969, Dover:1987.

[5] Bell, J.L. and M.Machover, *A course in Mathematical Logic*. North Holland, 1977.

[6] Bell, J. L., *Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory*. (Second edition). Clarendon Press, Oxford, 1985.

[7] Bell, J. L., From absolute to Local Mathematics. *Synthese*, **69** (1986), 409-26.

[8] Bell, J. L., Infinitesimals. *Synthese*, **75** (1988), 285-315.

[9] Bell, J. L., A Primer of Infinitesimal Analysis. Cambridge 1998.

[10] Blitz, D. *Emergent Evolution: Qualitative Novelty and the Levels of Reality,* EPISTEME, Vol. 19, Kluwer Acad. Publ. Dordrecht, 1992.

[11] Boyer, C. *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, Columbia Univ. Press 1939, Dover, 1959.

[12] C. C. Chang and H. J. Keisler : *Model theory*. North Holland,3rd Ed. (1990).

[13] Bridge, J. *Beginning model theory: the completeness theorem and some consequences,* Oxford 1977.

[14] Pierre CARTIER, A MAD DAY'S WORK: From Grothendieck to Connes and Kontsevich. The Evolution of Concepts of Space and Symmetry. *BULLETIN (New Series) of the AMS* Vol. 38, No 4, pp. 389-408.

[15] C. C. Chang and H. J. Keisler : *Model theory*. North Holland,3rd Ed. (1990).

[16] Courant, R. and H. Robbins, *What is Mathematics ?* Oxford Univ. Press, 1978.

[17] Cutland, N. J., Nonstandard measure theory and its applications. *Bull. London Math. Soc.*, **15** (1983)

[18] Dauben, J. W. and A. Robinson, *Abraham Robinson: The Creation of Nonstandard Analysis: A Personal and Mathematical Odyssey.* 1995.

[19] Davis, M. *Applied Nonstandard Analysis.* Wiley, 1977.

[20] Diener F. and M. Diener (Eds), *Nonstndard Analysis in Practice.* Springer, Universitext 1995.

[21] Diener, F. and K. D. Stroyan, Syntactical methods in infinitesimal analysis. In N. Cutland : *Nonstandard Analysis and its Applications*, p. 258-282. Cambridge University Press, 1988.

[22] Drossos, C. A., Foundations of Fuzzy Sets. A nonstandard approach. *Fuzzy Sets and Systems*, vol. **37**, p. 287-307, 1990.

[23] Drossos, C. A. and G. Markakis, Boolean powers and stochastic spaces. *Mathematica Slovaca*, vol. **44**, 1-19, 1994.

[24] Δρόσος Α. Κώστας, *Εισαγωγή στα απειροστά και την Απειροστική Πιθανότητα*. Πάτρα, 1988.

[25] Δρόσος Α. Κώστας, *Στοιχεία Θεωρίας Μοντέλων & Απειροστικής Ανάλυσης*. Πάτρα, 1995.

[26] Δρόσος Α. Κώστας *Εισαγωγή στη Μαθηματική σκέψη: Τομ.* $1^{ος}$. Πάτρα 1999.

[27] Engels, F, *Αντι-Ντύρινγκ.* Εκδ. Αναγνωστίδη, 1963.

[28] Edwards, C. H. Jr., and C. H. Esward, *The Historical Development of the Calculus.* Springer, 1994.

[29] Goldblatt, R., *Lectures on the Hyperreals.* Springer, 1998.

[30] Rami Grossberg, *A Course in Model Theory*, Βιβλίο σε εξέλιξη. Δές και: www. math. cmu. . edu/̃rami

[31] Hatcher, W. Calculus is algebra. *Amer. Math. Monthly*, **89** (1982), 362-370.

[32] Heath, T. L. *A Manual of Greek Mathematics*. Dover, 1963.

[33] Henson, C. W. Foundations of Nonstandard Analysis. In: L. Arkeryd, N. Cutland, C. Ward Henson (Eds), *Nonstandard Analysis: Theory and Applications.* Kluwer NATO ASI Series C, 1997.

[34] Hersh, R. *What Is Mathematics Really?*. Oxford Univ. Press 1997.

[35] Hurd, A. and P. Loeb, *An Introduction to Nonstandard Real Analysis*. Academic Press 1985.

[36] Jech, T. Boolean-Valued Models.In J. Donald Monk and R. Bonnet, (Eds) *Handbook of Boolean Algebras*, *3*, Ch. 27, pp. 1197-1211.

[37] Keisler, H. J. *Elementary Calculus*. Prindle, Weber & Schmidt, 1976.

[38] Keisler, H. J., *Foundations of Infinitesimal Calculus*. Prindle, Weber & Schmidt, 1976.

[39] Keisler, H. J., The hyperreal line. In: P. Ehrlich(ed.) *Real Numbers, Generalizations of the Reals, and Theories of Continua*, Kluwer Acad. Publ. 1994.

[40] Kusraev, A. and S. S. Kutateladze, *Nonstandard Methods of Analysis*. Kluwer 1994.

[41] Lambek, J. The influence of Heraclitus on modern Mathemativs. In: J. Agassi and R. S. Cohen (Eds) *Scientific Philosophy Today.* Reidel, 1981, 111-114.

[42] Landers, D. and L. Rogge, *An Introduction to Nonstandard Real Analysis.* Academic Press, New York, 1985.

[43] Lindstr m, T., An invitation to nonstandard analysis. In, N. J. Cutland (Ed.) *Nonstandard Analysis and its Applications,* Cambridge Univ. Press, *L.M.S. Student Texts*, vol. **10**, p.1-105, 1988.

[44] Luxemburg, W. A. L. What is non-standard analysis. *Amar. Math. Monthly*, **80** (1973), 38-67.

[45] Mentzeniotis, D. *Three Views Concerning Continuity and Infinitesimals: Non-Standard Analysis, Topos Theory, and Intuitionism.* Ph.D Thesis, Department of Philosophy, Logic and Scientific Method, The London School of Economics and Political Science, 1986.

[46] Maddy, P., *Naturalism.* Oxford Univ. Press, 1997.

[47] Nelson, E., Internal Set Theory, a new approach to nonstandard analysis. *Bulletin of the A. M. S.*, vol. **83**, n. 6, 1977.

[48] Nelson, E., *Radically Elementary Probability Theory*, Princeton Univ. Press, 1987

[49] Nelson, E., *Nonstandard Analysis*, Βιβλίο σε εξέλιξη. Διαθέσιμο από: `www.math.princeton.edu/~nelson/index.html`.

[50] Palmgren, E. A sheaf-theoretic foundation for nonstandard analysis. *Annals of Pure and Applied Logic*, **85**, 69-86.

[51] Prestel, A. Nonstandard Analysis. In H.-D. Ebbinghaus et all. *Numbers.* Springer GTM # 123, 1990.

[52] Robert, A. *Non-Standard Analysis*. Wiley, 1988.

[53] Rothmaler, P. *Introduction to Model Theory*, Gordon and Breach Science Pub. 2000

[54] Stroyan K. and J. M. Bayod, *Foundations of Infinitesimal Stochastic Analysis*, Norht-Holland 1980.

[55] Sullivan, K. A. The teaching of Elementary Calculus, using the non-standard approach. *Amer. Math. Monthly,* (1976), 370-375.

[56] Tall, D. Looking at graphs through infinitesimal microscopes, windows and telescopes. *The Math. Gazette,* **64** (1980), 22-48.

[57] Vopenka, P. The philosophical foundations of alternative set theory. *Int. J. General Systems*, **20** (1991), 115-126.