Κατηγορίες για άμεση χρήση

Παναγής Καραζέρης
Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών
26500 Πάτρα
email: pkarazer@math.upatras.gr

2 Ιανουαρίου 2006

1 Ορια και συνόρια γενικά

Το **γινόμενο** δύο αντικειμένων A, B μέσα σε μια κατηγορία $\mathbb{C}$ ορίζεται ως ένα αντικείμενο C με τις εξής ιδιότητες:

• Υπάρχει ένα ζεύγος μορφισμών $p_A: C \to A$, $p_B: C \to B$

• Αν D είναι ένα άλλο αντικείμενο της κατηγορίας, για το οποίο υπάρχουν μορφισμοί $q_A: D \to A$, $q_B: D \to B$, τότε υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός $l: D \to C$ έτσι ώστε $p_A \circ l = q_A$ και $p_B \circ l = q_B$.

Αποδεικνύεται πολύ εύκολα ότι ένα αντικείμενο με τις ιδιότητες αυτές, εφόσον υπάρχει, είναι μοναδικά προσδιορισμένο μέχρις ισομορφισμού. Για αυτόν το λόγο αναφερόμαστε σε αυτό ως το γινόμενο $A \times B$. Βέβαια, η χρήση του όρου 'το γινόμενο $A \times B$' προϋποθέτει τη μία επιλογή ανάμεσα σε όλα τα ισόμορφα αντικείμενα με αυτές τις ιδιότητες, πράγμα ενοχλητικό από την άποψη της θεμελίωσης αυτών που λέμε, όμως στις περισσότερες οικείες περιπτώσεις έχουμε μία κανονική επιλογή για το γινόμενο. Ετσι, για παράδειγμα, στην κατηγορία Set των συνόλων (και όλων των συναρτήσεων ανάμεσά τους) το γινόμενο των συνόλων A, B, με την παραπάνω έννοια είναι το συνηθισμένο καρτεσιανό γινόμενο $A \times B = \{(a, b) |\ a \in A,\ b \in B\}$. Αν η κατηγορία μας είναι μια κατηγορία αλγεβρικών δομών (με όλους τους ομομορφισμούς ανάμεσά τους) τότε το γινόμενο δύο αντικειμένων στην κατηγορία είναι πάλι το καρτεσιανό γινόμενο των δυο δομών με τις πράξεις που ορίζονται από τις αρχικές κατά σημείο, ενώ, αν η κατηγορία είναι αυτή των τοπολογικών χώρων (με όλες τις συνεχείς συναρτήσεις ανάμεσά τους, ως μορφισμούς) τότε το γινόμενο δύο αντικειμένων είναι ξανά ο χώρος που παίρνεται αν εφοδιάσουμε το καρτεσιανό γινόμενο τους με την τοπολογία του Tychonov (**Σχόλιο:** η τελευταία αυτή κατασκευή δεν είναι τόσο απλή όσο οι προηγούμενες. Στην άλγεβρα τα όρια κατασκευάζονται απλά. Η τοπολογία είναι, με κάποια έννοια, δυϊκή της άλγεβρας. Αρα εκεί τα συνόρια έχουν ευκολώτερη' περιγραφή από τα όρια).

Αν έχουμε δύο αντικείμενα κι ένα ζευγάρι μορφισμών ανάμεσά τους,

$$f, g: A \rightrightarrows B$$

ορίζουμε ως **εξισωτή** των f, g ένα ζεύγος $(E, e: E \to A)$, όπου

• $f \circ e = g \circ e$

• Αν το ζευγάρι $(C, h: C \to A)$ ικανοποιεί τη σχέση $f \circ h = g \circ h$, τότε υπάρχει μοναδικός μορφισμός $l: C \to E$ τέτοιος ώστε $e \circ l = h$.

Αποδεικνύεται επίσης πολύ εύκολα ότι ένα αντικείμενο με τις ιδιότητες αυτές, εφόσον υπάρχει, είναι μοναδικά προσδιορισμένο μέχρις ισομορφισμού. Για αυτόν το λόγο αναφερόμαστε σε αυτό ως τον εξισωτή των $f,\ g$. Οπως παραπάνω, η χρήση του όρου ό εξισωτής των $f,\ g$ʹ προϋποθέτει μία επιλογή ανάμεσα σε όλα τα ισόμορφα αντικείμενα με αυτές τις ιδιότητες, όμως, επίσης, στις περισσότερες οικείες περιπτώσεις έχουμε μία κανονική επιλογή για τον εξισωτή. Ετσι, στην κατηγορία Set των συνόλων (και όλων των συναρτήσεων ανάμεσά τους) ο εξισωτής των $f,\ g$ είναι το σύνολο $E = \{a \in A|,\ f(a) = g(a)\}$. Ομοίως, σε κατηγορίες αλγεβρικών δομών οι εξισωτές δίνονται από την άλγεβρα που προκύπτει αν περιορίσουμε τις πράξεις της δομής στο υποσύνολο που ταυτίζονται οι δύο ομομορφισμοί.

Ερμηνεύοντας τις παραπάνω έννοιες του γινομένου δύο αντικειμένων και του εξισωτή δύο μορφισμών της κατηγορίας $\mathcal{C}$ στη δυϊκή κατηγορία $\mathcal{C}^{op}$ παίρνουμε τους ορισμούς του **συν-γινομένου** και του **συνεξισωτή**, αντίστοιχα. Πιο συγκεκριμένα, το συν-γινόμενο δύο αντικειμένων A και B είναι ένα αντικείμενο C, για το οποίο:

• υπάρχει ένα ζεύγος μορφισμών $i_A\colon A \to C,\ i_B\colon B \to C$ έτσι ώστε

• αν D είναι ένα άλλο αντικείμενο της κατηγορίας, για το οποίο υπάρχουν μορφισμοί $k_A\colon A \to D,\ k_B\colon B \to D$, τότε υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός $l\colon C \to D$ έτσι ώστε $l \circ i_A = k_A$ και $l \circ i_B = k_B$.

Στην κατηγορία των συνόλων, εύκολα διαπιστώνει κανείς, ότι το συν-γινόμενο δίνεται από τη διαζευγμένη ένωση $A \sqcup B$. Στην κατηγορία είναιτων τοπολογικών χώρων το συν-γινόμενο δύο αντικειμένων είναι ξανά ο χώρος που παίρνεται αν εφοδιάσουμε τη διαζευγμένη ένωσή τους με την τοπολογία

$$O(A \sqcup B) = \{U \subseteq A \sqcup B|\ U \cap A \in O(A),\ U \cap B \in O(B)\}$$

Ομως, σε κατηγορίες αλγεβρικών δομών τα συν-γινόμενα παύουν να έχουν απλή περιγραφή και σε κάθε περίπτωση το σύνολο φορέας του συν-γινομένου δεν είναι η διαζυγμένη ένωση των συνόλων φορέων της καθεμιάς δομής. Ετσι, το συν-γινόμενο δύο αβελιανών ομάδων δίνεται από το ευθύ τους γινόμενο, ενώ το συν-γινόμενο δύο αντιμεταθετικών δακτυλίων (στην κατηγορία των αντιμεταθετικών δακτυλίων και των ομομορφισμών μεταξύ τους) δίνεται από το τανυστικό τους γινόμενο $A \otimes B$, ως αβελιανών ομάδων (δηλαδή το πηλίκο της ελεύθερης ομάδας πάνω στο σύνολο $A \times B$ διά της υποομάδας που γεννάται από τα στοιχεία $(a + a', b) - (a, b) - (a', b)$ και $(a, b + b') - (a, b) - (a, b'))$.

Τέλος, αν έχουμε δύο αντικείμενα κι ένα ζευγάρι μορφισμών ανάμεσά τους,

$$f, g\colon A \rightrightarrows B$$

ορίζουμε τον συνεξισωτή των f, g ως το ζεύγος $(Q, q\colon B \to Q)$, όπου

• $q \circ f = q \circ g$ και

• αν το ζευγάρι $(C, h\colon B \to C)$ ικανοποιεί τη σχέση $h \circ f = h \circ g$, τότε υπάρχει μοναδικός μορφισμός $l\colon Q \to C$ τέτοιος ώστε $l \circ q = h$.

Η αναλυτική περιγραφή του συνεξισωτή δεν είναι απλή ούτε καν στην κατηγορία των συνόλων. Γιαυτό την εξετάζουμε διεξοδικώτερα παρακάτω. Ας σημειώσουμε, πάντως, μια περίπτωση που έχουμε απλή περιγραφή του συνεξισωτή: Στην κατηγορία των αβελιανών ομάδων ο συνεξισωτής ενός ζεύγους παράλληλων μορφισμών

$$f, g\colon A \rightrightarrows B$$

δίνεται από την ομάδα $B/im(f-g)$.

Κλείνουμε αυτήν την ενότητα με τις γενικές έννοιες του ορίου και του συνορίου:

Εστω $\mathbb{I}$ μία μικρή κατηγορία και $D\colon \mathbb{I} \to \mathbb{C}$ ένας συναρτητής στην κατηγορία που εξετάζουμε. (Λέμε ότι το D είναι ένα διάγραμμα σχήματος $\mathbb{I}$ μέσα στην κατηγορία.)

• Ενας κώνος για το διάγραμμα D είναι ένα ζευγάρι $< L, \lambda_i >$, $i \in \mathbb{I}_0$ τέτοιο ώστε $\lambda_{\vartheta_1 \alpha} = D(\alpha) \circ \lambda_{\vartheta_0 \alpha}$, για κάθε $\alpha\colon \vartheta_0\alpha \to \vartheta_1\alpha$ στην $\mathbb{I}$.

• Ο κώνος $< L, \lambda_i >$, $i \in \mathbb{I}_0$ λέγεται οριακός και το αντικείμενο L **όριο του διαγράμματος** αν, για κάθε άλλον κώνο $< C, \kappa_i >$, $i \in \mathbb{I}_0$, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $h\colon C \to L$ έτσι ώστε, για κάθε $i \in \mathbb{I}_0$, $\kappa_i = \lambda_i \circ h$.

Οπως και στις παραπάνω περιπτώσεις, εύκολα αποδεικνύεται ότι το όριο, εφόσον υπάρχει, είναι μοναδικό μέχρις ισομορφισμού και αναφερόμαστε σε αυτό (το ίδιο καταχρηστικά όπως στις παραπάνω περιπτώσεις) ως 'το όριο' του διαγράμματος. Αναφερόμαστε σε πεπερασμένα όρια εννοώντας τα όρια διαγραμμάτων που εκκινούν από μια πεπερασμένες κατηγορίες. Στις ειδικές περιπτώσεις όπου

$$\mathbb{I} = < \cdot\circlearrowleft \qquad \cdot\circlearrowleft > \quad \text{και} \quad \mathbb{I} = <\circlearrowright \cdot \rightrightarrows \cdot\circlearrowleft>$$

ξαναβρίσκουμε τους ορισμούς του γινομένου δύο αντικειμένων και του εξισωτή δύο μορφισμών, αντίστοιχα.

Οταν η 'δείκτρια' κατηγορία $\mathbb{I}$ είναι διακριτική (δεν υπάρχουν άλλοι μορφισμοί στην κατηγορία πέρα από τους ταυτοτικούς) τότε το όριο ενός διαγράμματος πάνω στην $\mathbb{I}$ το λέμε απλώς **γινόμενο** (παραμετρικοποιημένο από την $\mathbb{I}$. Δυϊκά με τα παραπάνω ορίζονται οι έννοιες του **συν-κώνου** και του **συνορίου**.

2 Συνεξισωτές συνόλων

Ας έλθουμε λοιπόν στην περιγραφή του συνεξισωτή ενός διαγράμματος

$$f, g\colon A \rightrightarrows B$$

στην κατηγορία των συνόλων. Ξεκινάμε με μία απλή ιδιότητα, που ισχύει για συνεξισωτές σε οποιαδήποτε κατηγορία

2.1 Πρόταση. *Αν το ζευγάρι $(Q, q\colon B \to Q)$ είναι συνεξισωτής του παραπάνω διαγράμματος τότε ο q είναι επιμορφισμός.*

Απόδειξη: Εστω ότι h, $k\colon Q \to X$ είναι δύο μορφισμοί τέτοιοι ώστε $h \circ q = k \circ q$. Τότε είναι

$$(h \circ q) \circ f = (h \circ q) \circ g$$

άρα πρέπει να υπάρχει μοναδικός μορφισμός $s\colon Q \to X$ τέτοιος ώστε $s \circ q = h \circ q$. Υπάρχουν όμως δύο τέτοιοι μορφισμοί, h και k. Πρέπει επομένως να είναι $s = h = k$. ■

Ομως στην κατηγορία των συνόλων επιμορφισμός θα πει απλώς απεικόνιση που είναι επί. Επιπλέον όλες οι επί συναρτήσεις καταλήγουν (μέχρις ισομορφισμού στην κατηγορία των συνόλων) σε κάποιο σύνολο πηλίκο του πεδίου ορισμού τους. Πρέπει, επομένως, να είναι $Q = B/R$, για κάποια σχέση ισοδυναμίας R. Τώρα, επειδή $q \circ f = q \circ g$, πρέπει η $q\colon B \to B/R$ να ταυτίζει τα στοιχεία $f(a)$, $g(a)$, για όλα τα $a \in A$. Αρα η R περιέχει όλα τα ζεύγη $(f(a), g(a))$, $a \in A$. Επίσης, επειδή η οποιαδήποτε $h\colon B \to C$ που ταυτίζει τα $f(a)$, $g(a)$ πρέπει να παραγοντοποιείται διαμέσω της $q\colon B \to B/R$, καταλήγουμε ότι η R είναι η ελάχιστη σχέση ισοδυναμίας που περιέχει τα ζεύγη $(f(a), g(a))$. Το σύνολο $S = \{(f(a), g(a)) |\, a \in A\}$ είναι μια σχέση πάνω στο B που δεν είναι ούτε ανακλαστική, ούτε συμμετρική, ούτε μεταβατική. Για να πάρουμε λοιπόν την ελάχιστη σχέση ισοδυναμίας που την περιέχει πρέπει να την κλείσουμε ως προς την ανακλαστικότητα και τη συμμετρικότητα θεωρώντας τη σχέση $R_0 = S \cup \Delta \cup S^{-1}$ και στη συνέχεια να πάρουμε τη μεταβατική θήκη R της R_0. Η τελευταία ορίζεται ως εξής:

$$R^{(n+1)} = R^{(n)} \circ R_0 \qquad R = \bigcup_n R^{(n)}$$

Επομένως δύο στοιχεία b, $b' \in B$ παριστάνουν το ίδιο στοιχείο του B/R αν υπάρχει πεπερασμένη ακολουθία στοιχείων a_0, a_1, ..., a_{n+1} του A ώστε

3 Ενα βασικό θεώρημα

3.1 Θεώρημα. *Μια κατηγορία έχει όλα τα (πεπερασμένα) όρια αν και μόνο άν έχει (αντ. πεπερασμένα) γινόμενα και εξισωτές*

Απόδειξη: Προφανώς αν υπάρχουν όλα τα όρια υπάρχουν γινόμενα και εξισωτές ειδικώτερα.

Αντιστρόφως, έστω $D\colon \mathbb{I} \to \mathcal{X}$ ένα διάγραμμα μέσα στην κατηγορία, παραμετρικοποιημένο από τη δείκτρια κατηγορία $\mathbb{I}$. Κατασκευάζουμε το όριο του διαγράμματος ως έναν εξισωτή δύο κανονοκά οριζόμενων μορφισμών ανάμεσα σε δύο γινόμενα. Συγκεκριμένα, θεωρούμε τα γινόμενα $\prod_{\mathbb{I}_0} D(i)$ όλων των αντικειμένων $D(i)$, όπου το i διατρέχει τα αντικείμενα της $\mathbb{I}$ και $\prod_{\mathbb{I}_1} D(\vartheta_1\alpha)$ όλων των αντικειμένων που είναι συν-πεδία κάποιου μορφισμού στο διάγραμμα. (Φυσικά κάθε αντικείμενο είναι συν-πεδίο του ταυτοτικού μορφισμού του, άρα κάθε αντικείμενο του διαγράμματος εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά στο γινόμενο. Το θέμα είναι ότι κάποια αντικείμενα ενδεχομένως εμφανίζονται στο γινόμενο αυτό περισσότερες από μια φορές.)

Υπάρχουν δύο κανονικοί μορφισμοί ανάμεσα σε αυτά τα γινόμενα. Για να τους περιγράψουμε αρκεί, από την καθολική ιδιότητα των γινομένων, να περιγράψουμε δύο οικογένειες μορφισμών, παραμετρικοποιημένες από το σύνολο των μορφισμών της $\mathbb{I}$, προς τα διάφορα $D(\vartheta_1\alpha)$. Αν λοιπόν $j = \vartheta_1\alpha$, οι οικογένειες αυτές είναι οι

$$\{\prod_{\mathbb{I}_0} D(i) \to D(j) \xrightarrow{id} D(\vartheta_1\alpha)\}$$

και

$$\{\prod_{\mathbb{I}_0} D(i) \to D(\vartheta_0\alpha) \xrightarrow{D(\alpha)} D(\vartheta_1\alpha)\}$$

Εχουμε λοιπόν μέσα στην κατηγορία $\mathcal{X}$ αντιμεταθετικά τετράγωνα:

$$\begin{tikzcd}
\prod_{\mathbb{I}_0} D(i) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "p_j"] & \prod_{\mathbb{I}_1} D(\vartheta_1\alpha) \arrow[d, "p_{\vartheta_1\alpha}"] \\
D(j) \arrow[r, "id"] & D(\vartheta_1\alpha)
\end{tikzcd}$$

και

$$\begin{tikzcd}
\prod_{\mathbb{I}_0} D(i) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "p_{\vartheta_1\alpha}"] & \prod_{\mathbb{I}_1} D(\vartheta_1\alpha) \arrow[d, "p_{\vartheta_0\alpha}"] \\
D(\vartheta_0\alpha) \arrow[r, "D(\alpha)"] & D(\vartheta_1\alpha)
\end{tikzcd}$$

που ορίζουν τους μορφισμούς δ και τ, αντίστοιχα. Ισχυριζόμαστε λοιπόν τώρα ότι το όριο του διαγράμματος είναι ο εξισωτής

$$\lim D = Eq(\delta, \tau) \rightarrowtail \prod_{\mathbb{I}_0} D(i) \rightrightarrows \prod_{\mathbb{I}_1} D(\vartheta_1 \alpha)$$

Πράγματι το ζευγάρι $< Eq(\delta, \tau), p_i \circ e >$ αποτελεί κώνο του διαγράμματος D γιατί αν $\alpha\colon i = \vartheta_0\alpha \to \vartheta_1\alpha$

$$\begin{aligned} D(\alpha) \circ p_i \circ e &= D(\alpha) \circ p_{\vartheta_0\alpha} \circ e \\ &= p_{\vartheta_1\alpha} \circ \tau \circ e \\ &= p_{\vartheta_1\alpha} \circ \delta \circ e \\ &= p_j \circ e, \end{aligned}$$

όπως επιθυμούσαμε. Επίσης ο παραπάνω είναι οκαθολικός κώνος γιατί κάθε άλλος κώνος $< L, \lambda_i >$, $i \in \mathbb{I}_0$ επάγει ένα μορφισμό $l\colon L \to \prod_{\mathbb{I}_0} D(i)$ (τον μοναδικό μορφισμό με την ιδιότητα ότι $p_i \circ l = \lambda_i$) που εξισώνει τους μορφισμούς τ και δ (ο τελευταίος αυτός ισχυρισμός αποτελεί απλώς αναδιατύπωση του γεγονότος ότι το ζεύγος $< L, \lambda_i >$ αποτελεί κώνο του διαγράμματος). Αρα υπάρχει μοναδικός μορφισμός $k\colon L \to Eq(\tau, \delta)$ έτσι ώστε $l = e \circ k$. Αυτό με τη σειρά του σημαίνει ότι

$$\lambda_i = p_i \circ l = (p_i \circ e) \circ k$$

που μας δίνει την απαραίτητη συνθήκη παραγοντοποίησης του τυχαίου κώνου μέσω του οριακού. ■

Δυϊκά έχουμε

3.2 Πόρισμα. *Μια κατηγορία έχει όλα τα (πεπερασμένα) συνόρια αν και μόνο άν έχει (αντ. πεπερασμένα) συν-γινόμενα και συνεξισωτές*

3.3 Πόρισμα. *Η κατηγορία των συνόλων έχει όλα τα όρια και όλα τα συνόρια (γιατί όπως έχουμε ήδη δει έχει γινόμενα κι εξισωτές καθώς και συν-γινόμενα και συνεξισωτές)*

4 Ορια και συνόρια συνόλων

Το Θεώρημα της προηγούμενης ενότητας μας δίνει κι έναν αποτελεσματικό τρόπο για την περιγραφή των ορίων και των συνορίων στην κατηγορία των συνόλων. Ετσι το όριο ενός διαγράμματος

$$D\colon \mathbb{I} \to \mathrm{Set}$$

υπολογίζεται ως ένας εξισωτής δύο απεικνίσεων ανάμεσα σε καρτεσιανά γινόμενα. Ενας εξισωτής στην κατηγορία των συνόλων είναι απλώς το σύνολο ταύτισης των δύο συναρτήσεων. Επομένως το όριο του παραπάνω διαγράμματος είναι ένα υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου όλων των κορυφών $D(i)$ του διαγράμματος. Οι δράσεις τώρα των απεικονίσεων δ και τ του προηγούμενου θεωρήματος είναι αντίστοιχα:

$$\delta(< x_i|\ i \in \mathbb{I}_0 >) =< x_i|\ i = \vartheta_1\alpha,\ \alpha \in \mathbb{I}_1 >$$

και

$$\tau(< x_i|\ i \in \mathbb{I}_0 >) =< D(\alpha)(x_i)|\ \alpha \in \mathbb{I}_1 > .$$

Ετσι λοιπόν το όριο του διαγράμματος D είναι το σύνολο εκείνων των στοιχείων του $\prod_{\mathbb{I}_0} D(i)$ πάνω στα οποία οι δ και τ ταυτίζονται. Δηλαδή, τελικά,

$$\mathrm{lim}D = \{< x_i >\in \prod_{\mathbb{I}_0} D(i)|\ x_j = D(x_i) \text{ οποτεδήποτε } \alpha\colon i \to j\}$$

Η περιγραφή των συνορίων είναι, όπως θα περίμενε κανείς, πιο πολύπλοκη. Η δυϊκή εκδοχή του παραπάνω θεωρήματος μας λέει ότι το συνόριο ενός διαγράμματος σε μια κατηγορία δίνεται ως ένας συνεξισωτής ανάμεσα σε συν-γινόμενα

$$\coprod_{\mathbb{I}_1} D(\vartheta_0\alpha) \rightrightarrows \coprod_{\mathbb{I}_0} D(i) \twoheadrightarrow Coeq(\delta,\tau) = \mathrm{colim}D$$

Επομένως το συνόριο ενός οποιουδήποτε διαγράμματος στην κατηγορία των συνόλων είναι ένα πηλίκο της διαζευγμένης ένωσης των κορυφών του διαγράμματος αναφορικά με μια σχέση ισοδυναμίας. Ας εξετάσουμε αναλυτικώτερα τη σχέση αυτή:

Ερμηνεύοντας στο παρόν πλαίσιο τη δράση των απεικονίσεων δ και τ, για $x \in D(\vartheta_0\alpha)$, έχουμε

$$\delta(x) = x \quad \text{και} \quad \tau(x) = D(\alpha)(x)$$

Με βάση την κατασκευή των συνεξισωτών στην κατηγορία των συνόλων, όπως την περιγράψαμε νωρίτερα, βλέπουμε ότι η ζητούμενη σχέση ισοδυναμίας είναι η μικρότερη που περιέχει τα ζευγάρια $(x, D(\alpha)(x))$, για κάποιο μορφισμό α της δείκτριας κατηγορίας. Ετσι λοιπόν, δύο στοιχεία x, x' του συνορίου, που ανήκουν σε κάποια $D(i)$, $D(i')$, αντίστοιχα, συμπίπτουν αν υπάρχει πεπερασμένη ακολουθία στοιχείων y_1, y_2, ..., y_n

$$\begin{array}{cc}
x = \delta(y_0) & \tau(y_0) = \tau(y_1) \\
\delta(y_1) = \delta(y_2) & \tau(y_2) = \tau(y_3) \\
& \\
\multicolumn{2}{c}{\cdots} \\
\multicolumn{2}{c}{\cdots} \\
\multicolumn{2}{c}{\cdots} \\
\delta(y_n) = \delta(y_{n+1}) & \tau(y_{n+1}) = x'
\end{array}$$

Ομως, επειδή η δ δρα ταυτοτικά οι σχέσεις στην αριστερή στήλη δεν περιέχουν καμμία πληροφορία, ενώ αυτές στη δεξιά στήλη αποκτούν νόημα αν, για τη σχέση $\tau(y_k) = \tau(y_{k+1})$, υπάρχουν στη δείκτρια κατηγορία

$$\begin{tikzcd}
i_k \arrow[dr] & & i_{k+1} \arrow[dl] \\
& i_l &
\end{tikzcd}$$

και $y_k \in D(i_k)$, $y_{k+1} \in D(i_{k+1})$ ώστε

$$D(\alpha_k)(y_k) = D(\alpha_{k+1})(y_{k+1}).$$

Τέλος τα $x \in D(i)$, $x' \in D(i')$ ταυτίζονται στο συνόριο αν υπάρχει ζιγκ-ζαγκ

$$\begin{tikzcd}
i = i_1 \arrow[dr] & & i_3 \arrow[dl] & \cdots & i_{2l-1} \arrow[dr] & & i_{2l+1} = i' \arrow[dl] \\
& i_2 & & & & i_{2l} &
\end{tikzcd}$$

και στοιχεία $y_{2k-1} \in D(i_{2k-1}),\ k = 2, ..., l$ ώστε

$$x = y_1, \quad D(\alpha_{2k-1})(y_{2k-1}) = D(\alpha_{2k+1})(y_{2k+1}), \quad y_{2k+1} = x'.$$

5 Φιλτραρισμένα συνόρια

Μια μικρή κατηγορία $\mathbb{I}$ λέγεται **φιλτραρισμένη** αν

• Δεν είναι κενή

• Για κάθε δύο αντικείμενά της i, j υπάρχει αντικείμενο k και μορφισμοί $\alpha_{ik}\colon i \to k$ και $\alpha_{jk}\colon j \to k$.

• Για κάθε δύο παράλληλους μορφισμούς της α, $\beta\colon i \rightrightarrows j$ υπάρχει μορφισμός της $\gamma\colon j \to k$ ώστε $\gamma \circ \alpha = \gamma \circ \beta$.

Ετσι, για παράδειγμα, μια μικρή κατηγορία, η οποία έχει πεπερασμένα συνόρια, είναι φιλτραρισμένη. (Είναι μη-κενή γιατί το συνόριο του κενού διαγράμματος, δηλαδή το αρχικό αντικείμενο, ανήκει στην κατηγορία, δύο οποιαδήποτε αντικείμενα απεικονίζονται από κοινού στο συν-γινόμενό τους και δύο παράλληλοι μορφισμοί συνεξισώνονται από τον συνεξισωτή τους.) Ειδικώτερα, γιά μία έννοια αλγεβρικής δομής, που ορίζεται από πράξεις πεπερασμένου αριθμού ορισμάτων, η κατηγορία των πεπερασμένως παρουσιάσιμών δομών (με όλους τους ομομορφισμούς ανάμεσά τους) είναι μικρή φιλτραρισμένη κατηγορία.

Αναφερόμαστε σε **φιλτραρισμένα συνόρια** εννοώντας τα συνόρια διαγραμμάτων που η δείκτρια κατηγορία τους είναι φιλτραρισμένη. Ειδική περίπτωση φιλτραρισμένης κατηγορίας αποτελεί ένα κατευθυνόμενο μερικώς (προ-) διατεταγμένο σύνολο.

Σχόλιο: Αποδεικνύεται ότι κάθε φιλτραρισμένο συνόριο μπορεί να θεωρηθεί ως **κατευθυνόμενο** συνόριο, με την έννοια ότι για κάθε μικρή φιλτραρισμένη κατηγορία υπάρχει ένα κατευθυνόμενο (προ-) διατεταγμένο σύνολο, που αποτελεί υποκατηγορία της αρχικής και είναι ομοτελικό στην κατηγορία (δηλαδή κάθε αντικείμενο της κατηγορίας έχει ένα μορφισμό προς ένα αντικείμενο του διατεταγμένου συνόλου και κάθε δύο τέτοιοι συμπίπτουν αφού απεικονισθούν σε ένα περεταίρω στοιχείο του διατεταγμένου συνόλου), έτσι ώστε το συνόριο πάνω στην κατηγορία να είναι το ίδιο με το συνόριο πάνω στο διατεταγμένο σύνολο. (Η σύμπτωση αυτή των συνορίων αποτελεί γενικώτερη ιδιότητα των συνορίων πάνω σε ομοτελικές κατηγορίες.) Επιπλέον, με χρήση του αξιώματος επιλογής, αποδεικνύεται ότι ένα κατευθυνόμενο συνόριο μπορεί πάντα να παρθεί ως το συνόριο του περιορισμού του αρχικού διαγράμματος σε ένα γραμμικώς διατεταγμένο υποσύνολο του αρχικού (όχι κατ΄ ανάγκη ομοτελικού, αυτήν τη φορά)

5.1 Πρόταση. *Αν $D\colon \mathbb{I} \to \mathrm{Set}$ είναι ένα διάγραμμα πάνω σε μία φιλτραρισμένη κατηγορία, τότε το συνόριό του δίνεται από το σύνολο $\coprod_{i\in\mathbb{I}_0} D(i)/\sim$, όπου $x_i \sim x_j$ αν $x_i \in D(i)$, $x_j \in D(j)$ και υπάρχουν μορφισμοί $\alpha_{ik}\colon i \to k$ και $\alpha_{jk}\colon j \to k$ ώστε $D(\alpha_{ik})(x_i) = D(\alpha_{jk})(x_j)$. Η $\sim$ είναι σε αυτήν τη περίπτωση σχέση ισοδυναμίας.*

Απόδειξη: Η περιγραφή των συνορίων στην προηγούμενη ενότητα μας λέει ότι το συνόριο είναι το πηλίκο του συν-γινομένου $\coprod_{i\in\mathbb{I}_0} D(i)$ δια μία σχέση ισοδυναμίας που ταυτίζει τα x_i, x_j ακριβώς στην περίπτωση που υπάρχει ζιγκ-ζαγκ όπως στο τέλος της προηγούμενης ενότητας. Εφαρμόζοντας πεπερασμένο πλήθος φορών τις συνθήκες στον ορισμό της φιλτραρισμένης κατηγορίας καταλήγουμε ότι η ύπαρξη τέτοιου ζιγκ-ζαγκ ανάγεται στη συνθήκη που περιγράφουμε στην πρόταση. Ετσι, π.χ, ένα ζιγκ-ζαγκ

$$\begin{tikzcd}
i = i_1 \arrow[dr] & & i_3 \arrow[dl] \arrow[dr] & & i_5 = j \arrow[dl] \\
& i_2 & & i_4 &
\end{tikzcd}$$

συμπληρώνεται σε ένα διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
i = i_1 \arrow[dr] & & i_3 \arrow[dl] \arrow[dr] & & i_5 = j \arrow[dl] \\
& i_2 \arrow[dr] & & i_4 \arrow[dl] & \\
& & k & &
\end{tikzcd}$$

από τη δεύτερη συνθήκη του ορισμού της φιλτραρισμένης κατηγορίας. Οι εικόνες των x_i, x_j στο $D(k)$ έχουν τώρα γίνει κατ΄ ανάγκη ίσες. Το γεγονός ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας είναι προφανές. ■

Η σημασία των φιλτραρισμένων συνορίων έγκειται στο ότι (υπάρχουν και) κατασκευάζονται όπως στην κατηγορία των συνόλων και σε μία σειρά από κατηγορίες που απαντώνται στη μαθηματική πρακτική. Το γεγονός ότι κατασκευάζονται όπως στην κατηγορία των συνόλων, δηλαδή ότι το υποκείμενο σύνολο του συνορίου είναι το συνόριο των υποκείμενων συνόλων των δομών που συμμετέχουν στο διάγραμμα, αποτελεί, ουσιαστικά, εφαρμογή της παρακάτω θεμελιώδους αποτελέσματος :

5.2 Θεώρημα. *Εστω $D\colon \mathbb{I} \times \mathbb{P} \to \mathrm{Set}$ ένα διπλά παραμετρικοποιημένο διάγραμμα στην κατηγορία των συνόλων, όπου η $\mathbb{I}$ είναι φιλτραρισμένη κατηγορία και η $\mathbb{P}$ είναι πεπερασμένη κατηγορία. Τότε ο κανονικός μορφισμός*

$$\mathrm{colim}_{\mathbb{I}}\mathrm{lim}_{\mathbb{P}}D(i,p) \to \mathrm{lim}_{\mathbb{P}}\mathrm{colim}_{\mathbb{I}}D(i,p)$$

είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη: Κατ΄ αρχήν να σημειώσουμε για ένα διπλά παραμετρικοποιημένο διάγραμμα σε οποιαδήποτε κατηγορία υπάρχει ο παραπάνω κανονικός μορφισμός, ο οποίος επάγεται ως εξής: Για κάθε $i \in \mathbb{I}$, και διατηρώντας σταθερό το $p \in \mathbb{P}$, υπάρχει ο κανονικός μορφισμός $D(i,p) \to \mathrm{colim}_{\mathbb{I}} D(i,p)$ προς το συνόριο. Ολοι αυτοί οι μορφισμοί ΄περνάνε στο όριο΄ ως $\mathrm{lim}_{\mathbb{P}} D(i,p) \to \mathrm{lim}_{\mathbb{P}} \mathrm{colim}_{\mathbb{I}} D(i,p)$. Ολοι οι τελευταίοι επάγουν ένα μορφισμό

$$\mathrm{colim}_{\mathbb{I}} \mathrm{lim}_{\mathbb{P}} D(i,p) \to \mathrm{lim}_{\mathbb{P}} \mathrm{colim}_{\mathbb{I}} D(i,p)$$

Ομως, επειδή όλα τα όρια κατασκευάζονται από γινόμενα και εξισωτές, αρκεί για να δείξουμε ότι, στη συγκεκριμένη περίπτωση, ο κανονικός μορφισμός είναι ισομορφισμός, αρκεί να δείξουμε ότι έχουμε ισομορφισμό στην περίπτωση που η $\mathbb{P}$ είναι μια από τις κατηγορίες

$$\mathbb{P} = < \cdot\circlearrowleft \qquad \cdot\circlearrowleft > \quad \text{ή} \quad \mathbb{P} = <\circlearrowright \cdot \rightrightarrows \cdot\circlearrowleft>$$

Αρκεί δηλαδή να δείξουμε ότι οι κανονικές συναρτήσεις

$$\theta\colon \mathrm{colim}_{\mathbb{I}}(A_i \times B_i) \to (\mathrm{colim}_{\mathbb{I}} A_i) \times (\mathrm{colim}_{\mathbb{I}} B_i) \quad \text{και}$$

$$\varphi\colon \mathrm{colim}_{\mathbb{I}} Eq(f_i, g_i) \to Eq(\mathrm{colim}_{\mathbb{I}} f_i, \mathrm{colim}_{\mathbb{I}} g_i\colon \mathrm{colim}_{\mathbb{I}} A_i \rightrightarrows \mathrm{colim}_{\mathbb{I}} B_i)$$

είναι ισομορφισμοί. Η θ ορίζεται:

$$\theta([(x_i, y_i)]) = ([x_i], [y_i])$$

και η φ από τον τύπο $\varphi([x_i]) = [x_i]$
Ο υπολογισμός που χρειαζόμαστε είναι χωρίς ιδιαίτερες απαιτήσεις.

Ειδικά προκειμένου για τη θ προκύπτει αμέσως ότι είναι καλά ορισμένη, ένα - προς - ένα και επί.

Ας εξετάσουμε κάπως αναλυτικώτερα την φ. Για να κατανοήσουμε καλύτερα τον ορισμό της παραθέτουμε το εξής αντιμεταθετικό διάγραμμα (όπου το δεξιά διπλά τετράγωνα είναι ‘‘σειριακά’’ αντιμεταθετικά)

$$\begin{tikzcd}
Eq(f_i, g_i) \arrow[r, "e_i"] \arrow[d, "in_i"] & A_i \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & B_i \arrow[d] \\
\mathrm{colim}_{\mathbb{I}} Eq(f_i, g_i) \arrow[r, "e o \varphi"] \arrow[d, "\varphi"] & \mathrm{colim}_{\mathbb{I}} A_i \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "id"] & \mathrm{colim}_{\mathbb{I}} B_i \arrow[d, "id"] \\
Eq(\mathrm{colim}_{\mathbb{I}} f_i, \mathrm{colim}_{\mathbb{I}} g_i) \arrow[r, "e"] & \mathrm{colim}_{\mathbb{I}} A_i \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \mathrm{colim}_{\mathbb{I}} B_i
\end{tikzcd}$$

Οι συναρτήσεις $\mathrm{colim}_{\mathbb{I}} f_i$, $\mathrm{colim}_{\mathbb{I}} g_i$ ορίζονται από τους τύπους

$$(\mathrm{colim}_{\mathbb{I}} f_i)[x_i] = [f_i(x_i)]$$

και ομοίως η $\mathrm{colim}_{\mathbb{I}} g_i$ (η αντιμεταθετικότητα του άνω δεξιά τετραγώνου του διαγράμματος λέει ακριβώς αυτό). Πρέπει να ελέγξουμε τον καλό ορισμό αυτών των συναρτήσεων.

Αυτός είναι ένας καλός ορισμός γιατί αν $x_i \sim x_j$, δηλαδή $A(\alpha_{ik})(x_i) = A(\alpha_{jk})(x_j)$ τότε, επειδή υπάρχουν αντιμεταθετικά τετράγωνα

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[r, "A(\alpha_{ik})"] \arrow[d, "f_i"] & A_k \arrow[d, "f_k"] & A_j \arrow[l, "A(\alpha_{jk})"'] \arrow[d, "f_j"] \\
B_i \arrow[r, "B(\alpha_{ik})"] & B_k & B_j \arrow[l, "B(\alpha_{jk})"']
\end{tikzcd}$$

έπεται ότι $B(\alpha_{ik}(f_i(x_i)) = B(\alpha_{jk}(f_j(x_j))$ άρα $f_i(x_i) \sim f_j(x_j)$ κι επομένως τα τελευταία συμπίπτουν ως στοιχεία του $\mathrm{colim}_{\mathbb{I}} B_i$

(Η ύπαρξη των παραπάνω αντιμεταθετικών τετραγώνων οφείλεται στο ότι, ανακαλώντας τη γενική κατάσταση, για κάθε $\alpha\colon i \to i'$ και $\beta\colon j \to j'$ έχουμε αντιμεταθετικό τετράγωνο

$$\begin{tikzcd}
D(i,j) \arrow[r, "D(i,\beta)"] \arrow[d, "D(\alpha,j)"] & D(i,j') \arrow[d, "D(\alpha,j')"] \\
D(i',j) \arrow[r, "D(i',\beta)"] & D(i',j')
\end{tikzcd}$$

λόγω του ότι ο D είναι συναρτητής και στις δύο μεταβλητές, οπότε και οι δύο συνθέσεις είναι ίσες με το μορφισμό $D(\alpha,\beta)\colon D(i,j) \to D(i',j')$)

Με δεδομένο αυτό, λοιπόν, μπορούμε να προχωρήσουμε στη μελέτη της συνάρτησης φ. Αφού η φ δρα ταυτοτικά αυτό που μένει να ελεγτεί ως προς αυτήν είναι ότι παίρνει πράγματι τιμές στο σύνολο $Eq(\mathrm{colim}_{\mathbb{I}} f_i, \mathrm{colim}_{\mathbb{I}} g_i)$ και ότι είναι επί.

Το πρώτο συμβαίνει γιατί αν το $[x_i]$ ανήκει στο $\mathrm{colim}_{\mathbb{I}} Eq(f_i, g_i)$ τότε $f_i(x_i) = g_i(x_i)$, για κάποιο $i \in \mathbb{I}$, άρα

$$(\mathrm{colim}_{\mathbb{I}} f_i)[x_i] = [f_i(x_i)] = [g_i(x_i)] = (\mathrm{colim}_{\mathbb{I}} g_i)[x_i],$$

οπότε το $[x_i] \in Eq(\mathrm{colim}_{\mathbb{I}} f_i, \mathrm{colim}_{\mathbb{I}} g_i)$. Επίσης, κάθε στοιχείο του τελευταίου συνόλου είναι αυτής της μορφής γιατί αν $(\mathrm{colim}_{\mathbb{I}} f_i)[x_i] = (\mathrm{colim}_{\mathbb{I}} g_i)[x_i]$, δηλαδή $[f_i(x_i)] = [g_i(x_i)]$, τότε τα $f_i(x_i)$, $g_i(x_i)$ ανήκουν σε κάποιο B_i και (ενώ μπορεί να μην είναι ίσα) υπάρχει $k \in \mathbb{I}$ και $\alpha_{ik}\colon i \to k$ ώστε

$$B(\alpha_{ik})(f_i(x_i)) = B(\alpha_{ik})(g_i(x_i)).$$

Οπως όμως επιχειρηματολογήσαμε παραπάνω είναι

$$B(\alpha_{ik})(f_i(x_i)) = f_k(A(\alpha_{ik})(x_i)) \qquad B(\alpha_{ik})(g_i(x_i)) = g_k(A(\alpha_{ik})(x_i)).$$

Αρα $[x_i] = [A(\alpha_{ik})(x_i)]$, όπου το $A(\alpha_{ik})(x_i)$ ανήκει στο $Eq(f_k, g_k)$. ■

5.3 Πόρισμα. *Σε μια αλγεβρική κατηγορία (=κατηγορία αλγεβρικών δομών που ορίζονται από πράξεις πεπερασμένου αριθμού ορισμάτων και όλων των ομομορφισμών μεταξύ τους) τα φιλτραρισμένα συνόρια υπολογίζονται όπως και στην κατηγορία των συνόλων (= ο επιλήσμων συναρτητής από την αλγεβρική κατηγορία στην κατηγορία των συνόλων τα διατηρεί)*

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι το φιλτραρισμένο συνόριο των υποκείμενων συνόλων των δομών που συμμετέχουν στο διάγραμμα κληρονομούν αλγεβρική δομή του ιδίου τύπου (ελέγχεται τότε εύκολα ότι το σύνολο αυτό, με την επαγόμενη αλγεβρική δομή, αποτελεί το συνόριο του διαγράμματος). Ας γράφουμε $U\colon Alg \to \mathrm{Set}$ για τον επιλήσμωνα συναρτητή από την αλγεβρική κατηγορία στην κατηγορία των συνόλων. Αν $*\colon A_i \times A_i \to A_i$ παριστάνει μία αλγεβρική πράξη, θέλουμε να δούμε ότι επάγει μια τέτοια στο σύνολο $U(\mathrm{colim}_{\mathbb{I}} A_i)$. Δηλαδή θέλουμε ένα μορφισμό

$$U(\mathrm{colim}_{\mathbb{I}} A_i) \times U(\mathrm{colim}_{\mathbb{I}} A_i) \to U(\mathrm{colim}_{\mathbb{I}} A_i)$$

Ομως $U(A \times B) \cong U(A) \times U(B)$, όπως είδαμε στη συζήτηση των ορίων. Από το θεώρημα τώρα

$$U(\mathrm{colim}_{\mathbb{I}} A_i \times \mathrm{colim}_{\mathbb{I}} A_i) \cong U(\mathrm{colim}_{\mathbb{I}}(A_i \times A_i))$$

άρα η πράξη επάγεται από την $*$, η οποία περνάει στο συνόριο, μέσω των διαδοχικών ισομορφισμών ■

Σλόγκαν: Στην κατηγορία των συνόλων αλλά και στις αλγεβρικές κατηγορίες τα φιλτραρισμένα συνόρια αντιμετατίθενται με τα πεπερασμένα όρια.

6 Ορια και συνόρια προδραγμάτων

Αν $\mathcal{C}$ είναι μία μικρή κατηγορία τότε η κατηγορία $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ των (ανταλλοίωτων) συναρτητών με τιμές στην κατηγορία των συνόλων κληρονομεί όρια και συνόρια από την κατηγορία των συνόλων. Αυτό σημαίνει ότι για οποιοδήποτε διάγραμμα $D\colon \mathbb{I} \longrightarrow [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$ υπάρχουν το όριο και το συνόριό του και είναι οι συναρτητές

$$\mathrm{lim}D\colon \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathrm{Set}$$

και

$$\mathrm{colim}D\colon \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathrm{Set}$$

που ορίζονται αντίστοιχα στο τυχαίο αντικείμενο C ως

$$(\mathrm{lim}D)(C) = \mathrm{lim}_{\mathbb{I}} D_i(C)$$

και

$$(\mathrm{colim}D)(C) = \mathrm{colim}_{\mathbb{I}} D_i(C),$$

ενώ η δράση τους σε ένα μορφισμό $f\colon C' \longrightarrow C$ προσδιορίζεται από το γεγονός ότι υπάρχει ένας κώνος

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{lim}_{\mathbb{I}} D_i(C) \arrow[dl, "p_i"'] \arrow[dr, "p_j"] \arrow[dd, dotted] & \\
D_iC \arrow[dd, "D_if"] & & D_jC \arrow[dd, "D_jf"] \\
 & \mathrm{lim}_{\mathbb{I}} D_i(C') \arrow[dl, "p'_i"'] \arrow[dr, "p'_j"] & \\
D_iC' \arrow[rr, "D\alpha"] & & D_jC'
\end{tikzcd}$$

άρα επάγεται ένας μορφισμός

$$(\mathrm{lim}D)(f)\colon \mathrm{lim}_{\mathbb{I}} D_i(C) \longrightarrow \mathrm{lim}_{\mathbb{I}} D_i(C')$$

και όμοια για τον συναρτητή $\mathrm{colim}D$.

6.1 Θεώρημα. *Κάθε συναρτητής*

$$F\colon \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathrm{Set}$$

είναι (μέχρι φυσικού ισομορφισμού) το συνόριο ενός διαγράμματος αναπαραστάσιμων συναρτητών, πιό συγκεκριμμένα του διαγράμματος

$$y \downarrow F \xrightarrow{\ \pi\ } \mathcal{C} \xrightarrow{\ y\ } [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$$

Απόδειξη: Είναι προφανές, από τον τρόπο που προσδιορίσαμε το διάγραμμα, ότι ο F είναι συν-κώνος του διαγράμματος

$$\begin{tikzcd} yC = y(\pi(C,\widehat{\alpha})) \arrow[rr] \arrow[dr, "\alpha"'] & & y(\pi(C',\widehat{\alpha'})) = yC' \arrow[dl, "\alpha'"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

Ας γράφουμε $\alpha\colon y\circ\pi \Longrightarrow F$ αυτόν τον συν-κώνο, με συντεταγμένες τους φυσικούς μετασχηματισμούς $\alpha^{(C,x)}\colon yC \longrightarrow F$ κι ας θεωρήσουμε έναν οποιονδήποτε άλλο συν-κώνο $\beta\colon y\circ\pi \Longrightarrow G$ του διαγράμματος. Θέλουμε να προσδιορίσουμε μία παραγοντοποίησή του μέσω του F, δηλαδή έναν φυσικό μετασχηματισμό $\varphi\colon F \longrightarrow G$.

Ας ανακαλέσουμε επίσης τον τρόπο που λειτουργεί η αντιστοιχία του Yoneda: Το $x \in FC$ είναι $x = \alpha_C(id_C)$, για κάποιον φυσικό μετασχηματισμό $\alpha\colon yC \longrightarrow F$. Για την ακρίβεια, κάθε τέτοιο στοιχείο είναι $x = \alpha_C^{(C,x)}(id_C)$ για κάποια συντεταγμένη $\alpha^{(C,x)}$ του κώνου α.

Ορίζουμε λοιπόν τη C-συντεταγμένη του φυσικού μετασχηματισμού ως τη συνάρτηση που απεικονίζει το στοιχείο $x = \alpha_C^{(C,x)}(id_C) \in FC$ που αντιστοιχεί στην (C,x)-συντεταγμένη του συν-κώνου με κορυφή τον F στο στοιχείο

$$\varphi_C = \beta_C^{(C,x)}(id_C) \in GC''$$

που αντιστοιχεί στην (C,x)-συντεταγμένη του συν-κώνου β με κορυφή τον G.

Θέλουμε να δείξουμε τη φυσικότητα αυτής της απεικόνισης, ότι δηλαδή αντιμετατίθεται το τετράγωνο

$$\begin{tikzcd} FC \arrow[r, "\varphi_C"] \arrow[d, "Ff"] & GC \arrow[d, "Gf"] \\ FC' \arrow[r, "\varphi'_C"] & GC', \end{tikzcd}$$

για κάθε μορφισμό $f\colon C' \longrightarrow C$, ότι δηλαδή το

$$Gf(\varphi_C(x)) = Gf(\beta_C^{(C,x)}(id_C))$$

ισούται με

$$\varphi_{C'}((Ff)(x)) = \varphi_{C'}(x') = \beta_{C'}^{(C',x')}(id'_C)$$

Ομως, λόγω της φυσικότητας του $\beta^{(C,x)}$, έχουμε ότι αντιμετατίθεται το τετράγωνο

$$\begin{tikzcd}
(yC)(C) \arrow[r, "\beta_C^{(C,x)}"] \arrow[d, "-\circ f"] & GC \arrow[d, "Gf"] \\
(yC)(C') \arrow[r, "\beta_{C'}^{(C,x)}"] & GC',
\end{tikzcd}$$

δηλαδή ότι

$$Gf(\beta_C^{(C,x)}(id_C)) = \beta_{C'}^{(C,x)}(f).$$

Θέλουμε δηλαδή, εν τέλει, να είναι

$$\beta_{C'}^{(C,x)}(f) = \beta_{C'}^{(C',x')}(id'_C) \quad (\clubsuit)$$

αλλά, αφού το G είναι συν-κώνος του διαγράμματος, αντιμετατίθεται το

$$\begin{tikzcd}
yC' \arrow[rr, "yf"] \arrow[dr, "\beta_{C'}^{(C',x')}"'] & & yC \arrow[dl, "\beta_{C'}^{(C,x)}"] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

οπότε κοιτώντας την C'-συντεταγμένη του διαγράμματος και εφαρμόζοντας και τους δύο δρόμους στο στοιχείο $id_{C'}$ βρίσκουμε το $(\clubsuit)$. ∎

7 Ο τύπος των Kan - Lawvere

Κατά τη γνώμη του γράφοντος το παράδειγμα που ακολουθεί αποτέλεσε τον πιεστικώτερο λόγο για την απομόνωση και εισαγωγή κατά ρητό τρόπο της θεμελιωδέστερης έννοιας της Θεωρίας Κατηγοριών, αυτής των προσαρτημένων συναρτητών (Kan, 1958). Η εισαγωγή της έννοιας αυτής ολοκλήρωσε προηγούμενες ανεπιτυχείς απόπειρες σε αυτήν την κατεύθυνση (P. Samuel, N. Bourbaki).

Ο λόγος που παρατίθεται το συγκεκριμένο παράδειγμα έχει να κάνει, πέρα από την ιστορική του σημασία και το εγγενές τοπολογικό ενδιαφέρον και τις αντίστοιχες συνέπειες που μπορεί να παρουσιάζει, με το ότι η κατασκευή που ακολουθεί είναι μια απλή συνέπεια του τρόπου που κατασκευάζονται τα συνόρια από συν-γινόμενα και συνεξισωτές, ειδικώτερα στην κατηγορία των τοπολογικών χώρων. Επίσης γιατί, όπως θα διαπιστώσουμε, η κατασκευή που θα μελετήσουμε έχει έναν πολύ γενικό χαρακτήρα και με τη γενικευμένη του μορφή μα φέρνει προ της κεντρικής έννοιας, από τη σκοπιά της Λογικής, που μας απασχολεί εδώ, του **ταξινομούντος τόπου μιάς θεωρίας**.

Να θυμίσουμε εδώ έναν (τον απλούστερο στη διατύπωσή του και επαρκή για τους σκοπούς μας) ορισμό των προσαρτημένων συναρτητών: Αν έχουμε ένα ζευγάρι συναρτητών

$$G\colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D}\colon F$$

ανάμεσα σε δύο κατηγορίες λέμε ότι ο F είναι **αριστερά προσρτημένος** στον G (ισοδύναμα ότι ο G είναι δεξιά προσαρτημένος στον F) και συμβολίζουμε $F \dashv G$, αν υπάρχει μία **φυσική αντιστοιχία** μορφισμών

$$\frac{D \to G(C) \quad \text{στην } \mathcal{D}}{F(D) \to C \quad \text{στην } \mathcal{C}}$$

Η απαίτηση της φυσικότητας εδώ είναι με την τεχνική έννοια, ότι δηλαδή υπάρχει φυσικός ισομορφισμός ανάμεσα στους συναρτητές (δύο μεταβλητών) $\hom_{\mathcal{D}}(-, G(-)), \hom_{\mathcal{C}}(F(-), -)\colon \mathcal{D}^{op} \times \mathcal{C} \rightrightarrows \mathrm{Set}$.

Παράδειγμα: Εστω $U\colon \mathrm{Top} \to \mathrm{Set}$ ο επιλήσμων συναρτητής από την κατηγορία των τοπολογικών χώρων σε αυτή των συνόλων και disc, codisc: $\mathrm{Set} \rightrightarrows \mathrm{Top}$ οι συναρτητές που σε ένα σύνολο αντιστοιχίζουν τον τοπολογικό χώρο με φορέα το ίδιο το σύνολο, εφοδιασμένο τη μία φορά με τη διακριτική τοπολογία, την άλλη δε, με τη χαοτική τοπολογία. Ισχύει ότι $\mathrm{disc} \dashv U \dashv \mathrm{codisc}$. Γιατί, προφανώς, όλες οι συναρτήσεις από ένα σύνολο S προς το υποκείμενο σύνολο ενός τοπολογικού χώρου είναι συνεχείς αναφορικά με τη διακριτική τοπολογία πάνω στο σύνολο και όλες οι συναρτήσεις από το υποκείμενο σύνολο ενός τοπολογικού χώρου προς ένα σύνολο είναι συνεχείς αναφορικά με τη χαοτική τοπολογία στο τυχαίο σύνολο.

Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι η κατηγορία των τοπολογικών χώρων έχει όλα τα συνόρια.

7.1 Πρόταση. *Η κατηγορία* Top, *των τοπολογικών χώρων και των συνεχών συναρτήσεων ανάμεσά τους, έχει όλα τα όρια και συνόρια και ο επιλήσμων συναρτητής* $U\colon \mathrm{Top} \to \mathrm{Set}$ *διατηρεί όρια και συνόρια*

Ερχόμαστε τώρα στην κατασκευή του D. Kan. Συμβολίζουμε με $\mathbf{\Delta}$ την (μικρή) κατηγορία των πεπερασμένων διατακτικών αριθμών $0, 1, 2, ..., n, ...$ με τις συναρτήσεις που διατηρούν τη διάταξη ανάμεσά τους. Θεωρούμε το συναρτητή $\Delta\colon \mathbf{\Delta} \to \mathrm{Top}$ που ορίζεται ως εξής:

$$\Delta(n) = \{(t_0, t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | t_i \geq 0 \quad \sum_i t_i = 1\}$$

Γράφουμε απλώς Δ_n για τη δράση του συναρτητή στα αντικείμενα. Αν η $\alpha\colon n \to m$ διατηρεί τη διάταξη, η δράση του συναρτητή επάνω της δίνεται ως $\Delta_\alpha(t_0, ..., t_n) = (s_0, ..., s_m)$, όπου $s_j = \sum_{\alpha(i)=j} t_i$. Αυτός είναι ένας καλός ορισμός γιατί

$$\sum_j s_j = \sum_j \sum_{\alpha(i)=j} t_i = \sum_i t_i = 1,$$

όπου η προτελευταία ισότητα εξηγείται από το γεγονός ότι στο διπλό άθροισμα τα t_i εμφανίζονται **όλα** και **μόνο μία φορά** το καθένα, ακριβώς επειδή η α είναι συνάρτηση. Είναι προφανές ότι η Δ_α είναι συνεχής συνάρτηση.

Με το συναρτητή Δ συσχετίζουμε ένα ζευγάρι συναρτητών,

$$\Delta_*\colon \mathrm{Top} \leftrightarrows [\mathbf{\Delta}^{op}, \mathrm{Set}]\colon \Delta^*$$

ως εξής: $\Delta_*(X) = \hom_{\mathrm{Top}}(\Delta(-), X)$ και

$$\Delta^*(S) = (\mathrm{Lan}_y \Delta)(S) = \mathrm{colim}(\Delta \circ p\colon\ \mathrm{elts}(S) \to \mathbf{\Delta} \to \mathrm{Top})$$

7.2 Θεώρημα. $\Delta^* \dashv \Delta_*$

Απόδειξη: Πρώτα από όλα μερικά σχόλια για τον ορισμό του Δ^*. Κατ΄ αρχήν ο συμβολισμός $\mathrm{Lan}_y\Delta$ διαβάζεται ‘‘αριστερή Kan επέκαταση του Δ κατά μήκος της εμφύτευσης Yoneda’’ $y\colon \mathbf{\Delta} \hookrightarrow [\mathbf{\Delta}^{op}, \mathrm{Set}]$, αλλά αυτή είναι μία έννοια που δε θα μας απασχολήσει εδώ στην πλήρη γενικότητά της (η οποία δεν είναι και πολύ μεγαλύτερη από αυτή του συγκεκριμένου παραδείγματος). Ούτε η εμφύτευση Yoneda παίζει ουσιαστικό ρόλο στην παρούσα απόδειξη.

Ο υποψήφιος αριστερά προσαρτημένος συναρτητής λοιπόν ορίζεται μέσω ενός συνορίου. Η δείκτρια κατηγορία για το συνόριο αυτό έχει ως αντικείμενα ζεύγη $(m \in \mathbf{\Delta}_0, x \in S(m))$ (γι αυτό λέγεται και ‘‘κατηγορία των στοιχείων του S’’. Οι μορφισμοί

$$(m, x \in S(m)) \to (n, y \in S(n))$$

της κατηγορίας είναι συναρτήσεις $\alpha\colon m \to n$ τέτοιες ώστε $S(\alpha)(y) = x$ (ο συναρτητής S είναι ανταλλοίωτος). Γράφουμε $\mathrm{elts}(S)$ για τη δείκτρια κατηγορία. Ο συναρτητής $p\colon \mathrm{elts}(S) \to \mathbf{\Delta}$, στο διάγραμμα του οποίου παίρνουμε το συνόριο, είναι η προβολή $p(m, x) = m$. Ενας φυσικός μετασχηματισμός $\varphi\colon S \to S'$ επάγει ένα συναρτητή ανάμεσα στις δείκτριες κατηγορίες, ο οποίος με τη σειρά του επάγει ένα μορφισμό ανάμεσα στα αντίστοιχα συνόρια (**άσκηση!**).

Θα χρειαστούμε στην πορεία να δηλώσουμε ξεχωριστά το συν-γινόμενα $\coprod_{(m,x)\in \mathrm{elts}(S)} \Delta_m$ των κορυφών του διαγράμματος ως προς όλα τα αντικείμενα της δείκτριας κατηγορίας και $\coprod_{x\in S(m)}$ των κορυφών του διαγράμματος ως προς όλα τα στοιχεία του $S(m)$. Αυτά τα συν-γινόμενα συνοδεύονται, για κάθε εμφάνιση του Δ_m, και από έναν κανονικό μορφισμό

$$i_{(m,x)}\colon \Delta_m \to \coprod_{(m,x)\in \mathrm{elts}(S)} \Delta_m$$

και

$$i_x\colon \Delta_m \to \coprod_{x\in S(m)} \Delta_m.$$

Επίσης, κάθε μορφισμός

$$\rho\colon \operatorname*{colim}_{\mathrm{elts}(S)} \Delta_m \to X$$

επάγει μορφισμούς

$$\rho_m\colon \coprod_{S(m)} \Delta_m \to X$$

ώστε να είναι αντιμεταθετικό το τετράγωνο

$$\begin{tikzcd}
\Delta_m \arrow[r, "i_x"] \arrow[d, "i_{(m,x)}"] & \coprod_{S(m)} \Delta_m \arrow[d, "\rho_m"] \\
\coprod_{\mathrm{elts}(S)} \Delta_m \arrow[r, "\rho\circ q"] & X
\end{tikzcd}$$

(δηλαδή ο μορφισμός ρ_m επάγεται από το γεγονός ότι έχουμε μια οικογένεια μορφισμών $\rho\circ q\circ i_{(m,x)}$, για κάθε $x\in S(m)$.)

Εστω τώρα $\alpha\colon n \to m$ ένας μορφισμός της $\mathbf{\Delta}$. Τότε η κατασκευή των συνορίων μας λέει ότι το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\Delta_{\vartheta_0\alpha} \arrow[r, "id"] \arrow[d, "i_n"] & \Delta_n \arrow[d, "i_{(n,S(\alpha)(x))}"] & & \\
\coprod_{\mathrm{elts}(S)_1} \Delta_m \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \coprod_{\mathrm{elts}(S)_0} \Delta_m \arrow[r, "q"] & \operatorname*{colim}_{\mathrm{elts}(S)} \Delta_m \arrow[r, "\rho"] & X \\
\Delta_{\vartheta_0\alpha} \arrow[r, "\Delta_\alpha"] \arrow[u, "i_n"] & \Delta_m \arrow[u, "i_{(m,x)}"] & &
\end{tikzcd}$$

είναι αντιμεταθετικό. Ισχύουν επομένως τα εξής:

$$\begin{aligned}
\rho_m\circ i_x\circ \Delta_\alpha &= \rho\circ q\circ i_{(m,x)}\circ\Delta_\alpha \\
&= \rho\circ q\circ i_{(n,S(\alpha)(x)}
\end{aligned}$$

$$= \quad \rho_n \circ i_{S(\alpha)(x)}$$

Εχουμε τώρα τις ακόλουθες αντιστοιχίες μορφισμών:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\mathrm{colim}_{\mathrm{elts}(S)}\Delta_m \xrightarrow{\rho} X}{\forall m \quad \coprod_{S(m)} \Delta_m \xrightarrow{\rho_m} X}}{\forall m \ \ S(m) \xrightarrow{\widehat{\rho}_m} \mathrm{hom}(\Delta_m, X) \quad (\widehat{\rho}_m(x) = \rho_m \circ i_x)}}{S \longrightarrow \mathrm{hom}(\Delta_{(-)}, X)}$$

Μένει να δείξουμε ότι όλοι οι $\widehat{\rho}_m$ αποτελούν συντεταγμένες ενός φυσικού μετασχηματισμού, ότι δηλαδή αντιμετατίθεται το

$$\begin{tikzcd}
S(m) \arrow[r, "\widehat{\rho}_m"] \arrow[d, "S(\alpha)"] & \mathrm{hom}(\Delta_m, X) \arrow[d, "-\circ\Delta_\alpha"] \\
S(n) \arrow[r, "\widehat{\rho}_n"] & \mathrm{hom}(\Delta_n, X)
\end{tikzcd}$$

Πράγματι

$$\begin{aligned}
((- \circ \Delta_\alpha) \circ \widehat{\rho}_m)(x) &= \widehat{\rho}_m(x) \circ \Delta_\alpha \\
&= \rho_m \circ i_x \circ \Delta_\alpha \\
&= \rho_n \circ i_{S(\alpha)(x)} \\
&= \widehat{\rho}_n(S(\alpha)(x)) \\
&= (\widehat{\rho}_n \circ S(\alpha))(x)
\end{aligned}$$

■

Η κατηγορία $[\mathbf{\Delta}^{op}, \mathrm{Set}]$ ονομάζεται κατηγοριά των μονόπλοκων συνόλων (Simplicial Sets) και παίζει καθοριστικό ρόλο στην ανάπτυξη της θεωρίας ομοτοπίας. Τα μονόπλοκα σύνολα περιέχουν την απαραίτητη συνδυαστική πληροφορία που μπορεί να χρειάζεται σε διάφορες τοπολογικές θεωρήσεις. Ο κρίσιμος συναρτητής Δ^* που εξετάσαμε παραπάνω λέγεται συναρτητής 'γεωμετρικής πραγματοποιήσης' ενός μονόπλοκου συνόλου. Μας χρησιμεύει ώστε διάφορες κατασκευές με συγκεκριμένες ιδιότητες στην τοπολογία να μελετώνται πρώτα από καθαρά συνδυαστικής πλευράς σε επίπεδο μονόπλοκων συνόλων και μετά να μεταφέρονται μέσω του συναρτητή στους τοπολογικούς χώρους.

Το ξυράφι του Occam Τι χρησιμοποιήσαμε από την κατηγορία των τοπολογικών χώρων και την κατηγορία $\mathbf{\Delta}$ στην προηγούμενη απόδειξη; Τίποτε άλλο, πέρα από το ότι η $\mathbf{\Delta}$ είναι μικρή κατηγορία και ότι η κατηγορία των τοπολογικών χώρων είναι τοπικά μικρή (ώστε να έχουν νόημα τα hom-σύνολα) και το ότι έχει όλα τα συνόρια. Θα μπορούσαμε λοιπόν να διατυπώσουμε ως πόρισμα το (γενικώτερο;) απότέλεσμα ότι κάθε συναρτητής $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{X}$ από μία μικρή προς μία κατηγορία που έχει όλα τα όρια επάγει ένα ζευγάρι προσαρτημένων συναρτητών

$$F_*\colon \mathcal{X} \leftrightarrows [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]\colon F^*$$

Με ελάχιστη παραπάνω προσπάθεια (και χρησιμοποιώντας το Λήμμα του Yoneda) θα μπορούσαμε να δείξουμε κι ότι η αντιστοίχιση του ζεύγους των προσαρτημένων συναρτητών στον δοθέντα είναι μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία. Λαμβάνοντας υπ΄ όψη ότι οι συναρτητές με τους φυσικούς μετασχηματισμούς ανάμεσά τους σχηματίζουν νέες κατηγορίες, ουσιαστικά έχουμε μία ισοδυναμία κατηγοριών

$$[\mathcal{C}, \mathcal{X}] \cong \mathrm{Adj}(\mathcal{X}, [\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}])$$

όπου με την κατηγορία στα δεξιά εννοούμε τους αριστερά προσαρτημένους συναρτητές, ως αντικείμενα, και τους φυσικούς μετασχηματισμούς μεταξύ τους, ως μορφισμούς.

Από εδώ πού; Αν θυμηθούμε τι είναι αυτό που επιδιώκουμε να περιγράψουμε με την έννοια του ταξινομούντος τόπου μιάς πρωτοβάθμιας λογικής θεωρίας, αντιλαμβανόμαστε ότι τώρα πλησιάζουμε στι σκοπό μας. Αν λοιπόν η κατηγορία $\mathcal{X}$ είναι τώρα ένας τόπος και την κατηγορία στο δεξί χέρι την περιορίσουμε στην πλήρη υποκατηγορία της, όπου οι αριστερά προσαρτημένοι συναρτητές διατηρούν επιπλέον και τα πεπερασμένα όρια, τότε έχουμε ως αντικείμενα τους λεγόμενους γεωμετρικούς μορφισμούς ανάμεσα στους τόπους $\mathcal{X}$ και $[\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Set}]$. Στο αριστερό μας χέρι οι συναρτητές περιορίζονται, αντίστοιχα, στους λεγόμενους **επίπεδους** (flat) συναρτητές (αυτό είναι το περιεχόμενο του Θεωρήματος που φέρει το όνομα του R. Diaconescu στη Θεωρία Τόπων). Η κατηγορική λογική μας λέει ότι οι επίπεδοι συναρτητές είναι μοντέλα σχετικά απλών συνακτικών θεωριών...

8 Αναφορές

Για την ισοδυναμία φιλτραρισμένων και κατευθυνόμενων συνορίων:

J. Adámek J. Rosicky, *Locally presentable and accessible categories*, London Mathematical Society, Lecture Note Series,189, Cambridge University Press, 1994

Για την ισοδυναμία κατευθυνόμενων συνορίων με συνόρια πάνω σε αλυσίδες (με χρήση του αξιώματος επιλογής):

G. Gierz, K. H. Hofmann, K. Keimel, J. D. Lawson, M. Mislove and D. S. Scott, *A Compendium of continuous Lattices*, Springer, 1980

Για το πότε ταυτίζονται δύο στοιχεία στο συνόριο και τις συνέπειές του:

A. Kock, Postulated colimits and left exactness of Kan extensions, *Matematisk Institut, Aarhus Universitet, Preprint Series*, 9, 1989

Για κάποιες χρήσεις της περιγραφής των συνορίων στη κατηγορική λογική:

P. Karazeris, Notions of Flatness relative to a Grothendieck Topology, *Theory and Applications of Categories*, 12 (2004), 225–236

P. Karazeris, J. Rosický, J. Velebil, Completeness of cocompletions, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 169 (2005), 229-250

Για το γενικό ορισμό των ορίων και συνορίων σε κατηγορίες και το θεμελιώδες παράδειγμα που ακολουθεί:

D. Kan, Adjoint Functors, *Transactions A.M.S*, Vol. 87, 294-329, 1958

Για τον τύπο Kan-Lawvere και τη σημασία του:

F. W. Lawvere, The Perugia Notes, Perugia, 1973 (χειρόγραφες σημειώσεις)