Εισαγωγή στη Μαθηματική Λογική

Κωνσταντίνος Δρόσος

Παναγής Καραζέρης

Ευτύχης Παπαδοπετράκης

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

25 Μαΐου 2005

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

ΓΙΑ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΣΥΜΠΑΓΟΥΣ

1.1 Μια απόδειξη του Θεωρήματος

Το Θεώρημα του Συμπαγούς είναι ένα από τα πιο ξεχωριστά αποτελέσματα της Μαθηματικής Λογικής. Μπορεί να διατυπωθεί τόσο στο πλαίσιο της Προτασιακής όσο και της Κατηγορηματικής Λογικής. Το Θεώρημα του Συμπαγούς για την Κατηγορηματική Λογική είναι ιδιαίτερα σημαντικό για τα Μαθηματικά. Η χρησιμοποίησή του στα Μαθηματικά φωτίζει τον τρόπο που θεμελιώνονται ορισμένες κεντρικές έννοιες των Μαθηματικών, όπως αυτές του φυσικού και του πραγματικού αριθμού. Εμείς εδώ θα εστιάσουμε την προσοχή μας στο Θεώρημα του Συμπαγούς για την Προτασιακή Λογική. Οντας ένα θεώρημα με τόσο μεγάλη σημασία αλλά και ιστορία είναι αναμενόμενο να έχει μια πληθώρα αποδείξεων. Θα σχεδιάσουμε μία απόδειξη που κάνει χρήση των δυαδικών δένδρων και του Λήμματος του König.

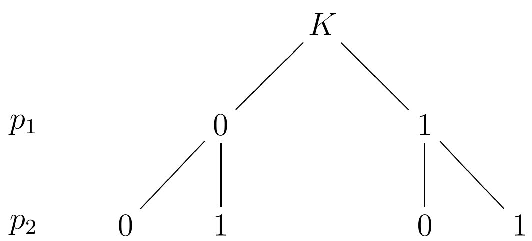
1.1.1 Θεώρημα. *Ενα σύνολο προτάσεων Σ είναι ικανοποιήσιμο αν και μόνο αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του είναι ικανοποιήσιμο.*

Απόδειξη: Μπορούμε να κάνουμε για το Σ την εξής παραδοχή: Το Σ δεν περιέχει προτάσεις που ανά δύο είναι ταυτολογικά ισοδύναμες. Από τη στιγμή που μας ενδιαφέρει να βρούμε μια αποτίμηση που να γίνονται όλες οι προτάσεις του Σ αληθείς δεν έχει σημασία αν στο σύνολο βρίσκονται κι άλλες προτάσεις, που είναι ταυτολογικά ισοδύναμες με τις υπάρχουσες. Ούτως ή άλλως θα γίνονταν κι αυτές αληθείς.

Θεωρούμε λοιπόν ότι στις προτάσεις του συνόλου Σ εμφανίζονται οι προτασιακές μεταβλητές $p_1, p_2, \ldots$ Ας συμβολίσουμε με Σ_n το σύνολο των προτάσεων του Σ στις οποίες εμφανίζονται μόνο μεταβλητές μεταξύ των $p_1, p_2, ..., p_n$. Πρέπει να τονίσουμε εδώ ότι το σύνολο Σ_n είναι πεπερασμένο. Αυτό δικαιολογείται από το γεγονός ότι, αφού διαφορετικές προτάσεις έχουν διαφορετικές στήλες αληθοτιμών (λόγω της παραδοχής που κάναμε παραπάνω), τότε υπάρχουν στο σύνολο αυτό τόσες προτάσεις όσοι και αληθοπίνακες σε n προτασιακές μεταβλητές. Ομως ένας αληθοπίνακας για n προτασιακές μεταβλητές είναι μία αντιστοίχιση των τιμών 0, 1 σε μία n-άδα αποτελούμενη από 0 και 1. Υπάρχουν 2^n n-άδες αποτελούμενες από 0 και 1 (= αποτιμήσεις των μεταβλητών $p_1, p_2, ..., p_n$). Υπάρχουν 2^{2^n} δυνατές αντιστοιχίσεις από 0 και 1 σε όλες τις δυνατές n-άδες που αποτελούνται από 0 και 1. Δηλαδή υπάρχουν το πολύ 2^{2^n} προτάσεις που οι φτιάχνονται χρησιμοποιώντας προτασιακές μεταβλητές **μεταξύ** των $p_1, p_2, ..., p_n$ Αρα υπάρχει πεπερασμένο πλήθος προτάσεων σε κάθε Σ_n.

Ψάχνουμε μία αποτίμηση που θα κάνει όλες τις προτάσεις του Σ αληθείς. Θα εμφανίσουμε τις αποτιμήσεις μεταβλητών ως μονοπάτια ενός δυαδικού δένδρου. Η ζητούμενη αποτίμηση θα προκύψει ως ένα άπειρο κλαδί αυτού του δένδρου. Αυτό γίνεται ως εξής:

Μία μεταβλητή μπορεί να πάρει τις τιμές 0 ή 1 κατά την αποτίμηση. Ετσι οι δυνατές αποτιμήσεις των δύο πρώτων μεταβλητών p_1, p_2 αποτυπώνονται στο δυαδικό δένδρο (με μια κορυφή που αυθαίρετα ονομάζουμε K)



όπου το μονοπάτι $(K, 0, 0)$ αντιστοιχεί στην αποτίμηση $v(p_1) = 0,\ v(p_2) = 0$ ενώ το μονοπάτι $(K, 0, 1)$ αντιστοιχεί στην αποτίμηση $v(p_1) = 0,\ v(p_2) = 1$ κλπ. Φυσικά αναπαριστώντας έτσι όλες τις δυνατές αποτιμήσεις του συνόλου των μεταβλητών $p_1, p_2, ...$ παίρνουμε ένα άπειρο δένδρο T. Υπάρχουν αποτιμήσεις που κάνουν όλες τις προτάσεις του Σ_n αληθείς. Αυτό συμβαίνει γιατί το Σ_n είναι πεπερασμένο υποσύνολο του Σ. Για κάθε πεπερασμένο πλήθος n μεταβλητών υπάρχουν λοιπόν μονοπάτια (ενδεχομένως περισσότερα από ένα) που ικανοποιούν τις προτάσεις του Σ_n.

Θεωρούμε την ένωση όλων αυτών των μονοπατιών. Θα μας δώσουν ένα υποδένδρο του T. Το υποδένδρο αυτό θα έχει αυθαίρετα μεγάλα κλαδιά. Επομένως θα έχει έναν άπειρο κλάδο, σύμφωνα με το λήμμα του König, το οποίο θα διατυπώσουμε και θα δείξουμε παρακάτω για την ειδική περίπτωση που μας απασχολεί εδώ, δηλαδή των δυαδικών δένδρων. Αυτός ο κλάδος αντιπροσωπεύει μία δυνατή αποτίμηση του συνόλου των μεταβλητών $p_1, p_2, ...$ Η αποτίμηση αυτή κάνει αληθείς όλες τις προτάσεις που φτιάχνονται διαδοχικά από τις μεταβλητές p_1, από τις μεταβλητές $p_1, p_2, ...$, από τις μεταβλητές $p_1, p_2, ..., p_n$ και ούτω καθεξής. Εν τέλει κάνει αληθείς όλες τις προτάσεις του Σ. ∎

1.1.2 Λήμμα. *Αν ένα δυαδικό δένδρο έχει αυθαίρετα μακρείς κλάδους τότε έχει έναν άπειρο κλάδο.*

Απόδειξη: Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν από μια κορυφή K_n του δυαδικού δένδρου περνούν αυθαίρετα μακρείς κλάδοι τότε το ίδιο θα συμβαίνει και για μία κορυφή ακριβώς από κάτω από την προηγούμενη. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις: Ή κάτω από τη δοθείσα κορυφή βρίσκεται μία μόνο κορυφή, ή βρίσκονται δύο κορυφές K_{n+1}, K'_{n+1}. Στην πρώτη περίπτωση το συμπέρασμα είναι άμεσο. Στη δεύτερη περίπτωση, αν δεν ισχύει το συμπέρασμα, τότε ας πούμε ότι οι κλάδοι κάτω από την K_{n+1} έχουν μήκος το πολύ n_1 και ότι οι κλάδοι κάτω από την K'_{n+1} έχουν μήκος το πολύ n_2. Τότε δεν υπάρχει κλάδος που να διέρχεται από την K_n που να έχει μήκος μεγαλύτερο από το $\max(n_1, n_2) + 1$ -άτοπο. Αρα ο ισχυρισμός μας είναι σωστός.

Ετσι λοιπόν, ξεκινώντας από την κορυφή K του δένδρου, βρίσκουμε μια ακολουθία κορυφών $K, K_1, K_2, ..., K_n, ...$ από τις οποίες διέρχονται αυθαίρετα μακρείς κλάδοι. Επομένως βρίσκουμε ένα άπειρο κλαδί σε αυτό το δένδρο. ∎

1.2 Μερικές συνέπειες του Θεωρήματος

Πέρα από τις σοβαρές μαθηματικές συνέπειες του Θεωρήματος του Συμπαγούς, στις οποίες αναφερθήκαμε στην αρχή της προηγούμενης ενότητας (και οι οποίες προϋποθέτουν την σχετική εκδοχή του Θεωρήματος για την Κατηγορηματική Λογική - πράγμα δυσκολώτερο να αποδειχθεί), μπορούμε να δούμε μία σειρά από απλούστερες συνέπειες. Οι συνέπειες αυτές είναι απλά πορίσματα του Θεωρήματος. Θα μπορούσαν να ειδωθούν ως ασκήσεις πάνω στο βασικό αποτέλεσμα. Κάποιες από αυτές έχουν κάποιο θεωρητικό ενδιαφέρον. Προσδιορίζουν καλλίτερα το χαρακτήρα της έννοιας της ταυτολογικής συνέπειας, του ανεξάρτητου συνόλου προτάσεων κλπ. Αλλες απλώς δίνουν απαντήσεις σε ενδιαφέροντες γρίφους.

Βλέποντας τα πράγματα από τη σκοπιά κάποιου που έχει εκτεθεί στον Προτασιακό Λογισμό, της τυπικής απόδειξης και του Θεωρήματος Πληρότητας για τον Προτασιακό Λογισμό, η παρακάτω παρατήρηση φαίνεται απλή:

1.2.1 Πρόταση. *Μία πρόταση είναι ταυτολογική συνέπεια ενός συνόλου προτάσεων αν και μόνο αν είναι ταυτολογική συνέπεια ενός πεπερασμένου υποσυνόλου του.*

Σχόλιο: Πράγματι, από τη σκοπιά του Θεωρήματος Πληρότητας η παρατήρηση είναι σχεδόν τετριμμένη. Μια πρόταση σ είναι ταυτολογική συνέπεια ενός συνόλου προτάσεων Σ αν και μόνο αν υπάρχει τυπική απόδειξη του σ από το Σ. Ομως μια τέτοια απόδειξη είναι πάντα πεπερασμένη. Αρα η πρόταση σ είναι ταυτολογική συνέπεια του συνόλου προτάσεων Σ αν και μόνο αν υπάρχει τυπική απόδειξη του σ από το Σ, αν και μόνο αν υπάρχει τυπική απόδειξη του σ από ένα πεπερασμένο πλήθος προτάσεων του Σ, αν και μόνο αν η σ είναι ταυτολογική συνέπεια ενός πεπερασμένου πλήθους προτάσεων του Σ. Μπορούμε όμως να δώσουμε την παρακάτω απόδειξη που παρακάμπτει το Θεώρημα Πληρότητας:

Απόδειξη: Θυμίζουμε το Θεώρημα 2.5 του βιβλίου, σύμφωνα με το οποίο $\Sigma \models \sigma$ αν και μόνο αν το σύνολο $\Sigma \cup \{\neg\sigma\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο. Εχουμε λοιπόν τώρα ότι, για το ενδεχομένως άπειρο σύνολο Σ, το $\Sigma \cup \{\neg\sigma\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο. Από το Θεώρημα του Συμπαγούς βρίσκουμε ότι υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο Ξ του $\Sigma \cup \{\neg\sigma\}$, το οποίο δεν είναι ικανοποιήσιμο. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις: Η το Ξ είναι της μορφής $\Sigma' \cup \{\neg\sigma\}$, για κάποιο πεπερασμένο υποσύνολο Σ' του Σ ή το Ξ δεν περιέχει την $\neg\sigma$ και ταυτόχρονα δεν είναι ικανοποιήσιμο. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε τελειώσει: Ξανά από το Θεώρημα 2.5, η σ είναι ταυτολογική συνέπεια του πεπερασμένου Σ'. Στη δεύτερη περίπτωση η σ είναι ταυτολογική συνέπεια του Ξ, αφού δεν υπάρχει αποτίμηση που να ικανοποιεί το Ξ και να μην ικανοποιεί το σ (απλούστατα, γιατί δεν υπάρχει αποτίμηση που να ικανοποιεί το Ξ!). ∎

Αντίστοιχου χαρακτήρα είναι και η παρακάτω εφαρμογή που πραγματεύεται την έννοια του ανεξάρτητου συνόλου προτάσεων. Θυμίζουμε ότι ένα σύνολο προτάσεων Σ λέγεται ανεξάρτητο αν, για κάθε πρόταση $\sigma \in \Sigma$, δεν ισχύει $\Sigma - \{\sigma\} \models \sigma$ (δηλαδή η κάθε πρόταση δεν είναι συνέπεια των υπολοίπων προτάσεων του συνόλου).

1.2.2 Πρόταση. *Ενα σύνολο προτάσεων Σ είναι ανεξάρτητο αν και μόνο αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του είναι ανεξάρτητο.*

Απόδειξη: Προφανώς αν ένα σύνολο προτάσεων είναι ανεξάρτητο τότε και κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του είναι ανεξάρτητο. Διαφορετικά θα είχαμε πως μια πρόταση σ του Σ θα ήταν ταυτολογική συνέπεια ενός πεπερασμένου πλήθους προτάσεων $\sigma_1, ..., \sigma_n$ του Σ, οπότε ούτε το Σ θα ήταν ανεξάρτητο.

Αντίστροφα, αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του Σ είναι ανεξάρτητο και πάρουμε μία οποιαδήποτε πρόταση $\sigma \in \Sigma$ τότε, για οποιοδήποτε πεπερασμένο σύνολο προτάσεων $\{\sigma_1, ..., \sigma_n\}$, έχουμε $\{\sigma_1, ..., \sigma_n\} \not\models \sigma$ (διαφορετικά το

$\{\sigma_1, ..., \sigma_n, \sigma\}$ δεν θα ήταν ανεξάρτητο). Οπως παραπάνω, το Θεώρημα 2.5 του βιβλίου δίνει ότι το σύνολο $\{\sigma_1, ..., \sigma_n, \neg\sigma\}$ είναι ικανοποιήσιμο. Αυτό συμβαίνει για κάθε επιλογή πεπερασμένου συνόλου προτάσεων του Σ που είναι διαφορετικές από τη σ. Δηλαδή συμβαίνει ότι για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο Ξ του $(\Sigma - \{\sigma\}) \cup \{\neg\sigma\}$, το Ξ είναι ικανοποιήσιμο. Από το θεώρημα του Συμπαγούς έπεται ότι το $(\Sigma - \{\sigma\}) \cup \{\neg\sigma\}$ είναι ικανοποιήσιμο. Αρα, ξανά από το Θεώρημα 2.5 του βιβλίου, έπεται ότι $(\Sigma - \{\sigma\}) \not\models \sigma$. Αυτό γίνεται για οποιαδήποτε πρόταση του Σ, άρα το Σ είναι ανεξάρτητο. ∎

Κλείνουμε τη συζήτηση γύρω από το Θεώρημα του Συμπαγούς με μία «εφαρμογή» στη Θεωρία Γραφημάτων και ειδικώτερα τον χρωματισμό χαρτών. Φυσικά είναι σαφές ότι δεν πρόκειται για γνήσια εφαρμογή αφού δε μας ενδιαφέρουν ιδιαίτερα τα άπειρα γραφήματα και αφ′ εταίρου δεν υπάρχει πρακτικά τρόπος να ελέγξει κανείς όλα τα πεπερασμένα γραφήματα ενός άπειρου γραφήματος:

1.2.3 Πρόταση. *Ενα γράφημα είναι n-χρωματικό αν και μόνο αν όλα τα πεπερασμένα υπογραφήματά του είναι n-χρωματικά.*

Απόδειξη: Ας είναι $\{v_i \mid i \in I\}$ το σύνολο των κορυφών του γραφήματος και $\{1, ..., n\}$ το σύνολο των χρωμάτων. Θεωρούμε το σύνολο των προτασιακών μεταβλητών $\{p_{i,j} \mid i \in I,\ 1 \leq j \leq n\}$ και $\{q_{i,k} \mid i, k \in I\}$. Η πρόθεσή μας είναι η πρόταση $p_{i,j}$ να λέει «η κορυφή v_i έχει χρώμα j» και η $q_{i,k}$ να λέει ότι «η κορυφή v_i γειτονεύει με την κορυφή v_j»

Θεωρούμε το σύνολο Σ των προτάσεων:

(1) $p_{i,1} \vee ... \vee p_{i,n}$, για κάθε $i \in I$.

(2) $p_{i,j_1} \wedge \neg p_{i,j_2}$, για κάθε $i \in I$ και $j_1 \neq j_2$

(3) $(p_{i,j} \wedge q_{i,k}) \rightarrow \neg p_{k,j}$, για κάθε $i, k \in I,\ 1 \leq j \leq n$.

Διαβάζουμε τις παραπάνω προτάσεις σαν να λένε: Οι της ομάδας (1) ότι κάθε κορυφή v_i έχει ένα χρώμα από τα $1, ..., n$. Οι της ομάδας (2) ότι μία κορυφή έχει ένα μόνο χρώμα. Οι της ομάδας (3) ότι κορυφές που γειτονεύουν έχουν διαφορετικό χρώμα.

Τότε κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του Σ είναι ικανοποιήσιμο. Αυτό συμβαίνει γιατί όποιο τέτοιο σύνολο κι αν μας δωθεί μπορούμε να βρούμε αποτίμηση α που το ικανοποιεί: Αρκεί, αν εμπλέκονται ένα πεπερασμένο πλήθος από i και k στο σύνολο αυτών των προτάσεων, να θέσουμε $\alpha(p_{i,j}) = 1$ αν η κορυφή v_i έχει χρώμα j και $\alpha(p_{i,j}) = 0$, διαφορετικά, και $\alpha(q_{i,k}) = 1$ αν η κορυφή v_i γειτονεύει με την v_k και $\alpha(q_{i,k}) = 0$, διαφορετικά. Είναι δυνατόν να βρούμε τέτοια αποτίμηση ακριβώς επειδή το γράφημα που απαρτίζεται από τις κορυφές v_i και v_k, όπου τα i και k εμφανίζονται στο δοσμένο πεπερασμένο υποσύνολο, είναι n-χρωματικό. Από το Θεώρημα του Συμπαγούς προκύπτει ότι το Σ είναι ικανοποιήσιμο. Αν όμως τώρα υπάρχει αποτίμηση που κάνει όλες τις προτάσεις του Σ αληθείς τότε ολόκληρο το γράφημα είναι n-χρωματικό.

1.3 Ασκήσεις

1. Εστω ένα σύνολο προτάσεων Σ, τέτοιο ώστε για κάθε εκτίμηση αλήθειας v υπάρχει μια πρόταση $\sigma \in \Sigma$ με $v(\sigma) = 1$. Δείξτε οτι υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\} \subseteq \Sigma$ τέτοιο ώστε η πρόταση $\sigma_1 \vee \sigma_2 \vee \ldots \vee \sigma_n$ να είναι ταυτολογία.

Λύση: Εστω οτι δεν υπάρχει τέτοιο πεπερασμένο υποσύνολο, δηλ. για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του Σ ισχύει οτι, η πρόταση $\sigma_1 \vee \sigma_2 \vee \ldots \vee \sigma_n$ δεν είναι ταυτολογία. Υπάρχει τότε εκτίμηση αλήθειας v με $v(\sigma_1 \vee \sigma_2 \vee \ldots \vee \sigma_n) = 0$, άρα $v(\neg(\sigma_1 \vee \sigma_2 \vee \ldots \vee \sigma_n)) = 1 \Rightarrow v(\neg\sigma_1 \wedge \neg\sigma_2 \wedge \ldots \wedge \neg\sigma_n) = 1$.
Αρα θα πρέπει $v(\neg\sigma_i) = 1$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Η εκτίμηση αλήθειας v ικανοποιεί το σύνολο $\{\neg\sigma_1, \neg\sigma_2, \ldots, \neg\sigma_n\}$.
Στη συνέχεια, θεωρώ το σύνολο $\neg\Sigma = \{\neg\sigma \ / \ \sigma \in \Sigma\}$, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα Συμπάγειας, επειδή κάθε πεπερασμένο υποσυνολό του είναι ικανοποιήσιμο, άρα όλο το σύνολο $\neg\Sigma$ είναι ικανοποιήσιμο. Οπότε υπάρχει εκτίμηση αλήθειας v τέτοια ώστε $v(\tau) = 1$ όπου $\tau \in \neg\Sigma$, δηλ.
$v(\neg\sigma) = 1 \Rightarrow v(\sigma) = 0$, $\forall\sigma \in \Sigma$, άτοπο, γιατί ξεκινήσαμε με την υπόθεση οτι για κάθε εκτίμηση αλήθειας v υπάρχει $\sigma \in \Sigma$ με $v(\sigma) = 1$.

Κεφάλαιο 2

Η ΓΛΩΣΣΑ ΤΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ ΤΩΝ ΚΑΤΗΓΟΡΗΜΑΤΩΝ

2.1 Η γλώσσα της λογικής των κατηγορημάτων

Στο κεφάλαιο αυτό, καθώς και στα επόμενα, σκοπεύουμε να εξετάσουμε και να αναλύσουμε από λογική σκοπιά τη μαθηματική γλώσσα, όπως αυτή εκφέρεται στη συνηθισμένη, καθημερινή μαθηματική πρακτική. Η μέθοδός μας θα παραμείνει μαθηματική, όπως και στα προηγούμενα κεφάλαια. Θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε τον τρόπο που εκφραζόμαστε στα μαθηματικά με τρόπο τόσο συγκεκριμένο και καλά ορισμένο, ώστε η ίδια η συνηθισμένη μαθηματική έκφραση να μπορεί να γίνει αντικείμενο μαθηματικής μελέτης. Η μαθηματική γλώσσα θα προσπαθηθεί να προσδιοριστεί τόσο τυπικά που ακόμα κι ένας υπολογιστής να μπορεί να αναγνωρίσει κάποια ακολουθία συμβόλων ως καλά σχηματισμένη φράση της μαθηματικής γλώσσας. Ολα εκείνα τα μέσα που μπορεί να έχει η γλώσσα στην οποία εκφραζόμαστε για κάποιο μαθηματικό αντικείμενο θέλουμε τώρα να τα κωδικοποιήσουμε σε μία γενική μορφή που να επιτρέπει μία μελέτη από ενιαία σκοπιά των διαφορετικών μαθηματικών αντικειμένων και την αναγνώριση κάποιων κοινών γνωρισμάτων τους. Τα πλεονεκτήματα μίας τέτοιας προσέγγισης μπορεί να αρχίσουν να φαίνονται στο τελευταίο κεφάλαιο του παρόντος βιβλίου. Μπορούμε εδώ να πούμε ότι χωρίζονται σε δύο είδη: Από τη μία πλευρά μπορούμε να έχουμε μία εντελώς μαθηματική διαπραγμάτευση ερωτημάτων όπως του τί συνιστά απόδειξη στα μαθηματικά, τί συνιστά μαθηματική αλήθεια, τί είναι αξιωματικό σύστημα κλπ. Από την άλλη πλευρά, από μία τέτοια αφηρημένη προσέγγιση, όπως αυτή που υιοθετούμε εδώ, προκύπτουν ενδιαφέροντα γενικά αποτελέσματα που όταν εξειδικευτούν σε συγκεκριμένες μαθηματικές περιοχές δίνουν είτε μαθηματικές αλήθειες που δεν είχαν γίνει νωρίτερα αντιληπτές, είτε νέες γενικές αποδείξεις γνωστών μαθηματικών θεωρημάτων.

Συνήθως στα μαθηματικά μιλάμε, κάθε φορά, για ένα συγκεκριμένο πράγμα. Αυτό μπορεί να γίνεται στα πλαίσια μελέτης ενός συγκεκριμένου μαθηματικού αντικειμένου θεωρητικού χαρακτήρα, ας πούμε της γεωμετρίας του επιπέδου ή της θεωρίας των πραγματικών αριθμών ή της θεωρίας συνόλων ή της θεωρίας των φυσικών αριθμών (αριθμητικής) ή, διαφορετικά, μελετώντας κάποιο φαινόμενο από μαθηματική σκοπιά, για παράδειγμα τα στοιχεία μίας βάσης δεδομένων και διάφορες συσχετίσεις τους. Σε κάθε περίπτωση υπάρχουν κάποιες οντότητες τις οποίες μελετάμε (σημεία ή ευθείες του επιπέδου, πραγματικοί αριθμοί, σύνολα, πελάτες μίας εταιρείας κλπ) και στις οποίες θέλουμε να αναφερθούμε με έναν γενικό τρόπο, εξετάζοντας συσχετίσεις που μπορεί να τις αφορούν, εκτελώντας πράξεις που εφαρμόζονται ανάμεσα σε τυχαίες τέτοιες οντότητες, κάθε φορά. Ο τρόπος που έχει επικρατήσει στα μαθηματικά να αναφερόμαστε σε γενικές οντότητες είναι μέσω των μεταβλητών. Κάθε φορά λοιπόν που μιλάμε για ένα μαθηματικό αντικείμενο συνήθως εκφραζόμαστε μέσω των μεταβλητών, οι οποίες δηλώνουν τις οντότητες που μας ενδιαφέρουν. Βολεύει να έχουμε ένα απεριόριστο σύνολο τέτοιων, ώστε κάθε φορά που χρειαζόμαστε ένα νέο όνομα για κάποια γενική οντότητα που μελετάμε να υπάρχει κάποιο διαθέσιμο. Ο γενικός τρόπος έκφρασης στα πλαίσια μιας μαθηματικής θεωρίας έχει και κάποια ακόμα χαρακτηριστικά γνωρίσματα: Είναι συνηθισμένο να μιλάμε για πράξεις που ορίζονται μεταξύ οποιωνδήποτε οντοτήτων (πχ. πρόσθεση μεταξύ πραγματικών αριθμών) και σχέσεις που τις αφορούν (πχ. ανισότητα μεταξύ φυσικών αριθμών, ένα σύνολο να ανήκει σε ένα άλλο). Επίσης συνηθίζεται να αναφερόμαστε με ξεχωριστό τρόπο σε συγκεκριμένες οντότητες, οι οποίες παίζουν έναν ιδιαίτερο ρόλο στη θεωρία που μελετάμε. Για παράδειγμα, μεταξύ των πραγματικών αριθμών, ιδιαίτερη θέση μπορεί να κατέχει το 0, εξ αιτίας του γεγονότος ότι είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης, ή αντίστοιχα το 1, για ανάλογους λόγους.

Μας ενδιαφέρει, περαιτέρω, να αναλύσουμε τις εκφράσεις που συνήθως εκφέρουμε όταν μελετάμε ένα μαθηματικό αντικείμενο. Ας ανακαλέσουμε εδώ τί μορφή έχουν συνήθως οι εκφράσεις αυτές: Συχνά αναφερόμαστε σε συσχετίσεις οντοτήτων. Λέμε, για παράδειγμα, ο αριθμός x είναι θετικός (δηλαδή ≥ 0), ή ότι ο αριθμός x διαιρεί το αν αριθμό y, ή ότι η ποσότητα $x^2 - 1$ παίρνει αρνητικές τιμές, ή ότι το στοιχείο x ανήκει στο σύνολο y, ή ότι το σύνολο x περιέχει ως υποσύνολο το σύνολο y, ή ότι η ευθεία x πουπροκύπτει ως τομή των επιπέδων ϵ και δ είναι παράλληλη στην ευθεία y κλπ. Συχνά συνδυάζουμε τέτοιες εκφράσεις με τη βοήθεια λογικών συνδέσμων. Λέμε, για παράδειγμα, ότι αν ο αριθμός x είναι μικρότερος του 1, τότε η ποσότητα $x^2 - 1$ παίρνει αρνητικές τιμές, ή ότι αν ο αριθμός p είναι πρώτος και διαιρεί ένα γινόμενο αριθμών $x.y$, τότε είτε θα διαιρεί τον x είτε θα διαιρεί τον y, κλπ. Ακόμα, συχνά αναφερόμαστε στην ύπαρξη μίας οντότητας με κάποια ιδιότητα ή στο γεγονός ότι κάτι ισχύει για όλες τις οντότητες. Λέμε, για παράδειγμα, ότι υπάρχει κάποιο σύνολο που δεν έχει κανένα στοιχείο, ή ότι για όλα τα x η ποσότητα x^2+1 είναι πάντοτε θετική. Θα κωδικοποιήσουμε λοιπόν σε μία γενική μορφή όχι μόνο τα εκφραστικά μέσα που συνήθως χρησιμοποιούμε όταν μιλάμε για τα μαθηματικά αλλά και τη μορφή που έχουν οι εκφράσεις της γλώσσας όταν μιλάμε για τα μαθηματικά. Ας παρατηρήσουμε εδώ ότι, ανάλογα με το αντικείμενο που μας απασχολεί, χρησιμοποιούμε διαφορετικά εκφραστικά μέσα. Αν μας ενδιαφέρει η γεωμετρία του χώρου δεν έχει νόημα να διαθέτουμε στα εκφραστικά μας μέσα τη σχέση της διαιρετότητας ανάμεσα σε φυσικούς αριθμούς. Αναφερόμαστε λοιπόν κάθε φορά σε **μία** γλώσσα για κάποιο αντικείμενο. Μία γλώσσα που έχει τα εκφραστικάμέσα που προσπαθήσαμε να περιγράψουμε παραπάνω λέμε ότι είναι μία γλώσσα της **λογικής των κατηγορημάτων** (= ιδιοτήτων, σχέσεων) Συνοψίζουμε λοιπόν:

2.1.1 Ορισμός. Μια γλώσσα της λογικής των κατηγορημάτων $\mathcal{L}$, περιλαμβάνει τα ακόλουθα στοιχεία:

(I) Τα λογικά σύμβολα

- **(i) Μεταβλητές:** $x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots\}$ (αριθμήσιμο πλήθος).
- **(ii) Λογικοί σύνδεσμοι:** $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- **(iii) Ποσοδείκτες:** $\forall$ (καθολικός), $\exists$ (υπαρξιακός).
- **(iv) Ισότητα:** $=$
- **(v) Βοηθητικά σύμβολα:** παρενθέσεις (,) και σημεία στίξης όπως το κόμμα , κ.λ.π.

(Τα λογικά σύμβολα μιας γλώσσας της λογικής των κατηγορημάτων παραμένουν τα ίδια ανεξάρτητα απότο αντικείμενο στο οποίο αναφερόμαστε.)

(II) Μη - λογικά σύμβολα.

- **(i) Σχεσιακά σύμβολα** $\{R_i; i \in I\}$
- **(ii) Σύμβολα συναρτήσεων:** $\{f_j; j \in J\}$
- **(iii) Σύμβολα σταθερών:** $\{c_k : k \in K\}$

(Τα μη λογικά σύμβολα αναφέρονται σε κάποιο συγκεκριμένο αντικείμενο.)

Παρατήσεις: 1. Όλα τα πιο πάνω σύμβολα υποτίθεται ότι είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Κάποια από τα παραπάνω σύνολα μη - λογικών συμβόλων μπορεί να είναι το κενά σύνολα. Θεωρούμε επίσης ότι το κάθε σχεσιακό και το κάθε συναρτησιακό σύμβολο έρχονται εφοδιασμένα με την πληροφορία του αριθμού των ορισμάτων στα οποία εφαρμόζονται (αν δηλαδή είναι μονομελή, διμελή, τριμελή, κλπ). Αποφεύγουμε να εμφανίζουμε αυτήν την πληροφορία πάνω στο σύμβολο για να μη γίνονται πιο δυσχρηστα ως σύμβολα.

2. Συχνά αντί για τα σύμβολα $x_1, x_2, ...$ κλπ, θα χρησιμοποιούμε για να δηλώσουμε τις μεταβλητές τα συνηθισμένα x, y, z, u, $w, ...$, κλπ.

3. Επειδή τα λογικά σύμβολα είναι κοινά για κάθε γλώσσα, αυτό που διακρίνει μια γλώσσα είναι τα μη - λογικά σύμβολα. Υπό αυτήν την έννοια αποτελούν και την **χαρακτηριστική** της γλώσσας. Λέμε ακόμα ότι αποτελούν τον **οπλισμό** ή **τύπο ομοιότητας** της γλώσσας.

Θα κτίσουμε σταδιακά τις εκφράσεις της γλώσσας, όπως αυτές εκφέρονται στη μαθηματική πρακτική. Οπως διευκρινίσαμε νωρίτερα στα μαθηματικά μιλάμε για οντότητες που είτε δίνονται γενικά ως μεταβλητές (π.χ ο αριθμός x), ως συγκεκριμένα στοιχεία συνόλων (π.χ ο αριθμός 1) ή ως συνδυασμοί μεταξύ τους μέσω πράξεων (π.χ ο αριθμός $x^2 + y^2 + 1$). Αυτή τη γενική έννοια οντότητας, στην οποία συνήθως αναφερόμαστε, συλλαμβάνει ο επόμενος ορισμός.

2.1.2 Ορισμός. Το σύνολο $\mathrm{Term}(\mathcal{L})$ των **όρων** της $\mathcal{L}$ είναι το ελάχιστο σύνολο που παράγεται από την εφαρμογή των ακόλουθων κανόνων:

(i) Οι μεταβλητές και τα σύμβολα σταθερών είναι όροι, δηλαδή, $x_i \in \mathrm{Term}(\mathcal{L}), i = 1, 2, \ldots$ και $c_k \in \mathrm{Term}(\mathcal{L})$, για κάθε $k \in K$.

(ii) Αν $t_1, \ldots t_n \in \mathrm{Term}(\mathcal{L})$, και f είναι συναρτησιακό σύμβολο που δέχεται n ορίσματα τότε,

$$f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{Term}(\mathcal{L}).$$

Προχωράμε στην περιγραφή των εκφράσεων που μπορούμε να εκφέρουμε για τις μαθηματικές οντότητες. Οπως και στον προηγούμενο ορισμό, κτίζουμε σταδιακά αυτές τις εκφράσεις περιγράφοντας ολοένα και πιό πολύπλοκες τέτοιες.

2.1.3 Ορισμός. Το σύνολο των τύπων $\mathrm{Form}(\mathcal{L})$ της $\mathcal{L}$ είναι το ελάχιστο σύνολο που παράγεται από την εφαρμογή των ακόλουθων κανόνων:

(i) **Ατομικοί ή Στοιχειώδεις Τύποι**. Αν R είναι σχεσιακό σύμβολο που επιδέχεται n ορίσματα και $t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{Term}(\mathcal{L})$ τότε,

$$R(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$$

και,

$$t_1, t_2 \in \mathrm{Term}(\mathcal{L}) \ \text{ τότε} t_1 = t_2 \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$$

(ii) Σύνθετοι Τύποι.

(α) Αν $\varphi,\ \psi \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$, τότε $(\varphi)\Box(\psi) \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$ όπου $\Box \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

(β) Αν $\phi \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$ τότε $\neg(\varphi) \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$

(γ) Αν για κάθε μεταβλητή x, ο φ είναι τύπος της $\mathcal{L}$ τότε και οι σχηματισμοί,

$$\forall x(\varphi) \quad \text{και} \quad \exists x(\varphi) \quad \text{είναι τύποι της } \mathcal{L}$$

Παραδείγματα: Ολα τα παρακάτω είναι παραδείγματα τύπων σε μία κατάλληλη γλώσσα, όπως προκύπτει από την περιγραφή που κάναμε (μάλιστα οι τέσσερεις πρώτοι είναι ατομικοί τύποι):

$$R(x,x), \quad x_1 = x_2, \quad x_1^2 + x_1^2 + 1 \leq 0, \quad x_1 + x_2 + 1 = x_2^2 + x_3^2,$$

$$R(x,x) \wedge R(y,y), \quad R(x_1,x_2) \vee (x_1 = x_2), \quad (x = x) \rightarrow (0 = 1),$$

$$(R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z), \quad (x \in y) \vee (y \in x), \quad \exists x(x = x), \quad \exists z(x \in y),$$

$$\neg(x = x) \rightarrow \forall x(z \in y), \quad \forall x(x.x \geq 0), \quad \forall x \exists y(y.y = x),$$

$$\exists x \forall y(\neg(u = w)), \quad (x|y \vee \exists p(\neg(p|x) \wedge \neg(p|y)), \quad x = x \wedge \forall x(x = x),$$

$$\forall x(x = 0 \vee \exists y(x.y = 1)), \quad \forall x(\exists y(x.y = 1) \vee \exists z((1-x).z = 1))$$

(όπου R, $|$ είναι κάποια σχεσιακά σύμβολα που παρέχει η εκάστοτε γλώσσα.)

Αντίθετα ακολουθίες συμβόλων όπως οι

$$x(x.y = 1), \quad 1)(x \leq 0), \quad (1 = 0) \rightarrow R, \quad (x \wedge (y \leq z)) \rightarrow (x \leq 0), \quad \forall 0(0 \leq x)$$

δεν αποτελούν παραδείγματα τύπων, αφού για μιά σειρά λόγων δεν εμπίπτουν στον παραπάνω ορισμό. Για τέτοιου είδους εκφράσεις λέμε ότι **δεν** αποτελούν **καλά σχηματισμένους τύπους**.

Παρατήρηση: Ο παραπάνω είναι ένας **επαγωγικός ορισμός** της έννοιας του τύπου, ανάλογος αυτού που είδαμε για την έννοια της πρότασης στα πλαίσια της λογικής των προτάσεων. Κατά αντιστοιχία με την προτασιακή λογική, όταν θέλουμε να αποδείξουμε έναν ισχυρισμό που να αφορά σε όλους τους τύπους μπορούμε να επιχειρηματολογούμε επαγωγικά: Να δείχνουμε, δηλαδή, ότι ο ισχυρισμός αληθεύει προκειμένου για τους ατομικούς τύπους και στη συνέχεια, δεχόμενοι ότι ο ισχυρισμός αληθεύει για τύπους φ και ψ, να δείχνουμε ότι ο ισχυρισμός αληθεύει για τους τύπους $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \to \psi$, $\neg\varphi$, $\forall x\varphi$, $\exists x\varphi$.

2.2 Ελεύθερες και δεσμευμένες εμφανίσεις μεταβλητών

Ο ορισμός των τύπων που υιοθετήσαμε είναι αναγκαίος για να μιλήσουμε για τις εκφράσεις της καθημερινής μαθηματικής πρακτικής με αρκετή γενικότητα. Ομως, όπως δείχνουν πολλά από τα παραδείγματα στο τέλος της προηγούμενης ενότητας, ο ορισμός αυτός αφήνει περιθώριο στο να συμπεριλάβουμε στον ορισμό του τύπου περιπτώσεις όπως οι $\exists z(x \in y)$, $\neg(x = x) \to \forall x(z \in y)$, ή ο $\forall x(0 = 1)$, που δε βγάζουν και τόσο μαθηματικό νόημα. Η ουσία του προβλήματος έγκειται στο ότι διάφοροι ποσοδείκτες εμφανίζονται και αναφέρονται σε μεταβλητές που δεν παίζουν ρόλο στη φράση που ακολουθεί, ενώ αντίθετα στη φράση που ακολουθεί τον ποσοδείκτη χρησιμοποιούνται μεταβλητές στις οποίες δεν αναφέρονται οι ποσοδείκτες της έκφρασης. Το πρώτο ελάττωμα πουδιαπιστώνουμε δεν είναι τόσο σημαντικό. Στο παράδειγμα $\forall x(0 = 1)$ αναγνωρίζουμε όλοι μία ψευδή έκφραση, όσο κι αν είναι ασυνήθιστη για την ‘‘καθομιλουμένη’’ μαθηματική γλώσσα. Στο παράδειγμα $\neg(x = x) \to \forall x(z \in y)$ έχουμε μεγαλύτερο πρόβλημα γιατί δεν έχουμε αίσθηση αν μία τέτοια δήλωση πρέπει να την αντιλαμβανόμαστε ως αλήθεια ή ως ψέμα, ανεξάρτητα του αντικειμένου στο οποίο αναφέρονται. Παρακάτω αντιμετωπίζουμε αυτά το προβλήματα. Σκοπός μας είναι να απαλείψουμε από το αντικείμενο της μελέτης μας εκείνες τις δηλώσεις που δεν αναγνωρίζουμε ως αληθείς ή ψευδείς, αναφορικά με κάποιο μαθηματικό πεδίο.

Για να διατυπώσουμε με ακρίβεια την κεντρική έννοια που θα μας απασχολήσει εδώ χρειαζόμαστε να ξεκαθαρίσουμε τι εννοούμε όταν λέμε ‘‘υποτύπος ενός τύπου’’. Αυτό προκύπτει από τον επαγωγικό ορισμό των τύπων: Υποτύποι ενός πολυπλοκώτερου τύπου είναι οι απλούστεροι τύποι που μετέχουν στην κατασκευή του πιο πολύπλοκου. Ετσι, για παράδειγμα, υποτύποι του $\varphi \wedge \psi$ είναι οι φ, ψ καθώς και οι υποτύποι αυτών. Υποτύποι του $\exists x\varphi$ είναι ο φ και οι υποτύποι του φ, κλπ. Αντί να δώσουμε αναλυτικό ορισμό, ας δούμε αναλυτικά ένα παράδειγμα: Υποτύποι του

$$\forall x \exists y((R(x,y) \wedge S(z,y)) \to \exists z R(x,z))$$

(όπου R, S είναι δύο διμελή σχεσιακά σύμβολα) είναι οι

$$\exists y((R(x,y) \wedge S(z,y)) \to \exists z R(x,z)),$$

$$(R(x,y) \wedge S(z,y)) \to \exists z R(x,z), \quad \exists z R(x,z),$$

$$R(x,z), \quad R(x,y) \wedge S(z,y), \quad R(x,y), \quad S(z,y).$$

2.2.1 Ορισμός. Η εμβέλεια (scope) ενός ποσοδείκτη εντός ενός τύπου φ είναι ο υποτύπος ψ που ξεκινά μετά τη μεταβλητή που ακολουθεί τον ποσοδείκτη, αρχίζει με αριστερή παρένθεση και τελειώνει με την αντίστοιχη δεξιά παρένθεση.

Για παράδειγμα στον τύπο $\forall x(\varphi \wedge \psi)$ η εμβέλεια του $\forall x$ είναι ο τύπος $\phi \wedge \psi$, ενώ στον τύπο $\forall x(\phi) \wedge \psi$ η εμβέλεια του $\forall x$ είναι ο υποτύπος ϕ. Στον τύπο

$$R(x,y,z) \wedge \exists u(((S(x,y) \vee R(x,y,u)) \to \forall z(S(x,z) \vee \exists u R(x,z,u)))$$

η εμβέλεια του πρώτου $\exists u$ είναι ο υποτύπος

$$((S(x,y) \vee R(x,y,u)) \to \forall z(S(x,z) \vee \exists u R(x,z,u)),$$

η εμβέλεια του δεύτερου $\exists u$ είναι ο υποτύπος $R(x,z,u)$, ενώ η εμβέλεια του $\forall z$ είναι ο υποτύπος

$$S(x,z) \vee \exists u R(x,z,u).$$

2.2.2 Ορισμός. Η εμφάνιση μιας μεταβλητής x στον τύπο ϕ θα λέγεται **δεσμευμένη** ή φραγμένη αν εμφανίζεται στους ποσοδείκτες $\forall x$, $\exists x$ ή βρίσκεται στην εμβέλεια των ποσοδεικτών $\forall x$, $\exists x$ εντός του τύπου φ. Σε αντίθετη περίπτωση μια εμφάνιση της μεταβλητής x στον τύπο φ λέγεται **ελεύθερη**. Ενα τύπος λέγεται **πρόταση** αν δεν περιέχει καθόλου ελεύθερες εμφανίσεις μεταβλητών. Οι έννοιες της δεσμευμένης και της ελεύθερης μεταβλητής μπορούν να οριστούν αυστηρά με επαγωγικό τρόπο.

Παρατήρηση: Οι έννοια της ελεύθερης μεταβλητής μπορεί να οριστεί και με επαγωγικό τρόπο: Ολες οι εμφανίσεις μεταβλητών σε έναν ατομικό τύπο είναι ελέυθερες. Οι ελεύθερες εμφανίσεις μεταβλητών στους τύπους $\neg\varphi$ είναι οι ίδιες με αυτές στον φ, ελεύθερες εμφανίσεις μεταβλητών στον τύπο $\varphi \wedge \psi$ είναι η ένωση των ελεύθερων εμφανίσεων μεταβλητών στους τύπους φ και ψ, το ίδιο και με τους τύπους $\varphi \vee \psi$, $\varphi \to \psi$. Τέλος οι ελεύθερες εμφανίσεις στους $\forall x\varphi$, $\exists x\varphi$ είναι οι ίδιες με αυτές στον φ εκτός από την x.

Παράδειγμα: Η εμφάνιση της μεταβλητής x είναι ελεύθερη στους τύπους: $x = c,\ (x = c) \to \forall x(x = c)$ ενώ στους τύπους

$$\forall x\, \forall y(R(x, y) \to R(y, x)), \quad \forall x\, \exists y\ (y = f(x))$$

είναι δεσμευμένη. Στον τύπο

$$\forall x(\exists y R(x, y, z) \vee \forall u S(u, x)) \to R(x, x, u)$$

ελεύθερες εμφανίσεις της μεταβλητής x είναι εκείνες στον υποτύπο $R(x, x, u)$ (και οι άλλες είναι δεσμευμένες), η y δεν έχει ελεύθερη εμφάνιση, η z έχει μόνο ελεύθερη εμφάνιση ενώ η u έχει ελεύθερη την εμφάνιση στον υποτύπο $R(x, x, u)$ και δεσμευμένη στον $S(u, x)$.

2.3 Παραδείγματα γλωσσών στα μαθηματικά

Ερχόμαστε στο πιό κρίσιμο κομμάτι αυτού του κεφαλαίου. Θέλουμε να δούμε συγκεκριμένα παραδείγματα τυπικών γλωσσών. Θέλουμε δηλαδή να επικεντρώσουμε την προσοχή μας σε διάφορα συγκεκριμένα μαθηματικά αντικείμενα, να δούμε τί είδους εκφράσεις εκφέρουμε συνήθως στα πλαίσια της μελέτης τους και, στο τέλος, να δούμε πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε εντελώς τυπικές γλώσσες, στα πλαίσια των οποίων εκφραζόμαστε. Αυτές, αφενός θα έχουν τα μέσα για να εκφρέρουμε τις συνηθισμένες εκφράσεις της μαθηματικής πρακτικής, αφεταίρου θα έχουν τα χαρακτηριστικά που θέσαμε στα πλαίσια της παραπάνω συζήτησης. Το λεπτό σημείο σε κάθε παράδειγμα που θα θεωρήσουμε είναι το να προσδιορίσουμε ακριβώς τα διαθέσιμα εκφραστικά μέσα. Θέλουμε κάθε φορά να είναι αρκετά πλούσια ώστε να μπορούμε να εκφράζουμε συνηθισμένες ιδιότητες, προτάσεις κλπ. Από την άλλη πλευρά, θέλουμε να είμαστε αρκετά οικονομικοί ως προς τα εκφραστικά μας μέσα ώστε να μην έχουμε μέσα που είναι άχρηστα ως προς αυτό που θέλουμε να πούμε. Επιπλέον όσο πιο οικονομικοί είμαστε στην τυπική έκφραση τόσο πιο πολλές γενικές αρχές εφαρμόζονται στην ειδική περιοχή που μελετάμε (αυτό μπορεί να γίνει κάπως καλλίτερα κατανοητό στο τελευταίο κεφάλαιο).

Η γλώσσα των πραγματικών αριθμών Εδώ θα επικεντρώσουμε λίγο την προσοχή μας στη γλώσσα, στην οποία εκφράζουμε τη βασική θεωρία των πραγματικών αριθμών, όπως τη διδασκόμαστε στο Λύκειο. Θέλουμε να εκφράσουμε τα βασικά αλγεβρικά χαρακτηριστικά των πραγματικών αριθμών, τις βασικές πράξεις και τις βασικές ανισότητες ανάμεσά τους. Αυτές με τις σειρά τους μας επιτρέπουν να εκφράσουμε μία σειρά από έννοιες της ανάλυσης, όπως το όριο και τη συνέχεια μίας συνάρτησης. Παρολαυτά δεν είναι καθαυτή η ανάλυση που είναι εδώ στο επίκεντρο. Αυτό δημιουργεί μία διαφορά στο ποιές είναι οι βασικές πράξεις και σχέσεις ανάμεσα στους πραγματικούς αριθμούς, τις οποίες θέλουμε να τυποποιήσουμε. Ετσι λοιπόν θεωρούμε ως βασικά εκφραστικά μέσα τα εξής:

- Συναρτησιακά σύμβολα: Δύο διμελή συναρτησιακά σύμβολα $+$, $.$ (τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού) κι ένα μονομελές συναρτησιακό σύμβολο $-$ (την πράξη του αντιθέτου).
- Σχεσιακά σύμβολα: Ενα διμελές σχεσιακό σύμβολο $\leq$, τη σχέση της ανισότητας.
- Σύμβολα σταθερών: Δύο σύμβολα σταθερών, τα 0 και 1.

Αν στο επίκεντρο της μελέτης μας ήταν πιό βαθειά θέματα της ανάλυσης μπορεί, ενδεχομένως, να θέλαμε να έχουμε διαθέσιμα κι άλλα συναρτησιακά σύμβολα, όπως ας πούμε σύμβολα για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις (μονομελή, που θα περιγράφουν την απεικόνιση $x \mapsto \text{συν}(x)$) ή για την εκθετική συνάρτηση ($x \mapsto e^x$). Ισως, επίσης, να θέλαμε κι άλλα σύμβολα σταθερών, όπως τα π και e.

Ποιές βασικές αλήθειες γύρω από τους πραγματικούς αριθμούς θα μπορούσε να εκφράσει κανείς με αυτά τα σύμβολα; Ας δούμε μερικές:

$$\forall x \forall y \forall z\ ((x+y)+z = x+(y+z)),\ \forall x \forall y \forall z\ ((x.y).z = x.(y.z))$$

$$\forall x \forall y\ (x+y = y+x),\ \forall x \forall y\ (x.y = y.x)$$

$$\forall x\ (x+0 = x),\ \forall x\ (x.1 = x)$$

$$\forall x\ (x+(-x) = 0)$$

$$\forall x \forall y \forall z\ (x.(y+z) = x.y + x.z)$$

$$\forall x\ (x = 0\ \vee\ \exists y\ (x.y = 1))$$

$$\forall x (x \leq x)\ ,\ \forall x \forall y ((x \leq y \wedge y \leq x) \to x = y)$$

$\forall x \forall y \forall z\ ((x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z)$

$\forall x \forall y\ (x \leq y \vee y \leq x)$

$\forall x \forall y\ (x \leq y \rightarrow \exists z(x \leq z \wedge z \leq y))$

$\forall x \forall y \forall z\ (x \leq y \rightarrow (x + z \leq y + z))$

$\forall x \forall y \forall z\ ((x \leq y \wedge 0 \leq z) \rightarrow (x.z \leq y.z))$

Ολοι οι παραπάνω τύποι είναι προτάσεις που, αν θεωρήσουμε ότι μιλάμε για τους πραγματικούς αριθμούς, τις θεωρούμε αληθείς.

Η γλώσσα της ευκλείδιας γεωμετρίας του επιπέδου

Η γλώσσα της αριθμητικής

Η γλώσσα της θεωρίας συνόλων

Η γλώσσα της θεωρίας των ομάδων

Η γλώσσα της θεωρίας των δακτυλίων

2.4 Ασκήσεις

1. Γράψτε στη γλώσσα της αριθμητικής τύπους συνώνυμους με τις παρακάτω φράσεις:

(i) Κάθε άρτιος αριθμός είναι το άθροισμα δύο πρώτων

(ii) Ο μέγιστος κοινός διαιρέτης δύο αριθμών x, y είναι ο z.

Λύση:

(i) Για κάθε x, αν ο x άρτιος υπάρχουν πρώτοι αριθμοί y, z ώστε $x = y + z$
$\forall x(\text{άρτιος}(x) \longrightarrow \exists y \exists z(\text{πρώτος}(y) \wedge \text{πρώτος}(z) \wedge x = y + z))$
όπου:
$\text{άρτιος}(x) = \exists r(x = 2r)$
$\text{πρώτος}(y) = \forall t(\exists k(tk = y) \longrightarrow (t = 1) \vee (t = y))$
$\text{πρώτος}(z) = \forall t(\exists k(tk = z) \longrightarrow (t = 1) \vee (t = z))$

(ii) ο z διαιρεί τον x και ο z διαιρεί τον y και αν υπάρχει k ώστε ο k να διαιρεί τον x και ο k να διαιρεί τον y τότε ο k διαιρεί τον z.
$\exists r(zr = x) \wedge \exists t(zt = y) \wedge \forall k(\exists r'(kr' = x) \wedge \exists t'(kt' = y)) \longrightarrow \exists m(km = z)$

Κεφάλαιο 3

ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ ΤΩΝ ΚΑΤΗΓΟΡΗΜΑΤΩΝ

3.1 Ορισμός της αλήθειας

Στο προηγούμενο κεφάλαιο προσπαθήσαμε να αναδείξουμε τα κοινά γνωρίσματα που έχουν οι γλώσσες στις οποίες εκφραζόμαστε στα πλαίσια της συνηθισμένης μαθηματικής δραστηριότητας. Η έμφαση δόθηκε στο να αναλύσουμε αυτά τα κοινά γνωρίσματα από τη σκοπιά της σύνταξης της γλώσσας. Μας ενδιέφεραν πράγματα που είχαν να κάνουν με τον τρόπο γραφής των τύπων, το σωστό σχηματισμό τους, την ελεύθερη εμφάνιση μεταβλητών κλπ, πράγματα που δεν έχουν να κάνουν με το αντικείμενο στο οποίο οι τύποι αυτοί αναφέρονται, με τις αλήθειες (ή τα ψεύδη) που προσπαθούν να εκφράσουν. Εδώ θα αποπειραθούμε να αποκαταστήσουμε την επαφή με το εκάστοτε αντικείμενο του (μαθηματικού) ενδιαφέροντός μας. Θα προσπαθήσουμε δηλαδή στους αποστεομένους τύπους της γλώσσας να δώσουμε νόημα και να εξετάσουμε κατά πόσο εκφράζουν πράγματα που είναι αληθή για ένα πεδίο αναφοράς.

Κάποιες τυπικές εκφράσεις στα πλαίσια μίας γλώσσας με συγκεκριμένα μη - λογικά σύμβολα αποκτούν νόημα αν θεωρήσουμε ότι αναφέρονται στα στοιχεία ενός συγκεκριμένου συνόλου, όπου τα δεδομένα μη - λογικά σύμβολα αποκτούν κάποια έννοια και δηλώνουν πράξεις ή σχέσεις, που γνωρίζουμε ότι ορίζονται σε αυτό το σύνολο. Παραδείγματος χάρη, η έκφραση

$$\forall x\, \forall y\, \forall z\, (f(f(x,y),z) = f(x, f(y,z))),$$

αν σκεφτόμαστε το σύμβολο f ως μια αλγεβρική πράξη, ας πούμε την πρόσθεση, μπορεί να πάρει τη σημασία ''για κάθε τρείς αριθμούς x, y, z, το άθροισμα $(x+y)+z$ ισούται με το άθροισμα $x+(y+z)$'', κάτι που αναγνωρίζουμε ως μία αλήθεια είτε προκειμένου για την πρόσθεση των φυσικών αριθμών, είτε για αυτήν των μιγαδικών αριθμών, είτε για μια σειρά άλλων ''δομών'' που έχουν μια προσεταιριστική πράξη. Το ίδιο θα ίσχυε και για μία έκφραση όπως η

$$\forall x \, \forall y \, ((f(x,c) = x)),$$

αν σκεφτόμαστε το σύμβολο f με τον ίδιο τρόπο και το σύμβολο c ως το ουδέτερο στοιχείο ως προς την πρόσθεση οποιουδήποτε από τα παραπάνω σύνολα.

Αντιλαμβανόμαστε ότι αυτό κατ΄ αρχήν έχει να κάνει με το γεγονός ότι οι μεταβλητές δηλώνουν στοιχεία του ενός ή του άλλου συνόλου, κατά περίπτωση. Οι μεταβλητές λοιπόν πρέπει να αναφέρονται σε **ένα** συγκεκριμένο σύνολο κάθε φορά. Εν συνεχεία, όπως προκύπτει από τα παραδείγματα, τα συναρτησιακά σύνολα θα θέλαμε να δηλώνουν πράξεις ανάμεσα σε στοιχεία αυτού του συνόλου, τα σχεσιακά σύμβολα να δηλώνουν σχέσεις πάλι πάνω στο ίδιο σύνολο και τα σύμβολα σταθεράς να δηλώνουν διακεκριμμένα στοιχεία αυτού του συνόλου.

Εστω λοιπόν, γενικώτερα, $\mathcal{L}$ μια γλώσσα με χαρακτηριστική

$$(\{R_1, R_2, ...\}, \{f_1, f_2, ...\}, \{c_1, c_2, ...\}),$$

όπου τα στοιχεία των τριών συνόλων δηλώνουν, αντίστοιχα, τα σχεσιακά, τα συναρτησιακά και τα σύμβολα σταθερών της γλώσσας.

3.1.1 Ορισμός. Λέμε ότι η συλλογή

$$\mathcal{A} = (A, \{\tilde{R}_1, \tilde{R}_2, ...\}, \{\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, ...\}, \{\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, ...\})$$

είναι μία **δομή** για τη γλώσσα $\mathcal{L}$ με φορέα το σύνολο A αν

- Οι $\tilde{R}_i \subseteq A \times ... \times A$ είναι σχέσεις, τόσων μεταβλητών όσα είναι και τα ορίσματα στα οποία εφαρμόζεται το σύμβολο R_i (θυμηθείτε ότι αυτή είναι μία πληροφορία που φέρει μαζί του το σύμβολο κι ότι δεν εμφανίζεται στη γραφή του μόνο για να μη βαρύνουμε το συμβολισμό).

- Οι $\tilde{f}_j$ είναι συναρτήσεις $A \times ... \times A \longrightarrow A$, τόσων μεταβλητών όσα είναι και τα ορίσματα στα οποία εφαρμόζεται το σύμβολο f_j

- Τα $\tilde{c}_k$ είναι διακεκριμμένα στοιχεία του συνόλου A.

Η συνολική απεικόνιση, $R_i \mapsto \tilde{R}_i$, $f_j \mapsto \tilde{f}_j$ και $c_k \mapsto \tilde{c}_k$ λέγεται μια $\mathcal{A}$-**ερμηνεία** της $\mathcal{L}$.

Παρατήρηση: Η έννοια της δομής και της ερμηνείας μίας γλώσσας, όπως αποτυπώνονται στον παραπάνω ορισμό έχουν έναν πολύ γενικό χαρακτήρα. Μπορεί δηλαδή η τυπική γλώσσα να προορίζεται να μιλήσει για κάποιο αντικείμενο αλλά να βρίσκουμε δομές γι αυτήν τη γλώσσα σε πολύ διαφορετικές περιοχές των μαθηματικών από αυτές που μπορεί να έχουμε κατά νου. Αν, για παράδειγμα, έχουμε μία γλώσσα με ένα μόνο διμελές σχεσιακό σύμβολο (κανένα άλλο μη - λογικό σύμβολο), το οποίο προορίζεται να παίξει το ρόλο της διάταξης ανάμεσα σε πραγματικούς αριθμούς, τότε δομή γι αυτήν τη γλώσσα μπορεί να συνιστά το σύνολο των φυσικών αριθμών με τη σχέση της διαιρετότητας ανάμεσά τους. Καταλαβαίνουμε ότι αυτό που δημιουργεί την ουσιαστική διάκριση μεταξύ των δύο είναι το τί προτάσεις αληθεύουν στη μία ή την άλλη δομή (το σύνολο των πραγματικών αριθμών με τη διάταξή τους από τη μία πλευρά, οι φυσικοί αριθμοί με τη διαιρετότητα, από την άλλη).

Το ζητούμενο λοιπόν είναι να δώσουμε νόημα στις τυπικές εκφράσεις της γλώσσας, έτσι ώστε να μπορούμε με ξεκάθαρο τρόπο να εξηγήσουμε με ποιά έννοια, για παράδειγμα, η πρόταση

$$\forall x\, \forall y\, (R(x,y) \vee R(y,x))$$

είναι αλήθεια αν $R(x,y)$ σημαίνει ότι ''ο πραγματικός αριθμός x είναι μικρότερος ή ίσος από τον πραγματικό αριθμό y'' αλλά δεν είναι αλήθεια αν σημαίνει ότι ''ο φυσικός αριθμός x διαιρεί τον φυσικό αριθμό y''. Αυτό πλέον έχει να κάνει με την απόδοση τιμής αλήθειας σε εκφράσεις της γλώσσας, ανάλογα με το αν αντιστοιχούν σε ''πραγματικά'' ή όχι γεγονότα μέσα στο πεδίο στο οποίο αναφερόμαστε, δεδομένου του τρόπου με τον οποίο έχουμε ερμηνεύσει τα σύμβολα της γλώσσας. Καλούμαστε επομένως να δώσουμε έναν ακριβή ορισμό του τί σημαίνει πως η τυπική εκφραση φ ισχύει μέσα σε ένα πεδίο αναφοράς ή όχι. Αυτός ο ορισμός πρέπει να εφαρμόζεται σε όλες τις καλά σχηματισμένες εκφράσεις της γλώσσας με την οποία εκφραζόμαστε, δηλαδή σε όλους τους τύπους της γλώσσας. Υπάρχει όμως μία τεχνικού χαρακτήρα δυσκολία στι να δώσουμε έναν τέτοιο ορισμό. Η δυσκολία αυτή έχει να κάνει με το γεγονός ότι οι τύποι μπορεί να έχουν ελεύθερες μεταβλητές. Μολονότι στο επίπεδο της συνηθισμένης πρακτικής αυτό που μας ενδιαφέρει είναι να δώσουμε τιμές αλήθειας στις προτάσεις της γλώσσας, ο ορισμός είναι δύσκολο να δωθεί μόνο σχετικά με τις προτάσεις αφού αυτό που χτίσαμε βήμα - βήμα στην προηγούμενη ενότητα είναι οι τύποι, μεταξύ δε αυτών ξεχωρίσαμε τις προτάσεις. Η εφαρμογή ενός ποσοδείκτη μπορεί να μετατρέπει έναν τύπο με ελεύθερες μεταβλητή φ στην πρόταση $\forall x \varphi$ κι είναι αδύνατο να αναλύσουμε την αλήθεια αυτής της πρότασης με βάση την απλούστερη έκφραση φ αν δεν έχουμε έναν τρόπο να αναγνωρίζουμε την ''αλήθεια'' του τύπου φ. Λέμε ''αλήθεια'' (εντός εισαγωγικών) γιατί αναμένουμε πως αυτή δε μπορεί να έχει έναν εντελώς καθορισμένο χαρτακτήρα αν δεν ξέρουμε για ποιές τιμές των ελεύθερα εμφανιζόμενων μεταβλητών μιλάμε. Για παράδειγμα η έκφραση

$$\exists y\ (g(y, y) = x)$$

μπορεί να είναι αλήθεια αν αναφερόμαστε στους πραγματικούς αριθμούς, g δηλώνει τον πολλαπλασιασμό δύο αριθμών και $x = 2$, ενώ είναι ψέμα αν, υπό τις ίδιες προϋποθέσεις, είναι $x = -2$.

Θα χρησιμοποιήσουμε μία ενδιάμεση έννοια ''σχετικής αλήθειας'' που θα καταλαβαίνουμε ως ''ο τύπος φ αληθεύει για τη δομή $\mathcal{A}$ αν δώσουμε στις μεταβλητές τις τάδε τιμές''. Αυτήν την τελευταία διαδικασία του να ''δώσουμε στις μεταβλητές τις τάδε τιμές'' μπορούμε, πολύ φυσιολογικά από μαθηματική άποψη, να την περιγράψουμε μέσω μίας συνάρτησης που θα έχει ως ορίσματα μεταβλητές και ως τιμές στοιχεία του συνόλου - φορέα της δομής $\mathcal{A}$,

$$v\colon \mathrm{Var} \to A$$

(Var είναι το σύνολο των μεταβλητών της γλώσσας, A είναι το σύνολο - φορέας της δομής $\mathcal{A}$). Θα ορίσουμε λοιπόν (βήμα - βήμα, όπως περιγράψαμε τους τύπους της γλώσσας) μία σχέση

$$\mathcal{A} \models_v \varphi,$$

που θα διαβάζουμε: η δομή $\mathcal{A}$ ικανοποιεί τον τύπο φ αναφορικά με την αποτίμηση μεταβλητών v). Πριν φτάσουμε δε αυτόν τον ορισμό ας προσέξουμε το εξής: Κάποιες εκφράσεις της γλώσσας περιέχουν ενδεχομένως συνθετώτερους όρους, ας θεωρήσουμε, φερ΄ ειπείν την παραλλαγή του προηγούμενου παραδείγματος

$$\exists y\ (g(y, y) = f(f(x, c), x)),$$

όπου g δηλώνει τον πολλαπλασιασμό δύο αριθμών και $x = 2$, όπως πριν, f δηλώνει την πρόσθεση δύο πραγματικών αριθμών και c δηλώνει το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού, δηλαδή τον αριθμό 1. Τότε για να αποφανθούμε αν είναι αλήθεια η παραπάνω δήλωση δεν αρκεί να ξέρουμε τι τιμή θα πάρει η μεταβλητή x αλλά και όλη η έκφραση (δηλαδή ο όρος) $f(f(x, c), x)$. Καταλαβαίνουμε ότι ο όρος είναι ο $(x+1)+x$ και παίρνει την τιμή $(2+1)+2$ αν $x = 2$ (οπότε η δήλωση είναι αληθής) ενώ παίρνει την τιμή $((-1) + 1) + (-1) = -1$ αν $x = -1$ (οπότε η δήλωση δεν είναι αληθής). Γενικεύοντας, αν t είναι ένας τυχαίος όρος της γλώσσας και v είναι μία αποτίμηση μεταβλητών, μπορούμε να αποδίδουμε τιμές (=στοιχεία του συνόλου A) στον t, ανάλογα με την v. Επεκτείνουμε λοιπόν τη συνάρτηση v σε μία

$$\hat{v}\colon \mathrm{Term} \to A$$

(όπου Term είναι το σύνολο των όρων της γλώσσας). Αυτό γίνεται επαγωγικά ως εξής:

3.1.2 Ορισμός. **(i)** Αν ο όρος t συμπίπτει με μια μεταβλητή $x \in \mathrm{Var}$, τότε $\hat{v}(t) := v(x)$. Επίσης αν $t = c$ (c ένα σύμβολο σταθεράς της γλώσσας), τότε $\hat{v}(t) := \tilde{c}$ (θυμίζουμε ότι $\tilde{c}$ είναι η ερμηνεία του συμβόλου σταθεράς c στη δομή $\mathcal{A}$).

(ii) Αν $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ τότε $\hat{v}(t) = \tilde{f}(\hat{v}(t_1), \ldots \hat{v}(t_n))$ (θυμίζουμε ότι $\tilde{f}$ είναι η ερμηνεία του συναρτησιακού συμβόλου f στη δομή $\mathcal{A}$).

Εχοντας ορίσει την ερμηνεία των μη-λογικών και των λογικών συμβόλων καθώς επίσης και των όρων της γλώσσας, επανερχόμαστε στον επαγωγικό ορισμό της σχέσης

$$\mathcal{A} \models_v \varphi$$

Λέγοντας ''επαγωγικό ορισμό'' της σχέσης εννοούμε ότι θα την ορίσουμε πρώτα για την περίπτωση των απλούστερων δυνατών τύπων (δηλαδή των ατομικών τύπων), όπου έχουμε πολύ καλή ιδέα ως προς το τί πρέπει να σημαίνει η σχέση. Αν, ας πούμε, $R(t_1, t_2)$ δηλώνει τη συσχέτιση δύο όρων, οι όροι γίνονται αντιληπτοί (=ερμηνεύονται) ως πραγματικοί αριθμοί και το σχεσιακό σύμβολο ως ανισότητα, τότε ο τύπος ικανοποιείται, αν οι τιμή που παίρνει ο όρος t_1 είναι μικρότερη ή ίση από την τιμή που παίρνει ο t_2. Στη συνέχεια θα την ορίσουμε για συνθετότερους τύπους με τρόπο που αντανακλά την κοινή λογική. Για παράδειγμα, θα πούμε ότι μια σύζευξη τύπων ικανοποιείται (δηλαδή είναι ένας ισχυρισμός που αληθεύει αναφορικά με το πεδίο που εξετάζουμε) αν και τα δύο κομμάτια της σύζευξης ικανοποιούνται. Ο ορισμός αυτός έχει λοιπόν δύο χαρακτηριστικά: Πρώτον, έχει αναγωγικό χαρακτήρα (ανάγει την αλήθεια μίας συνθετότερης έκφρασης στην αλήθεια των συστατικών της κομματιών). Δεύτερον, η σύνθεση της αλήθειας των μερών μίας έκφρασης γίνεται με τρόπο ώστε να αντανακλάται η λειτουργία των συνδέσμων στην καθημερινή χρήση της γλώσσας, στην κοινή λογική (η αλήθεια δύο συστατικών μερών μίας έκφρασης συνδυάζεται με το ''είτε'' της καθομιλουμένης για να μας δώσει την αλήθεια της τυπικής διάζευξης των συστατικών μερών). Αυτή η απλή σύλληψη της αναγωγής της έννοιας της αλήθειας, στα πλαίσια μίας τυπικής γλώσσας, στην αλήθεια των συστατικών, έτσι ώστε να αντανακλάται η κοινή χρήση του ''και'', του ''είτε'', του 'όχι'', του ''για κάθε'' κλπ, οφείλεται στον Πολωνό φιλόσοφο και μαθηματικό A. Tarski και αποτέλεσε κομβικό σημείο στην ανάπτυξη της τυπικής - λογικής μεθόδου στην ανάλυση των μαθηματικών αλλά και άλλων από τις λεγόμενες ''ακριβείς επιστήμες''.

3.1.3 Ορισμός. **(i)** Αν ο τύπος φ είναι ατομικός, της μορφής $R(t_1, ..., t_m)$ τότε $\mathcal{A} \models_v R(t_1, ..., t_m)$ αν και μόνο αν η m-άδα $(\hat{v}(t_1), ..., \hat{v}(t_m))$ ανήκει στη σχέση $\tilde{R}$.

(ii) Αν ο τύπος φ είναι ο $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ τότε $\mathcal{A} \models_v \varphi_1 \wedge \varphi_2$ αν και μόνο αν

$$\mathcal{A} \models_v \varphi_1 \quad \text{και} \quad \mathcal{A} \models_v \varphi_2$$

(iii) Αν ο τύπος φ είναι ο $\varphi_1 \vee \varphi_2$ τότε $\mathcal{A} \models_v \varphi_1 \vee \varphi_2$ αν και μόνο αν

$$\mathcal{A} \models_v \varphi_1 \quad \text{είτε} \quad \mathcal{A} \models_v \varphi_2$$

(iv) Αν ο τύπος φ είναι ο $\varphi_1 \to \varphi_2$ τότε $\mathcal{A} \models_v \varphi_1 \to \varphi_2$ αν και μόνο αν

$$\text{αν} \quad \mathcal{A} \models_v \varphi_1 \quad \text{τότε} \quad \mathcal{A} \models_v \varphi_2$$

(v) Αν ο τύπος φ είναι ο $\neg\varphi_1$ τότε $\mathcal{A} \models_v \neg\varphi_1$ αν και μόνο αν

$$\text{δεν ισχύει ότι} \quad \mathcal{A} \models_v \varphi_1$$

(vi) Αν ο τύπος φ είναι ο $\exists x \varphi_1$ τότε $\mathcal{A} \models_v \exists x \varphi_1$ αν και μόνο αν

$$\text{υπάρχει} \quad v_1 \quad \text{ώστε} \quad \mathcal{A} \models_{v_1} \varphi_1,$$

όπου v_1 είναι μία αποτίμηση μεταβλητών, που δίνει σε όλες τις μεταβλητές, εκτός ίσως από την x, τις ίδιες τιμές με την v.

(vii) Αν ο τύπος φ είναι ο $\forall x \varphi_1$ τότε $\mathcal{A} \models_v \forall x \varphi_1$ αν και μόνο αν

$$\text{για κάθε} \quad v_1 \quad \mathcal{A} \models_{v_1} \varphi_1$$

όπου v_1 είναι μία αποτίμηση μεταβλητών, που δίνει σε όλες τις μεταβλητές, εκτός ίσως από την x, τις ίδιες τιμές με την v.

Παρατηρήσεις: 1. Χρειάζεται κάποιο σχόλιο για τα τελευταία δύο σημεία του ορισμού, που αναφέρονται στους ποσοδείκτες. Είναι κοινώς κατανοητό πως όταν λέμε ότι αληθεύει, προκειμένου για τους φυσικούς αριθμούς, η έκφραση $\forall x\ R(c, x)$ (όπου αντιλαμβανόμαστε το σύμβολο σταθεράς c ως τον αριθμό 1 και το σχεσιακό σύμβολο R ως "διαιρεί") , εννοούμε πως ότι τιμή κι αν δώσουμε στο x το 1 θα διαιρεί το x. Εδώ άλλες μεταβλητές δεν εμφανίζονται. Ελέγχουμε λοιπόν την αλήθεια της έκφρασης μόνο αναφορικά με το τι γίνεται αν δώσουμε όλες τις δυνατές τιμές στο x. Αν όμως εμφανίζονταν στην έκφραση $\forall x\psi$ άλλες 15 μεταβλητές (και μάλιστα ελεύθερα στον τύπο ψ) θα λέγαμε: ο τύπος $\forall x\psi$ αληθεύει (για δεδομένες τιμές των υπολοίπων 15 μεταβλητών) αν αληθεύει για κάθε δυνατή τιμή του x ο τύπος ψ (δεδομένων των τιμών των υπολοίπων 15 μεταβλητών». Η χρήση των αποτιμήσεων των μεταβλητών στις δύο αυτές τελευταίες περιπτώσεις του ορισμού έχει το πλεονέκτημα ότι μας αποδεσμεύει από το να νοιαζόμαστε για τις συγκεκριμένες τιμές των υπολοίπων μεταβλητών (πράγμα πολύπλοκο, ειδικά όταν οι λοιπές εμφανιζόμενες μεταβλητές είναι πολλές).

2. Η μεταβλητή x στους τύπους $\forall x\psi$ και $\exists x\psi$ μπορεί να εμφανίζεται ή να μην εμφανίζεται ελεύθερα στον τύπο ψ. Ο παραπάνω ορισμός μας εξασφαλίζει τη δυνατότητα να κάνουμε τον τυπικό έλεγχο της αλήθειας ενός τύπου και στις δυο περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση, είδαμε πώς λειτουργεί ο ορισμός στην παραπάνω παρατήρηση. Στη δεύτερη περίπτωση, αν ο τύπος ψ αναγνωρίζεται ως αληθής (π.χ ο τύπος $\forall z\ R(c,z)$, ερμηνευμένος όπως στην παρατήρηση 1), τότε αληθεύει και ο $\forall x\ \forall z\ R(c,z)$, αφού πράγματι, ότι τιμή κι αν πάρει η x ο τύπος $\forall z\ R(c,z)$ ικανοποιείται στους φυσικούς αριθμούς.

Θα δώσουμε τώρα ένα θεώρημα που μας επιτρέπει έναν πολύ πιο εύκολο χειρισμό του παραπάνω ορισμού. Στην ουσία διατυπώνει με επίσημο τρόπο αυτό που (ελπίζουμε) έγινε κατανοητό από όλη την προηγούμενη συζήτηση, ότι δηλαδή η τιμή αλήθειας ενός τύπου εξαρτάται μόνο από την αποτίμηση των μεταβλητών που εμφανίζονται ελεύθερα σε αυτόν. Η απόδειξη του αξίζει προσοχής, αφού είναι ενδεικτική του τρόπου που επιχειρηματολογούμε συνήθως, με επαγωγή ως προς την πολυπλοκότητα των τύπων, προκειμένου να αποδείξουμε ισχυρισμούς που αναφέρονται σε τυχαίους τύπους.

3.1.4 Θεώρημα. *Εστω ότι φ είναι ένας τύπος στη γλώσσα της λογικής των κατηγορημάτων και v, v' είναι δύο αποτιμήσεις μεταβλητών σε μία ερμηνεία $\mathcal{A}$, οι οποίες συμφωνούν σε όλες τις ελέυθερες μεταβλητές του φ. Τότε $\mathcal{A} \models_v \varphi$ αν και μόνο αν $\mathcal{A} \models_{v'} \varphi$*

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο μήκος των τύπων.

Ας προσπαθήσουμε λοιπόν στην αρχή να αποδείξουμε τον ισχυρισμό μας για ατομικούς τύπους. Αυτοί έχουν τη μορφή $R(x_1, ..., x_n)$, όπου R είναι ένα σχεσιακό σύμβολο της γλώσσας. Γράφουμε $\widetilde{R}$ για την ερμηνεία του σχεσιακού αυτού συμβόλου στη δομή $\mathcal{A}$. Τότε αν είναι $v(x_1) = a_1$, ..., $v(x_n) = a_n$, οπότε είναι και $v'(x_1) = a_1$, ..., $v'(x_n) = a_n$, αφού οι δύο αποτιμήσεις μεταβλητών συμφωνούν στις ελεύθερες μεταβλητές του τύπου, έχουμε, με βάση τον ορισμό της ικανοποιησιμότητας σε μία εμηνεία:

$$\begin{array}{rll} \mathcal{A} \models_v R(x_1,...,x_n) & \text{αν και μόνο αν} & (a_1,...,a_n) \in \tilde{R} \\ & \text{αν και μόνο αν} & \mathcal{A} \models_{v'} R(x_1,...,x_n) \end{array}$$

Προχωράμε στην περίπτωση που ο τύπος είναι της μορφής $\varphi_1 \wedge \varphi_2$. Δεχόμαστε ότι η υπόθεση ισχύει για τους τύπους φ_1, φ_2. Επομένως έχουμε

$$\begin{array}{rll} \mathcal{A} \models_v \varphi_1 \wedge \varphi_2 & \text{αν και μόνο αν} & \mathcal{A} \models_v \varphi_1 \quad \text{και} \quad \mathcal{A} \models_v \varphi_2 \\ \text{(από την επαγωγική υπόθεση)} & \text{αν και μόνο αν} & \mathcal{A} \models_{v'} \varphi_1 \quad \text{και} \quad \mathcal{A} \models_{v'} \varphi_2 \\ & \text{αν και μόνο αν} & \mathcal{A} \models_{v'} \varphi_1 \wedge \varphi_2 \end{array}$$

Ομοίως προχωράμε και στην περίπτωση των άλλων συνδέσμων, αν δηλαδή ο φ είναι της μορφής $\varphi_1 \vee \varphi_2$, $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$, ή $\neg\psi$. Ενδεικτικά, για την τελευταία περίπτωση έχουμε:

$$\begin{array}{rll} \mathcal{A} \models_v \neg\psi & \text{αν και μόνο αν} & \text{δεν ισχύει ότι} \mathcal{A} \models_v \psi \\ \text{(από την επαγωγική υπόθεση)} & \text{αν και μόνο αν} & \text{δεν ισχύει ότι} \mathcal{A} \models_{v'} \psi \\ & \text{αν και μόνο αν} & \mathcal{A} \models_{v'} \neg\psi \end{array}$$

Κλείνουμε με το λιγότερο τετριμμένο βήμα της απόδειξης, που έχει να κάνει με την περίπτωση των ποσοδεικτών, δηλαδή με την περίπτωση που ο φ είναι, ας πούμε, της μορφής $\exists x\psi$ (η περίπτωση του καθολικού ποσοδείκτη είναι ίδια). Εστω λοιπόν ότι έχουμε $\mathcal{A} \models_v \exists x\psi$. Αυτό σημαίνει, με βάση τον ορισμό της ικανοποιησιμότητας ως προς την αποτίμηση μεταβλητών v, ότι υπάρχει μία αποτίμηση μεταβλητών w, η οποία συμφωνεί με την v σε όλες τις ελεύθερες μεταβλητές του τύπου $\exists x\psi$ έτσι ώστε $\mathcal{A} \models_w \psi$. Οι ελεύθερες μεταβλητές του τύπου $\exists x\psi$ είναι αυτές του ψ, εκτός ίσως από την x. Θα φτιάξουμε λοιπόν μία αποτίμηση μεταβλητών w' με τις εξής δύο ιδιότητες: Αφ΄ ενός θα συμφωνεί με τη v' στις ελεύθερες μεταβλητές του τύπου $\exists x\psi$, αφ΄ εταίρου δε θα συμφωνεί με την w στις ελεύθερες μεταβλητές του τύπου ψ. Ορίζουμε την αποτίμηση αυτή ως εξής:

$$w'(z) = \begin{cases} v'(z), & z \neq x \\ w(z), & z = x \end{cases} \tag{3.1}$$

Πράγματι η συνάρτηση αυτή έχει τις δύο ιδιότητες που θέλουμε. Γιατί, είπαμε ότι οι ελεύθερες μεταβλητές του τύπου $\exists x\psi$ είναι αυτές του ψ, εκτός ίσως από την x, είναι δηλαδή, σε κάθε περίπτωση, διαφορετικές από την x. Σε μία τέτοια μεταβλητή z έχουμε $w'(z) = v'(z)$, από τον ορισμό. Ικανοποιείται λοιπόν η πρώτη ιδιότητα που θέλουμε. Προκειμένου για τις ελεύθερες μεταβλητές του ψ έχουμε ότι είναι είτε η x είτε κάποια από τις ελεύθερες μεταβλητές του $\exists x\psi$. Οταν $z = x$, πάλι από τον ορισμό, έχουμε $w'(z) = w(z)$. Διαφορετικά, η z είναι ελεύθερη μεταβλητή του $\exists x\psi$ και, από την υπόθεση της πρότασης που αποδεικνύουμε, έχουμε $v(z) = v'(z)$. Ομως σε μεταβλητές που είναι ελεύθερες στον $\exists x\psi$, συμφωνούν οι v και w. Εχουμε λοιπόν, σ' αυτήν την περίπτωση:

$$w'(z) = v'(z) = v(z) = w(z)$$

Προχωράμε λοιπόν το επιχείρημά μας ως εξής:

Επειδή η w' συμφωνεί με την w στις ελεύθερες μεταβλητές του τύπου ψ, από την επαγωγική υπόθεση, έχουμε $\mathcal{A} \models_w \psi$ αν και μόνο αν $\mathcal{A} \models_{w'} \psi$. Επιπλέον, επειδή η w' συμφωνεί με τη v' στις ελεύθερες μεταβλητές του τύπου $\exists x\psi$, ή σε όλες του ψ εκτός ίσως της x, έχουμε $\mathcal{A} \models_{v'} \exists x\psi$.

Δείξαμε λοιπόν ότι $\mathcal{A} \models_v \exists x\psi$ έπεται $\mathcal{A} \models_{v'} \exists x\psi$. Το επιχείρημα μπορεί να αντιστραφεί (έχει συμμετρικό χαρακτήρα, δεν παίζει ρόλο αν ξεκινάμε με την v ή την v') και με τον ίδιο τρόπο να συμπεράνουμε και ότι $\mathcal{A} \models_{v'} \exists x\psi$ έπεται $\mathcal{A} \models_v \exists x\psi$. ∎

3.1.5 Πόρισμα. *Εστω ότι σ είναι μία πρόταση σε μία γλώσσα της λογικής των κατηγορημάτων και $\mathcal{A}$ είναι μία δομή γι αυτήν τη γλώσσα. Αν υπάρχει αποτίμηση μεταβλητών v για την οποία $\mathcal{A} \models_v \sigma$ τότε θα ισχύει και $\mathcal{A} \models_{v'} \sigma$, για κάθε άλλη αποτίμηση μεταβλητών v'. Αν δεν ισχύει για κάποια v ότι $\mathcal{A} \models_v \sigma$, τότε δε θα ισχύει ούτε για οποιαδήποτε άλλη v'.*

Απόδειξη: Οταν η σ είναι πρόταση τότε δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές (αν θέλετε, το σύνολο των ελεύθερων μεταβλητών της είναι το κενό). Επομένως κάθε δύο αποτιμήσεις μεταβλητών συμφωνούν στις ελεύθερες μεταβλητές της σ! (για κάθε μεταβλητή z, αν z ανήκει στο σύνολο των ελεύθερων μεταβλητών της σ, τότε $v(z) = v'(z)$.) Αρα, με βάση το προηγούμενο θεώρημα, για οποιεσδήποτε v, v' $\mathcal{A} \models_v \sigma$ αν και μόνο αν $\mathcal{A} \models_{v'} \sigma$. ∎

Παρατηρήσεις: 1. Προκειμένου λοιπόν για μία πρόταση σ έχει νόημα να γράφουμε $\mathcal{A} \models \sigma$, αφού αυτό συμβαίνει ή δεν συμβαίνει ανεξάρτητα αποτίμησης μεταβλητών. Ετσι φτάνουμε με πολύ αυστηρό τρόπο σε μία κατάληξη που η εμπειρία μας με τα μαθηματικά μας έκανε να διαισθανόμαστε: ότι, δηλαδή, μια οποιαδήποτε **πρόταση** που αναφέρεται σε ένα πεδίο που μελετάμε είτε αληθεύει είτε όχι. Σε ένα άλλο πεδίο, η ίδια πρόταση (διατυπωμένη στην ίδια γλώσσα) θα αληθεύει ή όχι κι αυτό θα συμβαίνει ανεξάρτητα της συμπεριφοράς της στο προηγούμενο πεδίο αναφοράς. Χαρακτηριστικά, η πρόταση

$$\forall x \, \exists y \, (y.y = x)$$

που ισχυρίζεται πώς κάθε αριθμός έχει τετραγωνική ρίζα, δεν αληθεύει στους πραγματικούς αριθμούς (κι αυτό δεν έχει να κάνει με καμμία αποτίμηση μεταβλητών) ενώ αληθεύει στους μιγαδικούς αριθμούς.

2. Προκύπτει επίσης από το παραπάνω θεώρημα ότι αυτό που έχει σημασία προκειμένου για την ικανοποιησιμότητα ή όχι ενός τύπου σε μία δομή είναι οι τιμές που παίρνουν οι ελεύθερες μεταβλητές του. Ετσι λοιπόν έχει νόημα πλέον να γράφουμε $\mathcal{A} \models \varphi(x_1/a_1, ..., x_n/a_n)$, εννοώντας ότι η δομή $\mathcal{A}$ ικανοποιεί τον τύπο φ αν δώσουμε στις ελεύθερες μεταβλητές του $x_1, ..., x_n$ τις τιμές $a_1, ..., a_n$, αντίστοιχα.

3. Είδαμε παραπάνω ότι μία αποτίμηση μεταβλητών επεκετείνεται μονοσήμαντα σε μία αποτίμηση όλων των όρων. Αν λοιπόν ένας όρος t μπορεί να αντικατασταθεί για μία μεταβλητή x σ′ έναν τύπο αυτό σημαίνει (εξ ορισμού) ότι οι μεταβλητές που συμμετέχουν στη γραφή του όρου παραμένουν ελεύθερες στον τύπο μετά την αντικατάσταση. Αν λοιπόν είχαμε $\mathcal{A} \models_v \forall x \varphi(x)$ θα έχουμε $\mathcal{A} \models_v \varphi(t)$, όπου $\varphi(t)$ δηλώνει τον τύπο που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε μία ελεύθερη εμφάνιση μίας μεταβλητής x από τον όρο t. Αυτό συμβαίνει ακριβώς γιατί, για όλα τα $a \in |\mathcal{A}|$, $\mathcal{A} \models \varphi(x/a)$. Ειδικώτερα, για το $\hat{v}(t) = b$ έχουμε $\models \varphi(x/b)$. Αυτή η ιδιότητα γενικεύει το απλό και κατανοητό γεγονός ότι, αφού για κάθε πραγματικό αριθμό x έχουμε $x.x + 1 \geq 0$, όποια έκφραση t (που μπορούμε να κατασκευάσουμε με τα μέσα που έχουμε διαθέσιμα) κι αν βάλουμε στη θέση του x θα εξακολουθήσουμε να έχουμε $t.t + 1 \geq 0$.

3.2 Ικανοποιήσιμες προτάσεις, ταυτολογίες

3.2.1 Ορισμός. Λέμε ότι η δομή της γλώσσας $\mathcal{A}$ ικανοποιεί τον τύπο φ ως προς την αποτίμηση μεταβλητών v αν

$$\mathcal{A} \models_v \varphi$$

Λέμε ότι ο τύπος είναι **ικανοποιήσιμος** αν υπάρχει δομή της γλώσσας και αποτίμηση μεταβλητών v που να ικανοποιούν τον φ. Ενας τύπος φ μίας γλώσσας της κατηγορηματικής λογικής λέγεται **ταυτολογία** (ή καθολικά έγκυρος) αν ικανοποιείται σε κάθε δομή $\mathcal{A}$ της γλώσσας και αποτίμηση μεταβλητών v. Λέμε ότι ο τύπος φ είναι **αντίφαση** (ή αντιλογία) αν δεν ικανοποιείται σε καμμία δομή της γλώσσας. Τέλος, λέμε ότι οι τύποι φ και ψ είναι **λογικά ισοδύναμοι** αν, οποτεδήποτε ικανοποιείται ο ένας, ικανοποιείται και ο άλλος, δηλαδή

$$\mathcal{A} \models_v \varphi \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \mathcal{A} \models_v \psi$$

Παρατήρηση: Χρησιμοποιήστε τον ορισμό της ικανοποιησιμότητας για να διαπιστώσετε ότι οι τύποι

$$\neg(\forall x \varphi) \qquad \text{και} \qquad \exists x \, \neg\varphi$$

είναι λογικά ισοδύναμοι. Το ίδιο για τους τύπους

$$\neg(\exists x \varphi) \qquad \text{και} \qquad \forall x \, \neg\varphi$$

Εξετάζουμε εδώ την καθολική εγκυρότητα κάποιων τύπων. Κυρίως μας ενδιαφέρει να αναδείξουμε τη σημασία των περιορισμών που τίθενται ως προς τις εμφανίσεις μεταβλητών. Δίνουμε αντιπαραδείγματα για να τονίσουμε τί θα μπορούσε να πάει στραβά αν δεν τίθονταν αυτοί οι περιορισμοί.

3.2.2 Πρόταση. *Οι παρακάτω τύποι είναι ταυτολογίες*

1. $\forall x(x = x)$
2. $\forall x \forall y \ (x = y \to (\varphi \to \varphi'))$, *όπου η μεταβλητή x είναι οποιαδήποτε, η μεταβλητή x είναι αντικαταστάσιμη από την y στον τύπο φ και ο τύπος φ' προκύπτει από αντικατάσταση κάποιων ελεύθερων εμφανίσεων της x από την y στον τύπο φ.*
3. $\forall x \varphi(x) \to \varphi(t)$, *όπου η x είναι αντικαταστάσιμη από τον όρο t στον φ.*
4. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x \psi)$, *όπου ο τύπος φ δεν περιέχει ελεύθερη εμφάνιση της μεταβλητής x.*

Σημειώνουμε εδώ ότι «η μεταβλητή x είναι αντικαταστάσιμη από τον όρο t σε έναν τύπο» σημαίνει πρακτικά ότι η μεταβλητή x δεν είναι στο «πεδίο δράσης» κάποιου ποσοδείκτη $\forall y$ ή $\exists y$ μέσα στον τύπο, όπου η μεταβλητή y εμφανίζεται στον όρο t. Με άλλα λόγια

Απόδειξη: Αφήνουμε τα δύο πρώτα ως άσκηση. Το (3.) συζητείται στην τελευταία παρατήρηση της προηγούμενης ενότητας.

Τέλος εξετάζουμε το (4.): Εστω μία τυχαία δομή $\mathcal{A}$ για τη γλώσσα όπου εκφράζονται οι φ, ψ. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι

$$\mathcal{A} \models \forall x(\varphi \to \psi)$$

Αυτό σημαίνει ότι,

$$\text{για όλα τα } a \in |\mathcal{A}|,\ \ \mathcal{A} \models (\varphi \to \psi)(x/a)$$

Ειδικώτερα ότι,

$$\text{για όλα τα } a \in |\mathcal{A}|,\ \text{ αν } \mathcal{A} \models \varphi(x/a) \ \text{ τότε } \mathcal{A} \models \psi(x/a)\ \ (*)$$

Θέλουμε να καταλήξουμε στο ότι

$$\mathcal{A} \models \varphi \to \forall x \psi$$

Ας υποθέσουμε λοιπόν επιπλέον ότι $\mathcal{A} \models \varphi$. Από τη στιγμή που η μεταβλητή x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον τύπο φ έχουμε πως για οποιαδήποτε αποτίμηση μεταβλητών ο τύπος φ ικανοποιείται στη δομή $\mathcal{A}$ ανεξάρτητα του τί τιμή παίρνει η μεταβλητή x κατά την αποτίμηση. Εχουμε λοιπόν, ειδικώτερα, $\mathcal{A} \models \varphi(x/a)$.

Η παραδοχή (*) τώρα μας λέει πως

$$\text{για όλα τα } a \in |\mathcal{A}|,\ \mathcal{A} \models \psi(x/a)$$

Δηλαδή ότι

$$\mathcal{A} \models \forall x \psi,$$

όπως ήταν το ζητούμενο. ∎

Συνεχίζουμε παρουσιάζοντας αντιπαραδείγματα που καταδεικνύουν την αναγκαιότητα των διαφόρων περιορισμών που τίθενται κατά την παρουσίαση των αξιωματικών σχημάτων. Ξεκινώντας λοιπόν από το τελευταίο, ας θεωρήσουμε μια περίπτωση όπου η μεταβλητή x εμφανίζεται ελεύθερη στον τύπο φ. Παίρνουμε, στη γλώσσα της θεωρίας των πραγματικών αριθμών (με συναρτησιακά σύμβολα $\{+, .\}$, σχεσιακό σύμβολο $\leq$ και σύμβολα σταθεράς $\{0, 1\}$)

$$\varphi:\ 0 \leq x \qquad \psi:\ \exists y(y.y = x)$$

Εχουμε λοιπόν τον τύπο

$$\forall x(0 \leq x \to \exists y(y.y = x)) \to (0 \leq x \to \forall x \exists y(y.y = x)),$$

ο οποίος θέλουμε να είναι καθολικά έγκυρος.

Δίνοντας στα σύμβολα τη συνηθισμένη ερμηνεία τους στους πραγματικούς αριθμούς θα θέλαμε και για τη δομή των πραγματικών αριθμών (που συμβολίζουμε με $\mathbb{R}$) να είναι

$$\mathbb{R} \models \forall x(0 \leq x \rightarrow \exists y(y.y = x)) \rightarrow (0 \leq x \rightarrow \forall x \exists y(y.y = x))$$

Η υπόθεση της συνεπαγωγής ικανοποιείται στους πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή

$$\mathbb{R} \models \forall x(0 \leq x \rightarrow \exists y(y.y = x)),$$

άρα θα έπρεπε να είναι και

$$\mathbb{R} \models (0 \leq x \rightarrow \forall x \exists y(y.y = x))$$

Για κάποια λοιπόν αποτίμηση που δίνει στο x θετική τιμή θα έπρεπε να είναι

$$\mathbb{R} \models \forall x \exists y(y.y = x)),$$

πράγμα που, φυσικά, δεν ισχύει.

Ομοίως, στην περίπτωση του σχήματος (3.), αν παίρναμε στην ίδια γλώσσα τον τύπο

$$\varphi : \exists y(y.x + 1 \leq 0)$$

και ζητούσαμε το σχήμα (3.) να είναι καθολικά έγκυρο χωρίς περιορισμούς θα έπρεπε να έχουμε, για την συνηθισμένη ερμηνεία της γλώσσας των πραγματικών αριθμών,

$$\mathbb{R} \models \forall x \exists y \ (y.x + 1 \leq 0) \rightarrow \exists y \ (y.y + 1 \leq 0)$$

Δεδομένου όμως ότι πράγματι είναι

$$\mathbb{R} \models \forall x \exists y \ (y.x + 1 \leq 0)$$

θα έπρεπε και

$$\mathbb{R} \models \exists y \ (y.y + 1 \leq 0),$$

πράγμα που φυσικά δεν συμβαίνει.

3.2.3 Πρόταση. *Οι παρακάτω τύποι είναι ταυτολογίες (και είναι γνωστοί ως **νόμοι μετακίνησης ποσοδεικτών**)*

(i) $\forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\exists x \varphi(x) \rightarrow \psi)$, *όταν η μεταβλητή x δεν εμφανίζεται ελεύθερα στον τύπο ψ*

(ii) $\exists x(\varphi(x) \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\forall x \varphi(x) \rightarrow \psi)$, *όταν η μεταβλητή x δεν εμφανίζεται ελεύθερα στον τύπο ψ*

Απόδειξη: Ασχολούμαστε με το (i). Το δεύτερο είναι πανομοιότυπο. Εστω μία τυχαία δομή $\mathcal{A}$ για τη γλώσσα όπου εκφράζονται οι φ, ψ κι ας υποθέσουμε ότι

$$\mathcal{A} \models \forall x(\varphi(x) \to \psi)$$

ενώ ταυτόχρονα έχουμε κι ότι

$$\mathcal{A} \models \exists x \varphi(x)$$

Το πρώτο σημαίνει ότι,

$$\text{για όλα τα } \ a \in |\mathcal{A}|, \ \text{ αν } \ \mathcal{A} \models \varphi(x/a) \ \text{ τότε } \ \mathcal{A} \models \psi$$

ενώ το δεύτερο ότι

$$\text{υπάρχει } \ a \in |\mathcal{A}|, \ \text{ ώστε } \ \mathcal{A} \models \varphi(x/a).$$

Επεται ότι $\mathcal{A} \models \psi$.

Αντίστροφα, έστω ότι $\mathcal{A} \models \exists x \varphi(x) \to \psi$ κι ας θεωρήσουμε ότι το $a \in |\mathcal{A}|$ είναι τέτοιο ώστε $\mathcal{A} \models \varphi(x/a)$. Τότε ισχύει ότι

$$\mathcal{A} \models \exists x \varphi(x)$$

κι άρα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\mathcal{A} \models \psi$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\text{αν } \ \mathcal{A} \models \varphi(x/a) \ \text{ τότε } \ \mathcal{A} \models \psi$$

Αν το $a \in |\mathcal{A}|$ είναι τέτοιο ώστε δεν ισχύει $\mathcal{A} \models \varphi(x/a)$, τότε από την ψευδή υπόθεση $\mathcal{A} \models \varphi(x/a)$ μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$\text{αν } \ \mathcal{A} \models \varphi(x/a) \ \text{ τότε } \ \mathcal{A} \models \psi$$

Επομένως, έχουμε ότι

$$\text{για κάθε } \ a \in |\mathcal{A}|, \ \text{ αν } \ \mathcal{A} \models \varphi(x/a) \ \text{ τότε } \ \mathcal{A} \models \psi$$

∎

Παρατήρηση: 1. Εχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον να δούμε το ρόλο που παίζει ο περιορισμός για τη μεταβλητή x στα παραπάνω: Αν πάρουμε για φ τον τύπο $x \geq 0$ και για ψ τον τύπο $\exists y \ (y.y = x)$, τότε ισχύει στους πραγματικούς αριθμούς $\forall x \ (x \geq 0 \to \ \exists y \ (y.y = x)$ καθώς επίσης και $\exists x \ (x \geq 0)$. Ομως δεν αληθεύει γενικά ότι $\mathbb{R} \models \exists y \ (y.y = x)$ $(\star)$, αφού, λόγω της ελεύθερης εμφάνισης της μεταβλητής x, το τελευταίο έχει την έννοια ότι συμβαίνει για κάθε δυνατή τιμή της x (δηλαδή για κάθε αποτίμηση μεταβλητών). Προφανώς, αν δώσουμε στο x αρνητικές τιμές η σχέση $\star$) δεν ισχύει.

2.Κάποιοι άλλοι σχετικοί νόμοι αφήνονται για επεξεργασία στις ασκήσεις.

3.3 Συλλογιστικά σχήματα

Στο παρόν κεφάλαιο δείχνουμε μια σειρά από «συλλογιστικά σχήματα» της Κατηγορηματικής Λογικής. Δηλαδή, παρουσιάζουμε μία σειρά από αποδείξεις ταυτολογικών συνεπειών που έχουν τη μορφή $\varphi, \psi \models \chi$, όπου φ, ψ, χ είναι τύποι της Κατηγορηματικής Λογικής. Τα σχήματα αυτά παρουσιάζουν κατ΄ αρχήν κάποιο ιστορικό ενδιαφέρον ως απόπειρες καταγραφής των βασικών λογικών νόμων σε εποχές που προηγήθηκαν της συμβολικής αντιμετώπισης της λογικής. Κυρίως όμως, από τη σκοπιά μας, αποτελούν μια σειρά από ασκήσεις πάνω στο ζήτημα της σημασιολογίας της Κατηγορηματικής Λογικής και τον ορισμό της αλήθειας κατά Tarski. Τα καταγράφουμε ως μία σειρά προτάσεων:

3.3.1 Πρόταση. $\forall x(\varphi \to \psi),\ \exists x(\sigma \wedge \neg\psi) \ \models \ \exists x(\sigma \wedge \neg\varphi)$

Απόδειξη: Εστω ότι η δομή $\mathcal{A}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του συλλογιστικού σχήματος, δηλαδή

$$\mathcal{A} \models \forall x(\varphi \to \psi), \quad \mathcal{A} \models \exists x(\sigma \wedge \neg\psi)$$

Τότε,

$$\text{για όλα τα } a \in |\mathcal{A}|,\ \mathcal{A} \models (\varphi \to \psi)(x/a) \quad (1)$$

Επίσης, υπάρχει $a \in |\mathcal{A}|$, ώστε $\mathcal{A} \models (\sigma \wedge \neg\psi)(x/a)$. Αυτό σημαίνει ειδικώτερα ότι υπάρχει $a \in |\mathcal{A}|$, ώστε, αφ΄ ενός

$$\mathcal{A} \models \sigma(x/a) \ (2),$$

αφ΄ εταίρου

$$\mathcal{A} \models \neg\psi(x/a) \ (3).$$

Από την άλλη πλευρά η (1) σημαίνει ότι, για όλα τα $a \in |\mathcal{A}|$, αν $\mathcal{A} \models \varphi(x/a)$ τότε $\mathcal{A} \models \psi(x/a)$. Ομως, για το συγκεκριμένο $a \in |\mathcal{A}|$ της (3) δεν ισχύει $\mathcal{A} \models \psi(x/a)$. Αρα, για αυτό το $a \in |\mathcal{A}|$ δεν ισχύει $\mathcal{A} \models \varphi(x/a)$. Αρα, για αυτό το $a \in |\mathcal{A}|$ ισχύει $\mathcal{A} \models \neg\varphi(x/a)$. Ταυτόχρονα όμως, λόγω της (2), έχουμε, για το ίδιο $a \in |\mathcal{A}|$, ότι $\mathcal{A} \models \sigma(x/a)$. Αρα, για το ίδιο $a \in |\mathcal{A}|$, $\mathcal{A} \models (\sigma \wedge \neg\varphi)(x/a)$. Επομένως $\mathcal{A} \models \exists x(\sigma \wedge \neg\varphi)$ ∎

3.3.2 Πρόταση. $\forall x(\varphi \to \psi),\ \exists x(\varphi \wedge \sigma) \ \models \ \exists x(\sigma \wedge \psi)$

Απόδειξη: Εστω ότι η δομή $\mathcal{A}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του συλλογιστικού σχήματος, δηλαδή

$$\mathcal{A} \models \forall x(\varphi \rightarrow \psi), \quad \mathcal{A} \models \exists x(\varphi \wedge \sigma)$$

Τότε,
για όλα τα $a \in |\mathcal{A}|$, έχουμε $\mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)(x/a)$ (1)
Επίσης, υπάρχει $a \in |\mathcal{A}|$, ώστε $\mathcal{A} \models (\varphi \wedge \sigma)(x/a)$. Αυτό σημαίνει ότι, υπάρχει $a \in |\mathcal{A}|$ τέτοιο ώστε:

$$\mathcal{A} \models \varphi(x/a) \quad (2)$$

$$\mathcal{A} \models \sigma(x/a) \quad (3)$$

Λόγω όμως του ότι ικανοποιείται η (1) για κάθε $a \in |\mathcal{A}|$, άρα και για το συγκεκριμένο $a \in |\mathcal{A}|$ για το οποίο ικανοποιείται η (2) έχουμε οτι αναγκαστικά θα πρέπει, για το ίδιο $a \in |\mathcal{A}|$, να έχουμε

$$\mathcal{A} \models \psi(x/a) \quad (4)$$

Επομένως απο τις σχέσεις (3),(4) για το ίδιο $a \in |\mathcal{A}|$ έχουμε $\mathcal{A} \models (\sigma \wedge \psi)(x/a)$.
Αρα $\mathcal{A} \models \exists x(\sigma \wedge \psi)$ ∎

3.3.3 Πρόταση. $\neg\exists x(\varphi \wedge \psi),\ \exists x(\varphi \wedge \sigma) \ \models\ \exists x(\sigma \wedge \neg\psi)$

Απόδειξη: Εστω ότι η δομή $\mathcal{A}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του συλλογιστικού σχήματος, δηλαδή

$$\mathcal{A} \models \neg\exists x(\varphi \wedge \psi), \quad \mathcal{A} \models \exists x(\varphi \wedge \sigma)$$

Ομως $\neg\exists x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \forall x(\neg\varphi \vee \neg\psi)$, οπότε η πρώτη υπόθεση γίνεται:

$$\mathcal{A} \models \forall x(\neg\varphi \vee \neg\psi)$$

Αρα, για κάθε $a \in |\mathcal{A}|$: $\mathcal{A} \models \neg\varphi(x/a)$ (1) είτε $\mathcal{A} \models \neg\psi(x/a)$ (2)
Επίσης, υπάρχει $a \in |\mathcal{A}|$, ώστε $\mathcal{A} \models (\varphi \wedge \sigma)(x/a)$. Αυτό σημαίνει ότι, υπάρχει $a \in |\mathcal{A}|$ τέτοιο ώστε:

$$\mathcal{A} \models \varphi(x/a) \quad (3)$$

$$\mathcal{A} \models \sigma(x/a) \quad (4)$$

Η σχέση (1) δεν είναι δυνατον να ικανοποιείται γιατί τότε, λόγω της (3), θα έχουμε οτι στη δομή $\mathcal{A}$ θα ικανοποιείται η φ και η άρνηση της $\neg\varphi$, πράγμα άτοπο.
Οπότε απο τις σχέσεις (2),(4), για το ίδιο $a \in |\mathcal{A}|$, έχουμε $\mathcal{A} \models (\sigma \wedge \neg\psi)(x/a)$.
Αρα $\mathcal{A} \models \exists x(\sigma \wedge \neg\psi)$ ∎

3.4 Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι τα παρακάτω είναι ταυτολογίες και εξηγείστε γιατί δεν ισχύουν οι αντίστροφες συνεπαγωγές:

(i)$(\forall x\varphi \vee \forall\psi) \rightarrow \forall x(\varphi \vee \psi)$,

(ii) $\exists x(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi)$

(Υπόδειξη: Ως αντιπαράδειγμα για την αντίστροφη συνεπαγωγή, στο πρώτο, πάρτε $\varphi:\ x \leq 0$, $\psi:\ 0 \leq x$ και ερμηνέψτε στους πραγματικούς αριθμούς. Στο δεύτερο, πάρτε για φ έναν τύπο που να λέει ''ο x είναι άρτιος'' και για ψ έναν τύπο που να λέει ''ο x είναι περιττός'' και ερμηνέψτε τους στους φυσικούς αριθμούς.)

2. Για την καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε μια δομή που να την ικανοποιεί και μία που να μην την ικανοποιεί:

(i)$\forall x\forall y\ (R(x,y) \rightarrow \exists z(R(x,z) \wedge R(z,y)))$,

(ii) $\forall x\forall y(R(x,y) \rightarrow \exists z(R(x,z) \vee R(z,y)))$,

(iii) $\forall x\forall y(R(x,y) \vee R(y,x))$,

(iv) $\forall x\forall y(R(x,x) \rightarrow (R(x,y) \vee R(y,x)))$,

(v) $\forall x\forall y\forall z(R(x,x) \rightarrow (R(x,z) \vee R(z,y)))$,

όπου R είναι ένα τυχαίο διμελές σχεσιακό σύμβολο. Μπορεί να ερμηνευτεί ως οποιαδήποτε σχέση, σε οποιοδήποτε σύνολο.

(Υπόδειξη: Σκεφτείτε σχέσεις μεταξύ μαθηματικών αντικειμένων που ήδη γνωρίζετε, όπως διάταξη, διαιρετότητα, παραλληλία, συνευθειακότητα κλπ. Προσδιορίστε με ακρίβεια το σύνολο στο οποίο κάνετε την ερμηνεία, δηλαδή το σύνολο - φορέα της δομής. Προσπαθήστε να διατυπώσετε με λόγια τι λέει η κάθε πρόταση για τα στοιχεία του συνόλου, όπου κάνετε την ερμηνεία. Αντί να αποδείξετε με βάση τους ορισμούς ότι μία πρόταση ικανοποιείται στη δομή που επιλέξατε, διαβάστε τί λέει για τα στοιχεία του συνόλου - φορέα και αναγνωρίστε μία γνωστή αλήθεια γι΄ αυτό. Π.χ μπορεί μία πρόταση να λέει για τη διάταξη ανάμεσα σε πραγματικούς αριθμούς ότι αν ένας αριθμός είναι μικρότερος ενός δεύτερου και ο δεύτερος ενός τρίτου, τότε και ο πρώτος είναι μικρότερος του τρίτου.)

3. Για την καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε μια δομή που να την ικανοποιεί και μία που να μην την ικανοποιεί:

(i)$\forall x \forall y\ (R(x,x,y)) \wedge R(x,y,y))$,

(ii) $\forall x \forall y \forall z (R(x,y,z) \rightarrow \exists w(R(x,w,y) \vee R(y,w,z)))$,

(iii) $\forall x \forall y \forall z\ (R(x,y,z) \rightarrow \exists u R(x,u,y) \wedge \exists w R(y,w,z))$,

(R είναι ένα τυχαίο τριμελές σχεσιακό σύμβολο.)

4. Βρείτε μια δομή που να ικανοποιεί ταυτόχρονα τους τύπους:

(i) $(\forall x)(\exists y)(P(x,y) \wedge S(x,y))$ και

(ii) $(\forall x)(\neg P(x,x))$

Λύση: Παίρνουμε ως σύνολο φορέα της δομής μας αυτό των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$. Ερμηνεύουμε το σύμβολο P ως τη σχέση $>$ (αυστηρά μεγαλύτερο απο) και το σύμβολο S ως τη σχέση $|$ (διαιρεί, δηλ. $|(x,y)$ αν και μόνο αν υπάρχει z ώστε $x.z = y$)).
Παίρνουμε την δομή $\mathcal{M} =< \mathbb{N}, >, \cdot, 0, 1 >$, τότε οι δύο τύποι γίνονται:

$$(\forall x)(\exists y)(y > x \wedge x|y),$$

που εκφράζει για τους φυσικούς αριθμούς το γνωστό γεγονός ότι κάθε φυσικός αριθμός έχει ένα μεγαλύτερο πολλαπλάσιο του και

$$(\forall x)(\neg(x > x)),$$

που εκφράζει δηλαδή για τους φυσικούς αριθμούς ότι κανένας αριθμός δεν είναι μεγαλύτερος του εαυτού του.

5. Δείξτε ότι τα παρακάτω είναι ταυτολογίες:

(i)$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi)$,

(ii) $(\exists x \varphi \rightarrow \exists x \psi) \rightarrow \exists x(\varphi \rightarrow \psi)$

6. Δείξτε ότι τα παρακάτω είναι ταυτολογίες και δώστε αντιπαραδείγματα που να εξηγούν γιατί είναι αναγκαίοι οι περιορισμοί ως προς τις ελεύθερες εμφανίσεις των μεταβλητών.

(i)$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \forall x\psi)$, όταν η μεταβλητή x δεν εμφανίζεται ελεύθερα στον τύπο φ

(ii) $\exists x(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\varphi(x) \rightarrow \exists x\psi)$, όταν η μεταβλητή x δεν εμφανίζεται ελεύθερα στον τύπο ψ

7. Δείξτε ότι είναι ταυτολογία η πρόταση

$$\exists x\ (\varphi(x) \rightarrow \forall y\varphi(y))$$

(Υπόδειξη: Προσπαθήστε να εξετάσετε αν υπάρχει ερμηνεία που να επαληθεύει την άρνηση της παραπάνω πρότασης)

8. Εστω ότι S είναι ένα διμελές σχεσιακό σύμβολο. Δείξτε ότι είναι ταυτολογία η πρόταση

$$\neg\exists y\forall x\ (S(y,x) \leftrightarrow \neg S(x,x).$$

9. Δείξτε, με τη βοήθεια ενός αντιπαραδείγματος, ότι δεν είναι ταυτολογία η πρόταση

$$\forall x\exists y\varphi \leftrightarrow \exists y\forall x\varphi$$

Ισχύει κάποια από τις συνεπαγωγές;

10. Γράψτε μία πρόταση που για να την ικανοποιεί μία δομή πρέπει να έχει τουλάχιστον ένα στοιχείο (Υπόδειξη: Προσπαθήστε να δείτε αν αληθεύει σε μία τυχαία δομή η πρόταση $\exists x(x = x)$.) Στη συνέχεια γράψτε μία πρόταση που για να την ικανοποιεί μία δομή πρέπει να έχει ακριβώς ένα στοιχείο. (Υπόδειξη: Προσπαθήστε να δείτε τί σημαίνει ότι αληθεύει σε μία δομή η πρόταση $\forall x\forall y(x = y)$.)

11. Γράψτε μία πρόταση που για να την ικανοποιεί μία δομή πρέπει να έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία. Στη συνέχεια γράψτε μία πρόταση που για να την ικανοποιεί μία δομή πρέπει να έχει ακριβώς δύο στοιχεία.

12. Εστω ότι Γ και Δ είναι δύο σύνολα προτάσεων σε μία γλώσσα της κατηγορηματικής λογικής. Θέτουμε

$$\mathrm{Mod}(\Gamma) = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \models \sigma, \;\; \text{για όλες τις } \; \sigma \in \Gamma\}$$

(δηλαδή $\mathrm{Mod}(\Gamma)$ είναι το σύνολο των δομών που ικανοποιούν όλες τις προτάσεις του συνόλου Γ.) Δείξτε ότι,

$$\text{αν} \quad \Gamma \subseteq \Delta, \quad \text{τότε} \quad \mathrm{Mod}(\Gamma) \supseteq \mathrm{Mod}(\Delta).$$

Στη συνέχεια δείξτε ότι, για τυχαία σύνολα προτάσεων Γ, Δ σε μία γλώσσα,

$$\mathrm{Mod}(\Gamma \cup \Delta) = \mathrm{Mod}(\Gamma) \cap \mathrm{Mod}(\Delta).$$