Ασκήσεις στην Μαθηματική Λογική Φύλλο 1

15 Απριλίου 2011

Ασκηση 1: Εξετάστε αν είναι ταυτολογίες οι παρακάτω προτάσεις:

$$(\sigma \to \tau) \to ((\tau \to \rho) \to (\sigma \to \rho)) \qquad (\sigma \vee \rho) \to (\sigma \to \rho)$$

$$((\sigma \to \rho) \to \sigma) \to \sigma$$

Ασκηση 2: Ελέγξτε αν ισχύουν οι παρακάτω λογικές ισοδυναμίες:

$(\sigma \wedge \tau) \vee (\rho \to \sigma) \;\equiv\; \rho \to \sigma$

$(\sigma \to \rho) \wedge \tau \;\equiv\; (\sigma \to) \wedge \rho$

$(\sigma \to \rho) \wedge \tau \;\equiv\; \neg(\tau \to \sigma) \vee \rho$

Ασκηση 3: Εξετάστε αν είναι επαρκές σύνολο συνδέσμων το

$$\{\neg, \veebar\}$$

($\veebar$ το ‘‘αποκλειστικό είτε’’)

Ασκηση 4: Δείξτε ότι αν $X \cup \{\alpha\} \models \gamma$ και $X \cup \{\beta\} \models \gamma$, τότε $X \cup \{\alpha \vee \beta\} \models \gamma$.

Ασκηση 5: Ορίζουμε τους αριθμούς F_n ως εξής: $F_n = 2^{(2^n)} + 1$ Αποδείξτε ότι για κάθε $n \geq 1$,

$$F_n = F_0 \cdot F_1 \cdots F_{n-1} + 2$$

Ασκηση 6: Θεωρούμε έναν κύκλο και n ευθείες που περνάν μέσα από αυτόν, έτσι ώστε καθεμία από αυτές να τέμνει όλες τις άλλες, όμως χωρίς ποτέ τρεις απ΄ αυτές να διέρχονται από το ίδιο σημείο. Αποδείξτε ότι ο αριθμός των περιοχών στις οποίες χωρίζεται ο κύκλος είναι $\frac{n^2+n+2}{2}$.

Ασκηση 7: Θεωρούμε τις προτάσεις σ και ρ και την προτασιακή μεταβλητή A. Ορίζουμε την πρόταση $\sigma[A/\rho]$, που προκύπτει από αντικατάσταση της πρότασης ρ στη θέση της προτασιακής μεταβλητής A ως εξής:

$\sigma[A/\rho] = \rho$, αν η σ είναι η προτασιακή μεταβλητή A.

$\sigma[A/\rho] = \sigma$, αν η σ είναι άλλη προτασιακή μεταβλητή.

$\sigma[A/\rho] = \sigma_1[A/\rho] \diamond \sigma_2[A/\rho]$, αν η σ είναι η $\sigma_1 \diamond \sigma_2$, όπου $\diamond$ είναι ένας εκ των $\wedge, \vee, \rightarrow$.

$\sigma[A/\rho] = \neg\sigma_1[A/\rho]$, αν η σ είναι η $\neg\sigma_1$

Δείξτε ότι αν v είναι μια απονομή αληθοτιμών με την ιδιότητα ότι $v(A) = v(\rho)$, τότε $v(\sigma[A/\rho]) = v(\sigma)$

Ασκηση 8: Γράψτε μια πρόταση σε τέσσερεις προτασιακές μεταβλητές, η οποία να αληθεύει όταν το πολύ μια από αυτές γίνεται αληθής.

Ασκηση 9: Αν $\Sigma\upsilon\nu(A)$ δηλώνει το σύνολο των συνεπειών του συνόλου προτάσεων A, αποδείξτε ότι

$$\Sigma\upsilon\nu(A \cap B) \subseteq \Sigma\upsilon\nu(A) \cap \Sigma\upsilon\nu(B)$$

και δώστε ένα αντιπαράδειγμα που να δείχνει ότι δεν ισχύει πάντα η ισότητα.