Διατεταγμένα Σύνολα
και Αλγεβρες της Λογικής

Παναγής Καραζέρης
Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

23 Σεπτεμβρίου 2004

Εισαγωγή

Οι παρούσες σημειώσεις γράφτηκαν για τις ανάγκες ενός κατ΄ επιλογήν μαθήματος, με τον ίδιο τίτλο, που διδάσκεται στο τρίτο έτος σπουδών του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών.

Σκοπός του μαθήματος, σε πρώτο επίπεδο, αποτελεί η εξοικείωση με τις έννοιες της διάταξης και των αλγεβρικών δομών που απορρέουν από αυτήν. Η έννοια της διάταξης είναι κεντρική στα Μαθηματικά, αφού συνοδεύει κατά φυσικό τρόπο δύο από τις πρωταρχικές τους έννοιες, αυτή του αριθμού και του συνόλου. Η διάταξη εμφανίζεται ήδη στα αριθμητικά συστήματα που αποτελούν το βασικό κορμό της Μαθηματικής Επιστήμης. Ειδικώτερα η διάταξη των πραγματικών αριθμών και οι επαγόμενες έννοιες του supremum και του infimum έχουν καθοριστικό χαρακτήρα για την κατανόηση των θεμελιωδών εννοιών της Μαθηματικής Ανάλυσης. Περαιτέρω, οι δομές που απορρέουν από τη διάταξη του εγκλεισμού υποσυνόλων, όπως αυτή του (πλήρους) δικτυωτού ή της άλγεβρας Boole έχουν καθολική παρουσία στη σύγχρονη Αλγεβρα και τη Θεωρία Συνόλων. Θεωρούμε, ως εκ τούτου, απαραίτητη την ξεχωριστή αντιμετώπιση της έννοιας στο επίπεδο των προπτυχιακών σπουδών του Τμήματος Μαθηματικών, αν μη τι άλλο, για την αποσαφήνιση τέτοιων καταστάσεων όπου η έννοια της διάταξης εμφανίζεται με φυσικό όσο και καθοριστικό τρόπο.

Σε ένα δεύτερο επίπεδο, οι δομές που απορρέουν από τη διάταξη διέπουν μία ολόκληρη περιοχή της Μαθηματικής Επιστήμης που εστιάζει την προσοχή της στη λογική ανάλυση της γλώσσας. Ως αντικείμενο αυτής της ανάλυσης νοούμε είτε τη φυσική γλώσσα (τόσο του καθημερινού λόγου αλλά πολύ περισσότερο του μαθηματικού λόγου), είτε την οποιαδήποτε συμβολική γλώσσα που μπορεί να χρησιμοποιείται για την επικοινωνία ανθρώπου και μηχανής. Αυτό το δεύτερο επίπεδο αντανακλάται στο δεύτερο μισό του τίτλου των σημειώσεων, δηλαδή στις "άλγεβρες της Λογικής ". Με τον όρο αυτό δηλώνουμε μια σειρά από μαθηματικές δομές που εμφανίζονται, όχι μόνο κατά την τυποποίηση της κλασσικής λογικής των προτάσεων (δηλαδή της άλγεβρας Boole) αλλά και στις διαδικασίες εξαγωγής συμπερασμάτων υπό συγκεκριμένες συνθήκες (αβέβαιότητα, περιορισμένη μνήμη της μηχανής κλπ.), καθώς επίσης και κατά την τυποποίηση υπολογιστικών διαδικασιών. Μερικοί φιλόσοφοι θα δίσταζαν να αποκαλέσουν τις παραπάνω λειτουργίες "λογική" (βλέπε, J. Hintikka, *The principles of Mathematics revisited*, Cambridge 1996), ίσως λοιπόν να χρησιμοποιούμε αυτόν τον όρο καταχρηστικά. Σε κάθε περίπτωση όμως η μελέτη αυτού του αντικειμένου έχει καταστεί αναπόσπαστο μέρος πολλών (μεταπτυχιακών) προγραμμάτων σπουδών στη Λογική και τη Θεωρητική Πληροφορική. Από αυτήν την άποψη δικαιλογείται μιά πρώτη παρουσίαση του αντικειμένου σε προπτυχιακό επίπεδο.

Οι παρούσες σημειώσεις περιλαμβάνουν τέσσερα κεφάλαια. Στο πρώτο εισάγονται η έννοια του διατεταγμένου συνόλου, του supremum και του infimum, του κατευθυνόμενου υποσυνόλου ενός διατεταγμένου συνόλου και των βασικών δομών διάταξης (ημιδικτυωτά, δικτυωτά, πλήρη δικτυωτά). Εξετάζουμε τις συναρτήσεις που διατηρούν τη διάταξη και άλλες σχετικές έννοιες. Κλείνουμε το κεφάλαιο με ένα θεμελιώδες αποτέλεσμα γύρω από την εμφύτευση ενός διατεταγμένου συνόλου κατά έναν καθολικό τρόπο μέσα σε ένα πλήρες δικτυωτό. Εδώ επιδεικνύουμε, για πρώτη αλλά όχι μοναδική φορά σε αυτές τις σημειώσεις, μια μεροληπτικότητα ως προς το θέμα που επιλέγουμε να θίξουμε. Για λόγους συνάφειας με τα θέματα που θίγουμε στη συνέχεια αλλά και οικονομίας του κειμένου, επιλέγουμε να συζητήσουμε τη συγκεκριμένη διαδικασία πλήρωσης σε βάρος μίας άλλης, εξ ίσου σημαντικής, αυτής μέσω των τομών Dedekind - MacNeille.

Στο δεύτερο κεφάλαιο εισάγουμε τις έννοιες του πεπερασμένου (συμπαγούς) στοιχείου ενός δικτυωτού, του αλγεβρικού δικτυωτού του ιδεώδους και του φίλτρου, του επιμεριστικού και του πλήρως επιμεριστικού δικτυωτού. Εισάγονται οι άλγεβρες Boole ως ειδικές περιπτώσεις επιμεριστικών δικτυωτών και μελετώνται οι βασικές ιδιότητές τους. Το θέμα όμως που συνέχει το παρόν κεφάλαιο είναι αυτό της αναπαράστασης διαφόρων ειδών δικτυωτών ως δικτυωτών ιδεωδών, εγχείρημα που θα καταλήξει στο τέταρτο κεφάλαιο με την πλήρη αναπαρά- σταση Stone για τα επιμεριστικά δικτυωτά. Εδώ δίνουμε ένα είδος " μη - τοπολογικής αναπαράστασης " Stone. Η πλήρης αναπαράσταση θα έλθει ως φυσική συνέπεια των αποτελεσμάτων του παρόντος κεφαλαίου όταν στο τελευταίο κεφάλαιο αναλύσουμε τα πλήρως επιμεριστικά δικτυωτά (=πλαίσια, στη σύγχρονη ορολογία) ως δικτυωτά ανοικτών υποσυνόλων τοπολογικών χώρων.

Στο τρίτο κεφάλαιο εισάγουμε τη θεμελιώδη έννοια των προσαρτημένων απεικονίσεων. Επανεξετάζουμε τις βασικές έννοιες που συνδέονται με το θέμα της διάταξης, όπως αυτές του supremum και του infimum από αυτή τη σκοπιά. Καταδεικνύουμε την κεντρική σχέση της προσάρτησης μεταξύ των λογικών συνδέσμων εξάγοντας τους βασικούς νόμους της Λογικής ως πορίσματα αυτής της σχέσης. Εισάγουμε τη δομή της άλγεβρας Heyting ως γενίκευσης της άλγεβρας Boole αλλά καταδεικνύουμε και τη δυνατότητα μίας σειράς γενικεύσεων, στο ίδιο πνεύμα, που αντιστοιχούν σε μία σειρά από άλγεβρες της Λογικής, με την έννοια που συζητήθηκε παραπάνω. Η καθοριστική σημασία των προσαρτημένων απεικονίσεων φανερώνεται για μια ακόμη φορά από την ανάλυση των λογικών ποσοδεικτών στα πλαίσια αυτής της έννοιας.

Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο συζητάμε αναλυτικότερα τα φίλτρα και τα ιδεώδη επιμεριστικών δικτυωτών, τη σχέση τους με τους ομομορφισμούς δικτυωτών καθώς και το πώς μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως σύνολα σημείων για την αναπαράσταση ορισμένων πλήρως επιμεριστικών δικτυωτών ως δικτυωτών ανοικτών υποσυνόλων τοπολογικών χώρων. Ετσι φτάνουμε στην αναπαράσταση Stone των επιμεριστικών δικτυωτών ως δικτυωτών συμπαγών ανοικτών υποσυνόλων κάποιων τοπολογικών χώρων. Παρουσιάζουμε την εφαρμογή αυτής της αναπαράστασης στην απόδειξη δύο κλασσικών αποτελεσμάτων της Μαθηματικής Λογικής: του θεωρήματος πληρότητας και του θεωρήματος συμπαγότητας. Φυσικά ένας τέτοιος δρόμος δεν είναι απαραίτητος (ούτε καν ο συντομώτερος) για την απόδειξη των δύο τελευταίων θεωρημάτων. Περισσότερο μας ενδιαφέρει να δείξουμε τον ουσιαστικό μαθηματικό πυρήνα πίσω από αυτά τα αποτελέσματα.

Ανάμεσα στα πολλά ζητήματα που επιλέγουμε να μη θίξουμε εδώ ίσως αυτό με τη μεγαλύτερη συνάφεια ως προς τα θέματα που συζητάμε είναι αυτό των συνεχών δικτυωτών, η θεωρία των οποίων είναι κεντρικής σημασίας στη σημασιολογική ανάλυση των γλωσσών προγραμματισμού. Αρκούμαστε, ως προς αυτό, στη συζήτηση των πεπερασμένων στοιχείων και των αλγεβρικών δικτυωτών που αποτελούν την αφετηρία της συζήτησης αυτής της ευρύτερης θεωρίας.

Να αναφέρουμε, τέλος, ότι επιλέγουμε να πλαισιώσουμε τα κεφάλαια των σημειώσεων αυτών με μία σειρά ασκήσεων ποικίλης δυσκολίας και θεωρητικής σημασίας. Επίσης παρουσιάζουμε μια σειρά βιβλιογραφικών αναφορών επιλέγοντας τις ενδεικτικώτερες, κατά τη γνώμη μας, της ξένης βιβλιογραφίας και ελπίζοντας να είμαστε το δυνατόν πιό περιεκτικοί ως προς την ελληνική βιβλιογραφία.

Θέλω να κλείσω εκφράζοντας τις ευχαριστίες μου προς τους φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπειστημίου Πατρών που παρακολούθησαν το μάθημα των ‘‘Διατεταγμένων Συνόλων’’ και έκαναν διάφορες βελτιωτικές παρατηρήσεις ως προς το περιεχόμενο προγενέστερων μορφών των σημειώσεων. Ειδικώτερα θέλω να ευχαριστήσω το μεταπτυχιακό φοιτητή του Τμήματος Μαθηματικών κ. Α. Μαντζάρη, ο οποίος έλεγξε διαξοδικά τις σημειώσεις και εντόπισε μία σειρά από λάθη. Τα εναπομείναντα, φυσικά, βαραίνουν τον γράφοντα.

Κεφάλαιο 1

Διατεταγμένα σύνολα και πλήρη δικτυωτά

Εισαγωγή Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε τις βασικές έννοιες της διάταξης, της δυϊκής διάταξης πάνω σε ένα διατεταγμένο σύνολο, του supremum, του infimum καθώς και κάποιες βασικές προτάσεις που εξασφαλίζουν την ύπαρξή τους. Δίνουμε τους βασικούς ορισμούς του ημιδικτυωτού, του δικτυωτού και του πλήρους δικτυωτού και εξετάζουμε πώς ανακύπτει αλγεβρική δομή από τη διάταξη ενός συνόλου και αντιστόφως. Εξετάζουμε τί σημαίνει μια συνάρτηση ανάμεσα σε διατεταγμένα σύνολα να διατηρεί τη διάταξη και κάποιες σχετικές με αυτήν την κατάσταση έννοιες. Μιλάμε για σύνολα συναρτήσεων που διατηρούν τη διάταξη και δείχνουμε πώς μπορούν και αυτά να διαταχθούν και να αποκτήσουν suprema και infima. Δείχνουμε πώς μπορούμε να εμφυτεύουμε ένα οποιοδήποτε διατεταγμένο σύνολο μέσα σε ένα πλήρες δικτυωτό κατά ένα βέλτιστο τρόπο.

Στόχος του κεφαλαίου είναι η εξοικείωση με τις βασικές έννοιες που είναι σχετικές με τη διάταξη και η προετοιμασία για την εισαγωγή των εννοιών του φίλτρου και του ιδεώδους πάνω σε ένα (ημι-)δικτυωτό (εξειδικεύσεις των εννοιών του άνω και κάτω συνόλου, αντιστοίχως, όπως τις μελετάμε εδώ), έννοιες που είναι κεντρικής σημασίας, τόσο για την ανάπτυξη της θεωρίας των διατεταγμένων συνόλων, όσο και για τις εφαρμογές τους σε άλλους κλάδους των μαθηματικών και στη λογική.

1.1 Σχέσεις διάταξης:

Μία **σχέση διάταξης** πάνω σ' ένα σύνολο P είναι μία **ανακλαστική**, **αντισυμμετρική** και **μεταβατική** σχέση. Δηλαδή μιά σχέση $\leq$ ανάμεσα στα στοιχεία του P που πληρεί τις ακόλουθες συνθήκες, αντιστοίχως:

(i) $\forall x\ x \leq x$

(ii) $\forall x \forall y \quad x \leq y\ \&\ y \leq x\ \Rightarrow\ x = y$

(iii) $\forall x \forall y \forall z \quad x \leq y\ \&\ y \leq z\ \Rightarrow\ x \leq z$

Παραδείγματα: 1) Το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών με τη φυσική τους διάταξη

2) Το δυναμοσύνολο ενός συνόλου με τη σχέση $\subseteq$ του περιέχεσθαι.

3) Το σύνολο των υποομάδων μίας ομάδας με τη σχέση $\subseteq$ του περιέχεσθαι.

4) Το σύνολο των ιδεωδών ενός αντιμεταθετικού δακτυλίου με τη σχέση $\subseteq$ του περιέχεσθαι.

5) Το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών με τη σχέση της διαιρετότητας, δηλαδή $n \leq m$ αν υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ με $m = n.k$

6) Το σύνολο των πεπερασμένων ακολουθιών από ψηφία 0 και 1, διατεταγμένο με τη σχέση της επέκτασης, δηλαδή $s_1 \leq s_2$ αν η ακολουθία s_1 είναι αρχικό τμήμα της ακολουθίας s_2, π.χ όταν $s_1 = 00101$ και $s_2 = 001011$, $s_3 = 0010100$ έχουμε ότι $s_1 \leq s_2$ και $s_1 \leq s_3$.

7) Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας των προτάσεων του προτασιακού λογισμού (όπου δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες αν καθεμία από τις δυό συνεπάγεται την άλλη) με τη σχέση της λογικής συνεπαγωγής, δηλαδή $\parallel p \parallel \leq \parallel q \parallel$ αν $p \rightarrow q$.

8) Οι έννοιες μίας θεωρίας μπορούν να διαταχθούν ανάλογα με την "έκτασή" τους, π.χ αν αναφερόμαστε στο σύνολο των εννοιών που μπορεί να περιγράφουν τα τετράπλευρα έχουμε "τετράγωνο $\leq$ ρόμβος".

9) Το σύνολο των ανοικτών υποσυνόλων ενός τοπολογικού χώρου σχέση $\subseteq$ του περιέχεσθαι.

10) Η λεγόμενη δυϊκή διάταξη σ΄ ένα ήδη διατεταγμένο σύνολο $(P, \leq)$ αποτελεί και αυτή σχέση διάταξης: Δύο στοιχεία x, y σχετίζονται με αυτή τη σχέση, γράφουμε $x \sqsubseteq y$, αν και μόνο αν $y \leq x$. Αναφερόμαστε στο σύνολο P, εφοδιασμένο με τη δυϊκή του διάταξη, ως το **αντίθετο** του P και το συμβολίζουμε με P^{op}.

Παρατηρήσεις 1) Ενα διατεταγμένο σύνολο λέγεται **γραμμικώς διατεταγμένο** αν για κάθε x και y σύνολο ισχύει είτε $x \leq y$ ή $y \leq x$. Οπως φαίνεται και από τα παραπάνω παραδείγματα τα διατεταγμένα σύνολα που θεωρούμε **δεν είναι** συνήθως γραμμικώς διατεταγμένα, δηλαδή δεν συγκρίνονται κατ΄ ανάγκη μεταξύ τους κάθε δυό στοιχεία τους. Πιο συγκεκριμένα μόνο το παράδειγμα (1) αποτελεί περίπτωση γραμμικώς διατεταγμένου συνόλου, καθώς και το παράδειγμα (10) στην περίπτωση που το αρχικό σύνολο $(P, \leq)$ είναι γραμμικώς διατεταγμένο. Τα άλλα παραδείγματα, γενικώς, δεν αποτελούν περιπτώσεις γραμμικώς διατεταγμένων συνόλων. Αυτό έχει σημασία για το πώς επιχειρηματολογεί κανείς στα πλαίσια αυτής της θεωρίας. Για παράδειγμα το ενδεχόμενο να **μην** ισχύει $x \leq y$ **δεν συνεπάγεται** ότι $y < x$.

2) Το παράδειγμα (10) έχει ξεχωριστή θεωρητική σημασία. Είναι μια τεχνική επινόηση που επιτρέπει μεγάλη οικονομία στο τί αποδεικνύει κανείς στη θεωρία των διατεταγμένων συνόλων, καθώς και στο πώς εκφράζεται κανείς στα πλαίσια αυτής της θεωρίας: Μια σειρά από έννοιες της θεωρίας μας είναι **δυϊκές** προς κάποιες άλλες, δηλαδή αποτελούν εκφάνσεις της αρχικής έννοιας αν την ερμηνεύσουμε στο P^{op}, π.χ όταν λέμε ''το ελάχιστο στοιχείο του P'' είναι το ίδιο με το να πούμε ''το μέγιστο στοιχείο του P^{op}''.

Συχνά, για εποπτικούς λόγους ή και για παραγωγή αντιπαραδειγμάτων προς διάφορους ισχυρισμούς, είναι χρήσιμο να φτιάχνουμε διατεταγμένα σύνολα ή να αναπαριστούμε μέρος τους επάνω στο χαρτί (ούτως ή άλλως τα περισσότερα διατεταγμένα σύνολα που θα μας απασχολήσουν είναι άπειρα). Αυτό γίνεται μέσω των λεγόμενων διαγραμμάτων Hasse. Ετσι, για παράδειγμα, το σύνολο των υποσυνόλων ενός συνόλου με δύο στοιχεία $\{a, b\}$ αναπαρίσταται ως εξής:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \{a,b\} & & \\
 & \diagup & & \diagdown & \\
\{a\} & & & & \{b\} \\
 & \diagdown & & \diagup & \\
 & & \varnothing & &
\end{array}
$$

ενώ το διατεταγμένο σύνολο των υποομάδων της λεγόμενης διεδρικής ομάδας με τέσσερα στοιχεία, που δίνεται από την παράσταση $D_2 =< a, b \mid a^2 = b^2 = 1,\ ab = ba >$, αναπαρίσταται ως εξής:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & D_2 & & \\
 & \diagup & | & \diagdown & \\
\{1,a\} & & \{1,ab\} & & \{1,b\} \\
 & \diagdown & | & \diagup & \\
 & & \{1\} & &
\end{array}
$$

Η ανισοτική σχέση δηλαδή παριστάνεται με την ύπαρξη μίας γραμμής που συνδέει το ένα στοιχείο με ένα άλλο σε πιο πάνω επίπεδο.

1.2 Suprema και infima

Εστω $S \subseteq P$ ένα υποσύνολο ενός διατεταγμένου συνόλου. Λέμε ότι το στοιχείο $x \in P$ είναι **άνω φράγμα** του S αν για κάθε $s \in S$ ισχύει $s \leq x$. Δυϊκά, λέμε ότι το στοιχείο $x \in P$ είναι **κάτω φράγμα** του S αν για κάθε $s \in S$ ισχύει $x \leq s$.

Το στοιχείο $x \in P$ λέγεται **supremum** του $S \subseteq P$ αν είναι άνω φράγμα του S και **για κάθε άλλο** άνω φράγμα y του S ισχύει $x \leq y$. Δηλαδή το supremum είναι το **ελάχιστο άνω φράγμα** του υποσυνόλου $S \subseteq P$. Συμβολίζουμε το supremum του υποσυνόλου $S \subseteq P$ με $\bigvee S$ ή $\sup S$. Το supremum ενός διμελούς υποσυνόλου $\{x, y\}$ το συμβολίζουμε με $x \vee y$.

Δυϊκά, το στοιχείο $x \in P$ λέγεται **infimum** του $S \subseteq P$ αν είναι κάτω φράγμα του S και **για κάθε άλλο** κάτω φράγμα y του S ισχύει $y \leq x$. Δηλαδή το infimum είναι το **μέγιστο κάτω φράγμα** του υποσυνόλου $S \subseteq P$. Συμβολίζουμε το infimum του υποσυνόλου $S \subseteq P$ με $\bigwedge S$ ή $inf S$. Το infimum ενός διμελούς υποσυνόλου $\{x, y\}$ το συμβολίζουμε με $x \wedge y$.

Κάποιες φορές το υποσύνολο του P για το οποίο μιλάμε μπορεί να δίνεται παραμετρικοποιημένο από ένα σύνολο δεικτών I, δηλαδή να έχουμε μια *οικογένεια* στοιχείων του P, $\{x_i | i \in I\}$. Συμβολίζουμε τότε το supremum ή το infimum αυτού του συνόλου με $\bigvee_{i \in I} x_i$ και $\bigwedge_{i \in I} x_i$, αντίστοιχα.

Παραδείγματα - Παρατηρήσεις 1) Στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, με τη φυσική τους διάταξη, θεωρούμε τα υποσύνολα $A = \{1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, ...\}$ και $B = \{2, 3 - \frac{1}{2}, ..., 3 - \frac{1}{n}, ...\}$. Εχουμε $\bigvee A = 1$ και $\bigwedge A = 0$ καθώς και $\bigvee B = 3$ και $\bigwedge B = 2$. Ο πρώτος και ο τελευταίος ισχυρισμός έχουν προφανή αιτιολόγηση. Για τον δεύτερο (η τρίτη περίπτωση είναι ανάλογη) παρατηρούμε τα εξής: Το 0 είναι σαφώς κάτω φράγμα του συνόλου A. Αν το x είναι ένα άλλο κάτω φράγμα τότε είναι κατ' ανάγκη $0 \geq x$. Γιατί διαφορετικά, **λόγω της γραμμικότητας της διάταξης** του $\mathbb{R}$, θα ήταν $0 < x$. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να βρούμε αριθμό της μορφής $\frac{1}{N}$ με $\frac{1}{N} < x$ (π.χ για $N = [\frac{1}{x}] + 1$), οπότε το x παύει να είναι κάτω φράγμα του A (άτοπο). Παρατηρούμε ότι το supremum ή το infimum κάποιου υποσυνόλου ενός διατεταγμένου συνόλου **δεν ανήκουν αναγκαστικά στο υποσύνολο**. Αν κάτι τέτοιο συμβαίνει λέμε ότι το supremum είναι το μέγιστο στοιχείο ή το maximum του υποσυνόλου (όπως π.χ είναι το 1 για το υποσύνολο A). Αντίστοιχα, αν το infimum ενός υποσυνόλου ανήκει στο υποσύνολο, λέμε ότι το στοιχείο αυτό αποτελεί ελάχιστο στοιχείο ή minimum του υποσυνόλου.

2) Στο δυναμοσύνολο ενός συνόλου το supremum μίας οικογένειας υποσυνόλων είναι η ένωση αυτής της οικογένειας. Το infimum μίας οικογένειας υποσυνόλων είναι η τομή της οικογένειας αυτής.

3) Στο σύνολο των ιδεωδών ενός αντιμεταθετικού δακτυλίου το infimum

μιας οικογένειας ιδεωδών είναι η τομή αυτής της οικογένειας. Το supremum όμως της οικογένειας **δεν είναι η ένωση** της οικογένειας, γιατί η ένωση ιδεωδών δεν είναι ιδεώδες. Το supremum σε αυτήν την περίπτωση είναι το ελάχιστο ιδεώδες που παράγεται από την ένωση της οικογένειας των ιδεωδών.

4) Στο σύνολο των ανοικτών υποσυνόλων ενός τοπολογικού χώρου το supremum μίας οικογένειας υποσυνόλων είναι η ένωση αυτής της οικογένειας. Το infimum μίας οικογένειας υποσυνόλων **δεν είναι η τομή** της οικογένειας αυτής, γιατί η τομή μίας άπειρης οικογένειας ανοικτών υποσυνόλων δεν είναι πάντα ανοικτό υποσύνολο.

5) Στο σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών με τη σχέση της διαιρετότητας το supremum δύο αριθμών είναι, όπως εύκολα διαπιστώνουμε, το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιό τους. Το infimum δύο αριθμών είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης τους.

6) Στο σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας των προτάσεων του προτασιακού λογισμού (όπου δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες αν καθεμία από τις δυό συνεπάγεται την άλλη) το supremum δύο τέτοιων κλάσεων είναι η κλάση που αντιπροσωπεύεται από τη διάζευξη δύο προτάσεων που αντιπροσωπεύουν την κάθε μία κλάση. Δηλαδή $\| p \| \vee \| q \| = \| p \vee q \|$. Ομοίως για το infimum έχουμε ότι $\| p \| \wedge \| q \| = \| p \wedge q \|$.

Στα δύο τελευταία παραδείγματα το supremum ή το infimum μίας απειρομελούς οικογένειας **δεν υπάρχουν**.

1.2.1 Πρόταση. *Εστω ότι ένα διατεγμένο σύνολο P έχει supremum για κάθε υποσύνολό του. Τότε κάθε υποσύνολο του P έχει και infimum.*

Απόδειξη: Εστω $S \subseteq P$ ένα υποσύνολο ενός διατεταγμένου συνόλου. Θα βρούμε το infimum του συνόλου αυτού. Θεωρούμε το σύνολο $X = \{x \in P | \ \forall s \in S \quad x \leq s\}$. Από την υπόθεση, υπάρχει το supremum αυτού του συνόλου, $\bigvee X$. Θα δείξουμε ότι είναι το ζητούμενο infimum του συνόλου S.

• Το $\bigvee X$ είναι κάτω φράγμα του συνόλου S: Κοιτάμε ένα τυχαίο στοιχείο s του S. Κάθε στοιχείο του X είναι μικρότερο ή ίσο του οποιουδήποτε στοιχείου του S, άρα και του s. Το s είναι δηλαδή άνω φράγμα του X. Οπότε $\bigvee X \leq s$.

• Το $\bigvee X$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του συνόλου S: Εστω $x \in P$ ένα κάτω φράγμα του S. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $s \in S$, $x \leq s$. Αρα $x \in X$, οπότε και $x \leq \bigvee X$. ■

1.2.2 Πόρισμα. *Εστω ότι ένα διατεγμένο σύνολο P έχει infimum για κάθε υποσύνολό του. Τότε κάθε υποσύνολο του P έχει και supremum.*

Απόδειξη Εφαρμόζουμε την παραπάνω Πρόταση στο σύνολο P^{op}. Ετσι η έννοια του supremum στο P γίνεται αυτή του infimum στο P^{op} και αυτή του infimum γίνεται αυτή του supremum στο P^{op}. ■

Σχόλιο. Ας δούμε τι σημαίνει ότι το κενό υποσύνολο ενός διατεταγμένου συνόλου έχει supremum: Πρώτον, πρέπει το $\bigvee\emptyset$ να είναι μεγαλύτερο ή ίσο από κάθε στοιχείο του κενού συνόλου! Ομως κάθε στοιχείο ενός διατεταγμένου συνόλου πληρεί αυτήν την προϋπόθεση (έστω ότι το $p \in P$ δεν την πληρεί· αυτό σημαίνει ότι **υπάρχει στοιχείο του κενού συνόλου** που δεν είναι μικρότερο ή ίσο του p - άτοπο). Κάθε στοιχείο, λοιπόν, ενός διατεταγμένου συνόλου είναι άνω φράγμα του κενού συνόλου. Δεύτερον, πρέπει το $\bigvee\emptyset$ να είναι μικρότερο ή ίσο από κάθε άνω φράγμα του κενού συνόλου. Πρέπει δηλαδή να είναι μικρότερο ή ίσο από οποιοδήποτε στοιχείο του P. Με άλλα λόγια πρέπει να είναι ένα ελάχιστο στοιχείο του P. Καταλήγουμε επομένως ότι το supremum του κενού υποσυνόλου ενός διατεταγμένου συνόλου υπάρχει αν και μόνο αν το διατεταγμένο σύνολο έχει ελάχιστο στοιχείο. Σκεφτόμενοι δυϊκά (δηλαδή εφαρμόζοντας την παραπάνω συλλογιστική στο διατεταγμένο σύνολο P^{op}) καταλήγουμε στο ότι το κενό υποσύνολο ενός διατεταγμένου συνόλου έχει infimum αν και μόνο αν το διατεταγμένο σύνολο έχει μέγιστο στοιχείο.

1.3 Κατευθυνόμενα υποσύνολα

Ενα υποσύνολο S ενός διατεταγμένου συνόλου P λέγεται **κατευθυνόμενο** αν

- είναι μη-κενό και
- για κάθε δύο στοιχεία του $x,\ y \in S$ υπάρχει $z \in S$ με $x \leq z$ και $y \leq z$.

Για παράδειγμα ένα μη-κενό, γραμμικώς διατεταγμένο υποσύνολο ενός διατεταγμένου συνόλου είναι κατευθυνόμενο. Επίσης ένα σύνολο (ενδεχομένως υποσύνολο κάποιου ευρύτερου διατεταγμένου συνόλου) με την ιδιότητα ότι για κάθε δύο στοιχεία του υπάρχει το supremum τους μέσα σ' αυτό το σύνολο, είναι κατευθυνόμενο.

Συμβαίνει σε αρκετές περιπτώσεις όπου δεν υπάρχουν, σ' ένα διατεταγμένο σύνολο, όλα τα suprema υποσυνόλων του να υπάρχουν τα suprema κατευθυνόμενων υποσυνόλων του. Σε άλλες περιπτώσεις τα suprema κατευθυνόμενων υποσυνόλων ενός διατεταγμένου συνόλου έχουν καλύτερη περιγραφή απ' ότι τα suprema τυχαίων υποσυνόλων του. Για παράδειγμα στο σύνολο των ιδεωδών ενός αντιμεταθετικού δακτυλίου το supremum μίας κατευθυνόμενης οικογένειας ιδεωδών είναι απλώς η ένωση αυτής της οικογένειας (Αυτό που δε μας επιτρέπει να συμπεράνουμε γενικώς ότι η ένωση ιδεωδών είναι ιδεώδες είναι ότι, αν $r,\ s \in \bigcup_{j\in J} I_j$ τότε αν $r \in I_j$, $s \in I_k$ και $j \neq k$, δεν υπάρχει λόγος το άθροισμα $r+s$ να είναι στην ένωση. Αν η οικογένεια των ιδεωδών όμως είναι κατευθυνόμενη τότε υπάρχει $l \in J$ ώστε $I_j \subseteq I_l$ και $I_k \subseteq I_l$. Οπότε $r, s \in I_l$, άρα και $r+s \in I_l \subseteq \bigcup_{j\in J} I_j$.)

1.3.1 Πρόταση. *Εστω ότι ένα διατεγμένο σύνολο P έχει supremum για κάθε* *κατευθυνόμενο, καθώς και για κάθε πεπερα- σμένο υποσύνολό του. Τότε κάθε υποσύνολο του P έχει και supremum.*

Απόδειξη: Εστω $S \subseteq P$ ένα υποσύνολο ενός διατεταγμένου συνόλου. Θα βρούμε το supremum του χρησιμοποιώντας την παραδοχή ότι κάθε πεπερασμένο και κάθε κατευθυνόμενο υποσύνολο του P έχει supremum.

Θεωρούμε το σύνολο $K = \{\bigvee F | \ F \subseteq S, \quad F$ πεπερασμένο$\}$ των suprema όλων των πεπερασμένων υποσυνόλων του S. Η απόδειξη της πρότασης συνίσταται σε δύο πράγματα: Πρώτον, ότι το σύνολο K είναι κατευθυνόμενο (άρα το supremum του υπάρχει μέσα στο P). Δεύτερον, ότι το $\bigvee K$ είναι το ζητούμενο supremum του S.

• Εστω $\bigvee F$, $\bigvee F'$ δύο στοιχεία του K. Το σύνολο $F \cup F'$ εξακολουθεί να είναι πεπερασμένο και $\bigvee F \leq \bigvee(F \cup F')$, $\bigvee F' \leq \bigvee(F \cup F')$. (Ισχύει γενικώτερα ότι αν $A \subseteq B$ τότε $\bigvee A \leq \bigvee B$. Γιατί για κάθε $a \in A$ είναι και $a \in B$, άρα $a \leq \bigvee B$, κι αφού αυτό συμβαίνει για κάθε $a \in A$, έπεται ότι $\bigvee A \leq \bigvee B$.) Αρα το σύνολο K είναι κατευθυνόμενο.

• Το supremum του K υπάρχει λοιπόν και είναι το ζητούμενο supremum του S. Γιατί, για κάθε $s \in S$, $s = \bigvee\{s\} \in K$. Αρα, το $\bigvee K$ είναι άνω φράγμα του S. Επιπλέον, είναι το ελάχιστο άνω φράγμα: Αν το x είναι ένα άλλο άνω φράγμα του S, τότε είναι και άνω φράγμα του οποιουδήποτε πεπερασμένου υποσυνόλου του. Ισχύει, λοιπόν, ότι για κάθε στοιχείο $\bigvee F$ του K είναι $\bigvee F \leq x$. Επομένως $\bigvee K \leq x$, όπως επιθυμούμε. ■

1.4 Διάταξη και αλγεβρική δομή

Είμαστε τώρα σε θέση να δώσουμε μια σειρά από ορισμούς για σύνολα που είναι δομημένα με μια δομή αλγεβρικού τύπου (δηλαδή ορίζοντας πράξεις ανάμεσα στα στοιχεία τους), όπου η δομή αυτή ορίζεται με τη βοήθεια της διάταξης και των ιδιοτήτων που ενδεχομένως έχει.

Λέμε ότι το διατεταγμένο σύνολο $(P, \leq)$ είναι **πλήρες δικτυωτό** αν κάθε υποσύνολό του έχει supremum. Αυτό σημαίνει, όπως έχουμε ήδη δει, ότι και κάθε υποσύνολό του θα έχει και infimum. Ειδικώτερα το κενό υποσύνολο θα έχει supremum και infimum, άρα το σύνολο P θα έχει ελάχιστο και μέγιστο στοιχείο, αντίστοιχα. Τα δύο αυτά στοιχεία τα συμβολίζουμε με 0 και 1, αντίστοιχα.

Λέμε ότι το διατεταγμένο σύνολο $(P, \leq)$ είναι **άνω ημιδικτυωτό** αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του έχει supremum. Ειδικώτερα το κενό υποσύνολο έχει supremum, επομένως ένα άνω ημιδικτυωτό έχει ελάχιστο στοιχείο. Ισοδύναμα, θα μπορούσαμε να ορίσουμε ένα άνω ημιδικτυωτό ως ένα διατεταγμένο σύνολο που έχει ελάχιστο στοιχείο και για κάθε δύο στοιχεία του x, y υπάρχει το supremum τους $x \vee y$. Γιατί τότε θα μπορούσαμε, επαγωγικά, να ορίσουμε το supremum κάθε πεπερασμένου υποσυνόλου. Δυϊκά, λέμε ότι το διατεταγμένο σύνολο $(P, \leq)$ είναι **κάτω ημιδικτυωτό** αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του έχει infimum. Ειδικώτερα το κενό υποσύνολο έχει infimum, επομένως ένα κάτω ημιδικτυωτό έχει μέγιστο στοιχείο. Ισοδύναμα, θα μπορούσαμε να ορίσουμε ένα άνω ημιδικτυωτό ως ένα διατεταγμένο σύνολο που έχει ελάχιστο στοιχείο και για κάθε δύο στοιχεία του x, y υπάρχει το infimum τους $x \wedge y$. Γιατί τότε θα μπορούσαμε, επαγωγικά, να ορίσουμε το infimum κάθε πεπερασμένου υποσυνόλου.

Τέλος λέμε ότι το διατεταγμένο σύνολο $(P, \leq)$ είναι **δικτυωτό** αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του έχει supremum και infimum. Ειδικώτερα το κενό υποσύνολο έχει supremum και infimum, επομένως ένα δικτυωτό έχει ελάχιστο και μέγιστο στοιχείο, τα οποία συμβολίζουμεμε 0 και 1, αντίστοιχα. Ισοδύναμα, θα μπορούσαμε να ορίσουμε ένα δικτυωτό ως ένα διατεταγμένο σύνολο που έχει ελάχιστο στοιχείο και μέγιστο στοιχείο και για κάθε δύο στοιχεία του x, y υπάρχει το supremum τους $x \vee y$ και το infimum τους $x \wedge y$.

Παρατηρούμε τώρα ότι η διμελής πράξη που σε δύο στοιχεία ενός άνω ημιδικτυωτού αντιστοιχίζει το supremum τους έχει κάποιες προφανείς ιδιότητες:

$$x \vee x = x, \qquad x \vee y = y \vee x, \qquad (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z), \qquad x \vee 0 = x.$$

Δυϊκά, η πράξη του διμελούς infimum σε ένα κάτω ημιδικτυωτό έχει τις ιδιότητες

$$x \wedge x = x, \qquad x \wedge y = y \wedge x \qquad (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z), \qquad x \wedge 1 = x.$$

Μήπως οι ιδιότητες αυτές είναι αρκετές για να χαρακτηρίσουν τη δομή ενός άνω ημιδικτυωτού (αντιστοίχως, ενός κάτω ημιδικτυωτού); Η απάντηση στο ερώτημα είναι θετική και αποτελεί το περιεχόμενο της παρακάτω εύκολης πρότασης:

1.4.1 Πρόταση. *Εστω $(A, +, 0)$ μία δομή ταυτοδύναμου, αντιμεταθετικού μονοειδούς πάνω στο σύνολο A (αυτό σημαίνει ότι η πράξη $+$ ικανοποιεί, αντιστοίχως, την πρώτη, δεύτερη και - η δομή μονοειδούς - τις δύο τελευταίες από τις ιδιότητες του supremum, όπως παραπάνω). Τότε η σχέση*

$$a \leq b \qquad \textit{αν και μόνο αν} \qquad a + b = b$$

είναι σχέση διάταξης και έχει την ιδιότητα $a \vee b = a + b$ (το supremum εδώ νοείται ως προς τη συγκεκριμένη σχέση που ορίσαμε). Επιπλέον είναι η μοναδική διάταξη με αυτήν την ιδιότητα (ότι $a \vee b = a + b$).

Απόδειξη: Δείχνουμε ότι η σχέση $\leq$ όπως ορίστηκε είναι μια διάταξη με τη βοήθεια των παρακάτω λογικών συνεπαγωγών:

Ανακλαστικότητα:

$$\frac{a \leq a}{a + a = a,}$$

Αντισυμμετρικότητα:

$$\cfrac{\cfrac{a \leq b \;\&\; b \leq a}{a + b = b \;\&\; b + a = a}}{a = b,}$$

Μεταβατικότητα:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{a \leq b \;\&\; b \leq c}{a + b = b \;\&\; b + c = c}}{a + c = a + (b + c) = (a + b) + c = b + c = c}}{a \leq c.}$$

Το $a+b$ είναι άνω φράγμα των $a,\ b$: $a+(a+b) = (a+a)+b = a+b \;\Rightarrow\; a \leq a+b$, και ομοίως $b \leq a + b$. Αν το c είναι άνω φράγμα των $a,\ b$ τότε $a + c = c$ και $b + c = c$, οπότε

$$(a + b) + c = a + (b + c) = a + c = c \;\Rightarrow\; a + b \leq c.$$

Τέλος αν $\sqsubseteq$ δηλώνει μιά άλλη διάταξη και $\sqcup$ το supremum των a και b ως προς αυτή τη διάταξη θα έχουμε:

$$a \sqsubseteq b \;\Leftrightarrow\; a \sqcup b = b \;\Leftrightarrow\; a + b = b \;\Leftrightarrow\; a \leq b,$$

άρα η διάταξη, όπως ορίστηκε, είναι μοναδική με την προδιαγεγραμμένη ιδιότητα. ■

Δυϊκά έχουμε:

1.4.2 Πρόταση. *Εστω $(A, ., 1)$ μία δομή ταυτοδύναμου, αντιμεταθετικού μονοειδούς πάνω στο σύνολο A (αυτό σημαίνει ότι η πράξη . ικανοποιεί, αντιστοίχως, την πρώτη, δεύτερη και - η δομή μονοειδούς - τις δύο τελευταίες από τις ιδιότητες του infimum, όπως παραπάνω). Τότε η σχέση*

$$a \leq b \qquad \textit{αν και μόνο αν} \qquad a.b = a$$

είναι σχέση διάταξης και έχει την ιδιότητα $a \wedge b = a.b$ (το infimum εδώ νοείται ως προς τη συγκεκριμένη σχέση που ορίσαμε). Επιπλέον είναι η μοναδική διάταξη με αυτήν την ιδιότητα (ότι $a \wedge b = a.b$).

Τέλος, αναφορικά με τη δομή του δικτυωτού παρατηρούμε ότι, πέραν των αλγεβρικών ιδιοτήτων του supremum και του infimum που είδαμε παραπάνω, ισχύουν και τα εξής:

$$a \wedge (a \vee b) = a \qquad \text{και} \qquad a \vee (a \wedge b) = a.$$

(οι δύο αυτοί νόμοι ονομάζονται απορροφητικοί). Οι νόμοι που διέπουν το supremum και το infimum που είδαμε παραπάνω, μαζί με τους δύο απορροφητικούς νόμους χαρακτηρίζουν πλήρως τη δομή του δικτυωτού:

1.4.3 Πρόταση. *Εστω $(A, +, O)$, $(A, ., 1)$ δύο δομές ταυτοδύναμου, αντιμεταθετικού μονοειδούς πάνω στο σύνολο A. Οι επαγόμενες από τις δύο αυτές δομές διατάξεις, όπως τις είδαμε στις δύο παραπάνω προτάσεις, δηλαδή*

$$a \leq b \qquad \textit{αν και μόνο αν} \qquad a + b = b \qquad \textit{και}$$

$$a \leq b \qquad \textit{αν και μόνο αν} \qquad a.b = a$$

ταυτίζονται αν και μόνο αν ισχύουν οι δύο απορροφητικοί νόμοι $a.(a + b) = a$ και $a + (a.b) = a$.

Απόδειξη: Εχουμε δει ότι αν οι δύο διατάξεις ταυτίζονται τότε η δομή δικτυωτού που παίρνουμε από το supremum και το infimum, αναφορικά με τη μοναδική διάταξη της υπόθεσης, ικανοποιούν τους απορροφητικούς νόμους.

Αντιστρόφως για να δείξουμε ότι οι δύο διατάξεις ταυτίζονται αρκεί να δούμε ότι $a + b = b$ αν και μόνο αν $a.b = a$. Αυτό όμως είναι απλή συνέπεια των απορροφητικών νόμων. ∎

1.5 Συναρτήσεις που διατηρούν τη διάταξη

Λέμε ότι μία συνάρτηση $f\colon P \to Q$ ανάμεσα σε δύο διατεταγμένα σύνολα **διατηρεί τη διάταξη** αν για κάθε x, $y \in P$ με $x \leq y$ ισχύει και $f(x) \leq f(y)$. Λέμε ότι η $f\colon P \to Q$ ανάμεσα σε δύο πλήρη δικτυωτά **διατηρεί suprema** αν

$$f(\bigvee S) = \bigvee\{f(s)|\ s \in S\}$$

και αντίστοιχα ότι **διατηρεί infima** αν

$$f(\bigwedge S) = \bigwedge\{f(s)|\ s \in S\}.$$

Παρατηρήσεις Συναρτήσεις που διατηρούν τη διάταξη δεν διατηρούν κατ' ανάγκη suprema ή infima. Αυτό φαίνεται από το εξής απλό παράδειγμα: Εστω τα διατεταγμένα σύνολα

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & d & \\ b \arrow[ur, dash] & & c, \arrow[ul, dash] \\ & a \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & f(d) & \\ & g \arrow[u, dash] & \\ f(b) \arrow[ur, dash] & & f(c) \arrow[ul, dash] \\ & e \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] & \\ & f(a) \arrow[u, dash] & \end{tikzcd}$$

με τη συνάρτηση f ανάμεσά τους να δρα όπως φαίνεται στο σχήμα. Τότε

$$f(b) \vee f(c) = g \neq f(d) = f(b \vee c) \qquad \text{και}$$

$$f(b) \wedge f(c) = e \neq f(a) = f(b \wedge c).$$

Αν στο παραπάνω παράδειγμα είχαμε $f(a) = e$ (αντιστοίχως $f(d) = g$) θα συμπεραίναμε ότι είναι δυνατόν να διατηρούνται η διάταξη και τα infima (αντιστοίχως τα suprema) χωρίς να διατηρούνται τα suprema (αντιστοίχως τα infima). Ενα άλλο τέτοιο παράδειγμα προέρχεται από την τοπολογία: η αντίστροφη εικόνα μιας συνεχούς απεικόνισης, ως συνάρτηση που διατηρεί τη διάταξη ανάμεσα στα σύνολα των ανοικτών υποσυνόλων, διατηρεί suprema χωρίς να διατηρεί κατ' ανάγκη infima (δείτε τις ασκήσεις αυτού του κεφαλαίου).

Από την άλλη πλευρά μια συνάρτηση που διατηρεί τη διάταξη έχει κατ' ανάγκη τις εξής ιδιότητες:

$$\bigvee\{f(s)|\ s\in S\}\leq f(\bigvee S)\text{και}$$

$$f(\bigwedge S)\leq\bigwedge\{f(s)|\ s\in S\}$$

(γιατί για κάθε $s\in S$ είναι $\bigwedge S\leq s\leq\bigvee S$ και αφού η f διατηρεί τη διάταξη είναι, για κάθε $s\in S$, $f(\bigwedge S)\leq f(s)\leq f(\bigvee S)$.)

Λέμε ότι μία συνάρτηση $f\colon P\to Q$ ανάμεσα σε δύο διατεταγμένα σύνολα **ανακλά τη διάταξη** (ή ότι είναι **συντηρητική** απεικόνιση) αν για κάθε x, $y\in P$, $x\leq y$ αν και μόνο αν $f(x)\leq f(y)$. Παρατηρούμε ότι μια συντηρητική απεικόνιση είναι κατ΄ ανάγκη ένα- προς -ένα: Αν $f(x)=f(y)$ τότε και $f(x)\leq f(y)$, άρα ισχύει ότι $x\leq y$. Επίσης ισχύει και ότι $f(y)\leq f(x)$, άρα και ότι $y\leq x$, οπότε καταλήγουμε ότι $x=y$.

1.5.1 Πρόταση. *Εστω ότι P είναι ένα διατεταγμένο σύνολο και Q ένα πλήρες δικτυωτό. Τότε το σύνολο Q^P των συναρτήσεων που διατηρούν τη διάταξη από το P το Q είναι πλήρες δικτυωτό αναφορικά με την ''κατά σημείο'' διάταξη των συναρτήσεων.*

Απόδειξη: Δοθέντος ενός συνόλου S συναρτήσεων που διατηρούν τη διάταξη από το P στο Q θα δείξουμε ότι υπάρχει το supremum του. Ορίζουμε λοιπόν τη συνάρτηση

$$\bigvee S\colon P\to Q$$

ως εξής: $(\bigvee S)(x)=\bigvee\{s(x)|s\in S\}$. Η συνάρτηση αυτή διατηρεί τη διάταξη: Αν $x\leq y\in P$ τότε για κάθε $s\in S$ είναι $s(x)\leq s(y)$. Επεται ότι

$$(\bigvee S)(x)=\bigvee\{s(x)|s\in S\}\leq\bigvee\{s(y)|s\in S\}=(\bigvee S)(y)$$

Η συνάρτηση $\bigvee S$ είναι μεγαλύτερη ή ίση (αναφορικά με την κατά σημείο διάταξη) από κάθε συνάρτηση μέσα στο σύνολο S: Για κάθε $x\in P$ ισχύει ότι $s(x)\leq\bigvee\{s(x)|s\in S\}=(\bigvee S)(x)$. Επιπλέον, αν η f είναι άνω φράγμα του συνόλου S, τότε για κάθε δοσμένο $x\in P$ ισχύει ότι $s(x)\leq f(x)$, άρα $\bigvee\{s(x)|s\in S\}\leq f(x)$, δηλαδή $\bigvee S\leq f$ αναφορικά με την κατά σημείο διάταξη. Πράγματι λοιπόν, η συνάρτηση $\bigvee S$ είναι το supremum του δοθέντος συνόλου συναρτήσεων που διατηρούν τη διάταξη S. ■

1.5.2 Πόρισμα. *Το σύνολο 2^P των συναρτήσεων που διατηρούν τη διάταξη από το διατεταγμένο σύνολο P προς το σύνολο $2=\{0,1\}$ είναι πλήρες δικτυωτό.*

Απόδειξη: Το σύνολο $2 = \{0, 1\}$ είναι πλήρες δικτυωτό. ■

1.5.3 Πόρισμα. *Το σύνολο Q^X όλων των συναρτήσεων από ένα σύνολο X προς το πλήρες δικτυωτό Q είναι πλήρες δικτυωτό.*

Απόδειξη: Κάθε σύνολο έρχεται εφοδιασμένο με μία τετριμμένη διάταξη, τη λεγόμενη διακριτική διάταξη: Σύμφωνα με αυτή $x \le y$ αν και μόνο αν $x = y$ (είναι εύκολο να δει κανείς ότι έτσι ορίζεται μια διάταξη, η ανακλαστικότητα και η μεταβατικότητα είναι αυτές της ισότητας, η αντισυμμετρικότητα ενυπάρχει στον ορισμό της σχέσης αυτής). Αυτή η τετριμμένη διάταξη διατηρείται από **κάθε** συνάρτηση. Κάθε σύνολο συναρτήσεων, επομένως, μπορεί να ειδωθεί ως ένα σύνολο συναρτήσεων που διατηρούν τη (συγκεκριμένη) διάταξη. Ειδικώτερα, αν το Q είναι πλήρες δικτυωτό, καταλήγουμε από την προηγούμενη πρόταση. ■

1.6 Εμφύτευση του Yoneda.

Ας ανακαλέσουμε εδώ την αντιστοιχία ανάμεσα σε υποσύνολα ενός τυχαίου συνόλου, από τη μία μεριά, και τις συναρτήσεις από το σύνολο αυτό προς το δυσύνολο $\{0, 1\}$, από την άλλη. Μέσω της αντιστοιχίας αυτής το υποσύνολο S αντιστοιχίζεται στη συνάρτηση χ_S με

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1, & x \in S \\ 0, & x \notin S \end{cases} \tag{1.1}$$

και η συνάρτηση $f\colon P \to 2$ στο υποσύνολο $\{p \in P |\, f(p) = 1\}$ του P.

Αν το σύνολο P για το οποίο συζητάμε είναι διατεταγμένο, τοτε ανάμεσα σε όλες τις συναρτήσεις $P \to 2 = \{0, 1\}$ είναι κάποιες που διατηρούν τη διάταξη του P. Παρατηρούμε το εξής: Αν η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός υποσυνόλου $S \subseteq P$ διατηρεί τη διάταξη τότε το υποσύνολο έχει την εξής ιδιότητα

$$p \in S \quad \& \quad p \le q \quad \Rightarrow \quad q \in S$$

(γιατί $p \in S$ σημαίνει $\chi_S(p) = 1$, άρα και $\chi_S(q) \ge \chi_S(p) = 1$). Ενα τέτοιο υποσύνολο ενός διατεταγμένου συνόλου ας το λέμε **άνω-κλειστό** ή απλώς **άνω σύνολο**. Αντίστροφα, η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός άνω συνόλου διατηρεί τη διάταξη. Γιατί, αν $p \le q \in P$, η μόνη περίπτωση για να μη διατηρείται η διάταξη είναι όταν $\chi_S(p) = 1$ ενώ $\chi_S(q) = 0$. Κάτι τέτοιο όμως σημαίνει ότι p ανήκει στο S ενώ το $q \ge p$ δεν ανήκει στο S, άτοπο.

Περαιτέρω, η αντιστοιχία αυτή ανάμεσα σε συναρτήσεις που διατηρούν τη διάταξη από το P στο $\{0, 1\}$ και σε άνω-κλειστά υποσύνολα του P διατηρεί και ανακλά τη διάταξη: Αν $S \subseteq S'$ τότε και $\chi_S \leq \chi_{S'}$ στην κατά σημείο διάταξη συναρτήσεων, γιατί αν $p \leq q$ τότε, είτε $\chi_S(p) = 0$ άρα $\chi_S(p) \leq \chi_{S'}(p)$, είτε $\chi_S(p) = 1$ δηλαδή $p \in S$ άρα και $p \in S'$. Επίσης, αν για κάθε $p \in P$ είναι $\chi_S(p) \leq \chi_{S'}(p)$ τότε αν $p \in S$ έχουμε $\chi_S(p) = 1$, οπότε και $\chi_{S'}(p) = 1$, δηλαδή $p \in S'$ και επομένως $S \subseteq S'$ (δείτε στις ασκήσεις στο τέλος του κεφαλαίου ότι σε αυτήν την περίπτωση τα δύο διατεταγμένα σύνολα είναι ισόμορφα). Εύκολα διαπιστώνουμε, τέλος, ότι τόσο η ένωση όσο και η τομή μίας οικογένειας άνω συνόλων είναι άνω σύνολα. (Π.χ για την ένωση των κάτω κλειστών συνόλων $\{S_i | \ i \in I\}$, έχουμε ότι αν $p \in \bigcup_{i \in I} S_i$ και $q \leq p$, τότε υπάρχει $i \in I$ με $p \in S_i$ και $q \leq p$, οπότε $q \in S_i$, αφού το S_i είναι κάτω κλειστό, άρα $q \in \bigcup_{i \in I} S_i$). Αυτό σημαίνει ότι στο διατεταγμένο σύνολο των άνω συνόλων υπάρχουν τα suprema και infima και δίνονται από τις πράξεις της ένωσης και της τομής, αντίστοιχα. Σημειώνουμε δε, ότι ως μια ένα - προς - ένα και επί αντιστοιχία, που διατηρει και ανακλά τη διάταξη, ανάμεσα σε δύο διατεταγμένα σύνολα θα διατηρεί κατ΄ ανάγκη και suprema. Με άλλα λόγια η χαρακτηριστική συνάρτηση της ένωσης μίας οικογένειας υποσυνόλων είναι το supremum της οικογένειας των χαρακτηριστικών συναρτήσεων του καθενός υποσυνόλου, ομοίως και για το infimum και την τομή. Ως διατεταγμένα σύνολα, το σύνολο 2^P και το σύνολο των άνω συνόλων του P είναι αξεχώριστα μεταξύ τους και θα χρησιμοποιούμε ελεύθερα είτε τη μία μορφή αυτού του συνόλου είτε την άλλη, ανάλογα με τις ανάγκες μας. Συνοψίζουμε:

1.6.1 Πρόταση. *Το σύνολο 2^P, των συναρτήσεων που διατηρούν τη διάταξη από το διατεταγμένο σύνολο P προς το $2 = \{0, 1\}$ είναι ισόμορφο, ως διατεταγμένο σύνολο, με το σύνολο $\uparrow(P)$, των άνω-κλειστών υποσυνόλων του P.*

Αν ερμηνεύσουμε τώρα τη συνθήκη της ‘‘άνω κλειστότητας ’’ σε ένα υποσύνολο S του P, εφοδιασμένου με τη δυϊκή διάταξη βλέπουμε ότι πρέπει να πληρεί το εξής:

$$p \in S \quad \& \quad p \geq q \quad \Rightarrow \quad q \in S$$

Ας λέμε τα υποσύνολα ενός διατεταγμένου συνόλου που πληρούν αυτή την ιδιότητα **κάτω-κλειστά** ή απλώς **κάτω σύνολα**. Μεθερμηνεύοντας την παραπάνω πρόταση παίρνουμε

1.6.2 Πρόταση. *Το σύνολο $2^{P^{op}}$, των συναρτήσεων που αντιστρέφουν τη διάταξη από το διατεταγμένο σύνολο P προς το $2 = \{0, 1\}$ είναι ισόμορφο, ως διατεταγμένο σύνολο, με το σύνολο $\downarrow(P)$, των κάτω-κλειστών υποσυνόλων του P.*

Υπάρχει μια κανονική απεικόνιση

$$y\colon P \longrightarrow 2^{P^{op}} \cong \downarrow(P)$$

η οποία στέλνει το $p \in P$ στο κάτω σύνολο $\downarrow(p) = \{x \in P | x \leq p\}$.

1.6.3 Πρόταση. *Η συνάρτηση $y\colon P \longrightarrow 2^{P^{op}}$, όπως ορίστηκε παραπάνω διατηρεί αλλά και ανακλά τη διάταξη*

Απόδειξη: • Η y διατηρεί τη διάταξη: Αν $p \leq q$ τότε

$$x \in \downarrow(p) \Leftrightarrow x \leq p \Rightarrow x \leq q \Leftrightarrow x \in \downarrow(q),$$

άρα $y(p) \leq y(q)$.

• Αν $y(p) \leq y(q)$ τότε

$$p \in \downarrow(p) \subseteq \downarrow(q) = \{x \in P | x \leq q\},$$

άρα $p \leq q$. ■

Εχουμε δει ότι μια συνάρτηση που ανακλά τη διάταξη είναι ένα - προς - ένα, μπορούμε επομένως να σκεφτόμαστε τη συνάρτηση y ως μία εμφύτευση του P σε ένα πλήρες δικτυωτό (η εμφύτευση αυτή αποτελεί ειδική περίπτωση μίας γενικώτερης κατάστασης στα μαθηματικά, που είναι γνωστή ως εμφύτευση του Yoneda).

1.7 Πλήρωση διατεταγμένων συνόλων

Η εμφύτευση αυτή αποτελεί τη βέλτιστη δυνατή ενός διατεταγμένου συνόλου μέσα σε ένα πλήρες δικτυωτό με την έννοια που καθιστά ακριβέστερη το ακόλουθο

1.7.1 Θεώρημα. *Εστω P ένα διατεταγμένο σύνολο και $f\colon P \to X$ μία συνάρτηση που διατηρεί τη διάταξη προς ένα πλήρες δικτυωτό. Τότε υπάρχει μία επέκταση της f, $\hat{f}\colon 2^{P^{op}} \to X$, (δηλαδή έχει την ιδιότητα $\hat{f} \circ y = f$) που διατηρεί suprema και είναι μοναδική με τις ιδιότητες αυτές.*

Για την απόδειξη του θεωρήματος θα χρησιμοποιήσουμε τις παρακάτω τρεις απλές παρατηρήσεις, τις οποίες παραθέτουμε ως λήμματα:

1.7.2 Λήμμα. *Κάθε στοιχείο του $2^{P^{op}}$ γράφεται ως supremum στοιχείων του της μορφής $y(p)$.*

Απόδειξη: Μέσω της αντιστοιχίας στοιχείων του $2^{P^{op}}$ με κάτω σύνολα του P, αρκεί να δούμε ότι κάθε κάτω σύνολο είναι ένωση κάτω συνόλων της μορφής $\downarrow(p)$. Ομως, προφανώς, αν το S είναι κάτω σύνολο τότε $S = \bigcup\{\downarrow(p) | p \in S\}$. (δείτε την Ασκηση 14.) ■

1.7.3 Λήμμα. *Στο σύνολο $2^{P^{op}}$ ισχύει πως αν $y(p) \leq \bigvee S$, τότε υπάρχει $s \in S$ ώστε $y(p) \leq s$.*

Απόδειξη: Μέσω της γνωστής αντιστοιχίας, αρκεί να δείξουμε ότι αν $\downarrow(p) \subseteq \bigcup\{S_i | i \in I\}$, τότε υπάρχει S_i με $\downarrow(p) \subseteq S_i$. Ομως $p \in \bigcup\{S_i | i \in I\}$, άρα υπάρχει S_i ώστε $p \in S_i$. Αφού το S_i είναι κάτω σύνολο έπεται ότι $\downarrow(p) \subseteq S_i$. ■

1.7.4 Λήμμα. *Για μια οποιαδήποτε οικογένεια $\{S_i | i \in I\}$ υποσυνόλων ενός διατεταγμένου συνόλου P ισχύει*

$$\bigvee\Big(\bigcup_{i \in I} S_i\Big) = \bigvee_{i \in I} \bigvee S_i$$

Απόδειξη: Να σημειώσουμε κατ΄ αρχήν ότι με την έκφραση στο δεξιό σκέλος της ισότητας εννοούμε το supremum $\bigvee\{\bigvee S_i | i \in I\}$. Κάθε στοιχείο του συνόλου $\bigcup_{i \in I} S_i$, πάνω στο οποίο παίρνεται το supremum του αριστερού μέλους της ισότητας είναι μικρότερο ή ίσο ενός του συνόλου $\{\bigvee S_i | i \in I\}$, πάνω στο οποίο παίρνεται το supremum του δεξιού μέλους της ισότητας (γιατί αν $s \in S_i$ τότε $s \leq \bigvee S_i$). Αρα το αριστερό μέλος είναι μικρότερο ή ίσο του δεξιού.

Στην αντίθετη κατεύθυνση, αφού $S_i \subseteq \bigcup_{i \in I} S_i$, έπεται ότι για κάθε $i \in I$, $\bigvee S_i \leq \bigvee(\bigcup_{i \in I} S_i)$. Εφόσον αυτό ισχύει για κάθε $i \in I$, ισχύει και

$$\bigvee\{\bigvee S_i | i \in I\} \leq \bigvee\Big(\bigcup_{i \in I} S_i\Big).$$

■

Απόδειξη του Θεωρήματος: Ορίζουμε την $\hat{f} \colon 2^{P^{op}} \to X$ ως εξής:

$$\hat{f}(s) = \bigvee\{f(p) \in X |\ y(p) \leq s\}$$

Η $\hat{f}$ διατηρεί τη διάταξη: Αν $s \leq s'$, τότε $y(p) \leq s$ έπεται ότι $y(p) \leq s'$. Δηλαδή

$$\{f(p) \in X | y(p) \leq s\} \subseteq \{f(p) \in X |\ y(p) \leq s'\},$$

άρα και

$$\hat{f}(s) = \bigvee\{f(p) \in X|\ y(p) \leq s\} \leq \bigvee\{f(p) \in X|y(p) \leq s\} = \hat{f}(s').$$

Η $\hat{f}$ διατηρεί suprema:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\bigvee S) &= \bigvee\{f(p) \in X|\ y(p) \leq \bigvee S\} \\
\text{(από το Λήμμα 1.7.3)} &= \bigvee\{f(p) \in X|\ \exists s \in S\ y(p) \leq s\} \\
&= \bigvee \bigcup_{s \in S}\{f(p) \in X|\ y(p) \leq s\} \\
\text{(από το Λήμμα 1.7.4)} &= \bigvee_{s \in S} \bigvee\{f(p) \in X|\ y(p) \leq s\} \\
&= \bigvee\{\hat{f}(s)|\ s \in S\}
\end{aligned}$$

Η $\hat{f}$ έχει την ιδιότητα $\hat{f} \circ y = f$:

$$\begin{aligned}
(\hat{f} \circ y)(p) &= \hat{f}(y(p)) \\
&= \bigvee\{f(q) \in X|\ y(q) \leq y(p)\} \\
&= f(p)
\end{aligned}$$

Ας εξηγήσουμε κάπως παραπάνω το πέρασμα από την προτελευταία έκφραση στην τελευταία: Το $f(p)$ συμμετέχει στο σύνολο πάνω στο οποίο παίρνουμε το supremum, αφού $y(p) \leq y(p)$. Είναι και το μεγαλύτερο στοιχείο αυτού του συνόλου (είναι, δηλαδή, στην προκειμένη περίπτωση maximum στοιχείο του συνόλου) αφού, για κάθε άλλο $f(q)$ που συμμετέχει στο σύνολο, πρέπει να έχουμε $y(q) \leq y(p)$ (ακριβώς για να συμπεριληφθεί το $f(q)$ στο σύνολο), άρα, από το γέγονός ότι η συνάρτηση y ανακλά τη διάταξη, προκύπτει ότι $q \leq p$, ενώ από το γεγονός ότι η f διατηρεί τη διάταξη προκύπτει $f(q) \leq f(p)$.

Τέλος η $\hat{f}$ είναι μοναδική με αυτές τις δύο ιδιότητες, δηλαδή αν μιά άλλη συνάρτηση $g\colon 2^{P^{op}} \to X$ διατηρεί suprema και ικανοποιεί τη σχέση $g \circ y = f$ τότε κατ΄ ανάγκη είναι $g = \hat{f}$. Γιατί, από το Λήμμα 1.7.2, $s = \bigvee\{y(p)|\ y(p) \leq s\}$, οπότε:

$$g(s) = g(\bigvee\{y(p) \in 2^{P^{op}}|\ y(p) \leq s\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \bigvee\{g(y(p)) \in X \mid y(p) \leq s\} \\
&= \bigvee\{(g \circ y)(p) \in X \mid y(p) \leq s\} \\
&= \bigvee\{f(s) \mid y(p) \leq s\} \\
&= \hat{f}(s)
\end{aligned}
$$

■

1.8 Ασκήσεις:

1. Δείξτε ότι το σύνολο των ανοικτών υποσυνόλων ενός τοπολογικού χώρου, διατεταγμένο με τη σχέση του περιέχεσθαι, είναι πλήρες δικτυωτό. Ποιό είναι το supremum μιάς οικογένειας ανοικτών υποσυνόλων; Ποιό είναι το infimum μιάς τέτοιας οικογένειας;

2. Μια συνάρτηση που διατηρεί τη διάταξη $f\colon X \to Y$ ανάμεσα σε διατεταγμένα σύνολα λέγεται ισομορφισμός αν υπάρχει συνάρτηση που διατηρεί τη διάταξη $g\colon Y \to X$, τέτοια ώστε $g \circ f = id_X$ και $f \circ g = id_Y$. Δείξτε ότι μία συνάρτηση είναι ισομορφισμός διατεταγμένων συνόλων αν και μόνο αν είναι επί και ανακλά τη διάταξη.

3. Δείξτε ότι το σύνολο $\{(X, Y) \in P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N}) \mid X \cap Y = \emptyset\}$ με την κατά σημείο διάταξη έχει suprema για κατευθυνόμενα υποσύνολά του.

4. Δείξτε ότι μια συνάρτηση ανάμεσα σε διατεταγμένα σύνολα με κατευθυνόμενα suprema, η οποία διατηρεί αυτά τα suprema, διατηρεί κατ΄ ανάγκη και τη διάταξη (Υπόδειξη: Αν $x \leq y$ το σύνολο $\{x, y\}$ είναι κατευθυνόμενο.

5. Αποδείξτε ότι σε ένα οποιοδήποτε δικτυωτό ισχύουν τα εξής:

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z) \text{ και } x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

6. Αποδείξτε ότι σε ένα οποιοδήποτε δικτυωτό, αν $x \leq z$ τότε ισχύει ότι

$$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$$

7. Δείξτε ότι στο σύνολο των κανονικών υποομάδων μίας οποιασδήποτε ομάδας, διατεταγμένου με τη σχέση του περιέχεσθαι, το supremum δύο στοιχείων είναι

$$H \vee K = H.K = \{h.k |\ h \in H\ k \in K\}$$

8. Δείξτε ότι το σύνολο των σχέσεων ισοδυναμίας πάνω σε οποιοδήποτε σύνολο, διατεταγμένο με τη σχέση του περιέχεσθαι, είναι πλήρες δικτυωτό. Ποιό είναι το supremum δύο σχέσεων ισοδυναμίας;

9. Στα παρακάτω διατεταγμένα σύνολα P ποιές από τις συλλογές στοιχείων τους K που προσδιορίζουμε είναι κατευθυνόμενες;

(i) $P = < P(\mathbb{N}), \subseteq >$ $\quad K = \{X \subseteq \mathbb{N} |\ X \text{ πεπερασμένο}\}$

(ii) $P = < P(\mathbb{N}), \subseteq >$ $\quad K = \{X \subseteq \mathbb{N} |\ \mathbb{N} - X \text{ πεπερασμένο}\}$

(iii) $P = < \mathbb{N}^2, \text{κατά σημείο διάταξη} >$ $\quad K = \{(0,n) |\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{(n,0) |\ n \in \mathbb{N}\}$

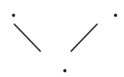
(iv) $P = < \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \text{κατά σημείο διάταξη} >$ $\quad K = \{f_i |\ i \geq 0\ f_i(i) = 1\ f_i(j) = 0 \text{ αν } i \neq j\}$

10. Εστω X ένα πλήρες δικτυωτό και $f\colon X \to X$ μία συνάρτηση που διατηρεί τη διάταξη. Δείξτε ότι, αν $\hat{x} = \bigvee\{x \in X |\ x \leq f(x)\}$, τότε

(i) Το $f(\hat{x})$ είναι άνω φράγμα του $\{x \in X |\ x \leq f(x)\}$

(ii) $f(\hat{x}) = \hat{x}$

11. Δείξτε ότι το διατεταγμένο σύνολο $\{(X,Y) \in P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N}) |\ X \cap Y = \emptyset\}$ της άσκησης 3. είναι ισόμορφο με το σύνολο $P^{\mathbb{N}}$ των συναρτήσεων που διατηρούν τη διάταξη από το σύνολο των φυσικών αριθμών, εφοδιασμένων με τη **διακριτική διάταξη** προς το σύνολο

$P =$ 

12. Αποδείξτε ότι σε ένα δικτυωτό L οι συναρτήσεις δύο μεταβλητών

$$- \wedge -\colon L^2 \to L \text{ και } - \vee -\colon L^2 \to L$$

διατηρούν τη διάταξη, δηλαδή ότι, για κάθε $x, y, z \in L$, έχουμε:

$$x \leq y \Rightarrow x \wedge z \leq y \wedge z, \qquad x \leq y \Rightarrow x \vee z \leq y \vee z.$$

13. Αποδείξτε ότι η τομή οποιασδήποτε οικογένειας κάτω κλειστών υποσυνόλων ενός διατεταγμένου συνόλου είναι κάτω κλειστό σύνολο.

14. Αποδείξτε ότι αν το S είναι κάτω κλειστό υποσύνολο ενός διατεταγμένου συνόλου P και $p \in P$ τότε:
(α) $\downarrow(p) \subseteq S$
(β) $S = \bigcup\{\downarrow(p) | p \in S\}$

Κεφάλαιο 2

Δικτυωτά, ιδεώδη, φίλτρα, αναπαραστάσεις

Εισαγωγή Στο κεφάλαιο αυτό συζητάμε τις έννοιες του ιδεώδους και (δυϊκά) του φίλτρου πάνω σε ένα (ημι-) δικτυωτό και εξετάζουμε τη δομή που φέρουν τα σύνολα ιδεωδών, διατεταγμένα με τη σχέση του περιέχεσθαι. Η δομή του συνόλου των ιδεωδών είναι αυτή του αλγεβρικού δικτυωτού, στην οποία επικεντρώνουμε στη συνέχεια. Δείχνουμε ότι κάθε τέτοια δομή προκύπτει ως σύνολο ιδεωδών επάνω σε ένα ημιδικτυωτό και εξετάζουμε κάποιες ειδικότερες περιπτώσεις αυτής της κατάστασης.

Στόχος του κεφαλαίου είναι η εξοικείωση με τις βασικές έννοιες που είναι σχετικές με τη διάταξη και η προετοιμασία για την εισαγωγή των εννοιών του φίλτρου και του ιδεώδους πάνω σε ένα (ημι-) δικτυωτό (εξειδικεύσεις τως εννοιών του άνω και κάτω συνόλου, αντιστοίχως, όπως τις μελετάμε εδώ), έννοιες που είναι κεντρικής σημασίας, τόσο για την ανάπτυξη της θεωρίας των διατεταγμένων συνόλων, όσο και για τις εφαρμογές τους σε άλλους κλάδους των μαθηματικών και στη λογική.

2.1 Πεπερασμένα (συμπαγή) στοιχεία και αλγεβρικά δικτυωτά

Αν κοιτάξουμε το σύνολο των ανοικτών υποσυνόλων ενός τοπολογικού χώρου, διαταταγμένου με τη σχέση του περιέχεσθαι, τότε διαπιστώνουμε πως είναι ένα πλήρες δικτυωτό, όπου τα suprema του δίνονται από τις ενώσεις οικογενειών ανοικτών υποσυνόλων. Το να είναι ένα ανοικτό υποσύνολο U συμπαγές σημαίνει ότι αν $U \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ τότε υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο $\{i_1, ..., i_n\}$ του I ώστε $U \subseteq U_{i_1} \cup ... \cup U_{i_n}$. Να σημειώσουμε εδώ ότι ένας τοπολογικός χώρος είναι συμπαγής ακριβώς όταν το μέγιστο στοιχείο $X \in$

$O(X)$ είναι συμπαγές στοιχείο του $O(X)$.

Καλούμε λοιπόν γενικώτερα ένα στοιχείο u ενός πλήρους δικτυωτού **συμπαγές** ή **πεπερασμένο** αν οποτεδήποτε $u \leq \bigvee S$ τότε υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο $s_1, ..., s_n$ του S ώστε $u \leq s_1 \vee ... \vee s_n$.

2.1.1 Πρόταση. *Εστω X ένα πλήρες δικτυωτό. Ενα στοιχείο $x \in X$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν, για κάθε κατευθυνόμενο $S \subseteq X$, οποτεδήποτε είναι $x \leq \bigvee S$ τότε υπάρχει $s \in S$ ώστε $x \leq s$.*

Απόδειξη Εστω ότι το $x \in X$ είναι πεπερασμένο και $x \leq \bigvee S$, όπου το S είναι κατευθυνόμενο. Αφού το x είναι πεπερασμένο τότε $x \leq s_1 \vee ... \vee s_n$. Ομως το γεγονός ότι το S είναι κατευθυνόμενο μας επιτρέπει να βρούμε διαδοχικά στο S ένα στοιχείο s_{j_1} το οποίο θα υπεβαίνει από κοινού τα $s_1,\ s_2$, ένα στοιχείο s_{j_2} το οποίο θα υπερβαίνει από κοινού τα $s_{j_1},\ s_3$, ένα στοιχείο s_{j_3} το οποίο θα υπερβαίνει από κοινού τα $s_{j_3},\ s_4$ και ούτω καθεξής. Αρα έτσι μπορούμε να βρούμε ένα στοιχείο $s \in S$, για το οποίο θα είναι ταυτόχρονα $s \geq s_1,\ ...\ s \geq s_n$ άρα και $x \leq s_1 \vee ... \vee s_n \leq s$.

• Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι το x πληρεί τη συνθήκη της πρότασης και ότι είναι $x \leq \bigvee S$. Γράφουμε το S ως ένωση των πεπερασμένων υποσυνόλων του, οπότε, όπως έχουμε δει στην πρόταση I.3.1, είναι $\bigvee S = \bigvee\{\bigvee F |\ F \subseteq S,\ \ F$ πεπερασμένο$\}$, όπου το supremum στα δεξιά της ισότητας είναι κατευθυνόμενο. Αρα $x \leq \bigvee F$ όπου το F είναι πεπερασμένο υποσύνολο του S. Με άλλα λόγια το x είναι πεπερασμένο στοιχείο του δικτυωτού. ■

Ο όρος 'πεπερασμένο' μπορεί να αιτιολογηθεί και από τα παρακάτω παραδείγματα:

1) Στο δυναμοσύνολο ενός συνόλου X, διατεταγμένου με τη σχέση του περιέχεσθαι $\subseteq$, να στοιχείο $S \subseteq X$ είναι πεπερασμένο ως στοιχείο του δικτυωτού αν και μόνο αν είναι πεπερασμένο ως σύνολο. Γιατί αν το S είναι πεπερασμένο $S = \{x_1, ..., x_n\}$ και $S \subseteq \bigcup_{i \in I} Y_i$, τότε για κάθε $x_i \in S$ υπάρχει Y_i με $x_i \in Y_i$. Επειδή το πλήθος των x_i είναι πεπερασμένο, έπεται ότι $S \subseteq Y_{i_1} \cup ... \cup Y_{i_n}$. Αντιστρόφως, αν το S είναι πεπερασμένο στοιχείο του δικτυωτού, τότε αν το γράψουμε ως ένωση των μονοσυνόλων που περιέχει θα πρέπει το S να περιέχεται στην ένωση πεπερασμένου πλήθους μονοσυνόλων. Αρα το S είναι πεπερασμένο.

2) Στο σύνολο των υποομάδων μιας ομάδας, διατεταγμένου πάλι με τη σχέση του περιέχεσθαι, μια υποομάδα είναι πεπερασμένο στοιχείο του δικτυωτού αν και μόνο αν είναι πεπερασμένως γεννώμενη (έχει πεπερασμένο πλήθος γεννητόρων). Το επιχείρημα είναι όπως στο παραπάνω παράδειγμα, μόνο που αντί για τα στοιχεία της ομάδας αναφερόμαστε στους γεννήτορές της, στη μια κα-

τεύθυνση, ενώ στην άλλη, γράφουμε την υποομάδα ως ένωση των υποομάδων της που παράγονται από το κάθε ένα στοιχείο της υποομάδας.

Παρατήρηση Η παραπάνω πρόταση μας επιτρέπει να μιλάμε για πεπερασμένα στοιχεία σε πλαίσια όπου δεν είναι διαθέσιμα όλα τα suprema αλλά μόνο εκείνα πάνω σε κατευθυνόμενα υποσύνολα του διατεταγμένου συνόλου. Ετσι, για παράδειγμα διαπιστώνουμε ότι το σύνολο $\{(X,Y)\in P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N})|\ X\cap Y=\emptyset\}$ με την κατά σημείο διάταξη έχει suprema μόνο για κατευθυνόμενα υποσύνολά του (μπορούμε, για παράδειγμα, να δούμε ότι το supremum των ζευγών $(2\mathbb{N},2\mathbb{N}+1)$ και $(2\mathbb{N}+1,2\mathbb{N})$ δεν ορίζεται). Ομως η έννοια του πεπερασμένου στοιχείου είναι ιδιαίτερα σημαντική στη θεωρητική πληροφορική, όπου αναπαριστά έναν πεπερασμένο υπολογισμό, σε περιπτώσεις όπου μια, ενδεχομένως άπειρη, υπολογιστική διαδικασία προσεγγίζεται από τέτοιους. Στα παραδείγματα διατεταγμένων συνόλων που χρησιμοποιούνται ως πρότυπα για τη μελέτη τέτοιων υπολογιστικών διαδικασιών είναι συνηθισμένο να μην υπάρχουν όλα τα suprema αλλά μόνον αυτά πάνω σε κατευθυνόμενα υποσύνολα.

2.1.2 Πρόταση. *Εστω X ένα πλήρες δικτυωτό και x, y δύο πεπερασμένα στοιχεία του. Τότε και το supremum $x\vee y$ είναι πεπερασμένο.*

Απόδειξη Ας υποθέσουμε ότι για κάποιο κατευθυνόμενο υποσύνολο $S\subseteq X$ έχουμε ότι $x\vee y\leq\bigvee S$. Τότε είναι και $x\leq\bigvee S$ καθώς και $y\leq\bigvee S$. Αρα, αφού τα x και y είναι πεπερασμένα, υπάρχουν s και s' στο S, τέτοια ώστε $x\leq s$ και $y\leq s'$. Αφού το S είναι κατευθυνόμενο, υπάρχει ένα στοιχείο του s'' ε την ιδιότητα $s\leq s''$ και $s'\leq s''$, δηλαδή το s'' είναι άνω φράγμα των x και y. Αρα ισχύει ότι $x\vee y\leq s''$. ■

2.1.3 Πόρισμα. *Το σύνολο $K(X)$ των πεπερασμένων στοιχείων ενός πλήρους δικτυωτού X είναι ένα άνω ημιδικτυωτό.*

Απόδειξη Είναι προφανές ότι το ελάχιστο στοιχείο ενός διατεταγμένου συνόλου με κατευθυνόμενα suprema είναι πεπερασμένο. Αρα το σύνολο των πεπερασμένων στοιχείων ενός πλήρους δικτυωτού είναι κλειστό ως προς όλα τα πεπερασμένα suprema.

2.2 Ιδεώδη και φίλτρα σε ημιδικτυωτά

Εστω K ένα άνω ημιδικτυωτό (δηλαδή ένα διατεταγμένο σύνολο που κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του έχει supremum). Λέμε ότι το υποσύνολο $I\subseteq K$ είναι ένα **ιδεώδες** του K αν πληρεί τις εξής συνθήκες:

• Το ελάχιστο στοιχείο 0 του K (δηλαδή το supremum του κενού συνόλου) ανήκει στο I.

• Αν το x ανήκει στο I και $y \leq x$, τότε και το y ανήκει στο I.

• Αν τα x και y ανήκουν στο I τότε και το supremum τους $x \vee y$ ανήκει στο I.

Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι η τομή μίας οικογένειας ιδεωδών είναι ιδεώδες. Γιατί αν $\{I_j | j \in J\}$ είναι μια οικογένεια ιδεωδών τότε το ελάχιστο στοιχείο του K ανήκει στην τομή $\bigcap_{j\in J} I_j$, εφόσον ανήκει σε όλα τα μέλη της οικογένειας. Ομοίως, αν δυό στοιχεία x και y ανήκουν σε όλα τα ιδεώδη της οικογένειας, τότε και το supremum τους ανήκει σε όλα τα ιδεώδη της οικογένειας, άρα και στην τομή τους. Τέλος, αν το x ανήκει σε όλα ιδεώδη της οικογένειας και το y είναι μικρότερο ή ίσο του x τότε το y θα ανήκει σε όλα τα ιδεώδη της οικογένειας άρα και στην τομή τους. Συμπεραίνουμε λοιπόν την ακόλουθη:

2.2.1 Πρόταση. *Το σύνολο* $\mathrm{Idl}(K)$ *των ιδεωδών πάνω σε ένα άνω ημιδικτυωτό* K, *διατεταγμένο με τη σχέση* $\subseteq$ *του περιέχεσθαι είναι ένα πλήρες δικτυωτό.* ■

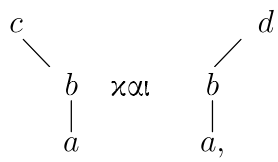
Ενα ιδεώδες είναι κλειστό ως προς πεπερασμένα suprema άρα είναι ϋποδομή' του άνω ημιδικτυωτού. Εχει όμως και μια παραπάνω ιδιότητα. Ας δούμε ένα παράδειγμα άνω ημιδικτυωτού και κάποια από τα ιδεώδη του: Το διατεταγμένο σύνολο K που παριστάνεται από το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} & e & \\ / & & \backslash \\ c & & d \\ \backslash & & / \\ & b & \\ & | & \\ & a & \end{array}$$

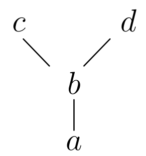
εύκολα διαπιστώνεται ότι είναι άνω ημιδικτυωτό και ότι το υποσύνολο

$$\begin{array}{ccc} & e & \\ / & & \backslash \\ c & & d \\ \backslash & & / \\ & a & \end{array}$$

είναι άνω ημιδικτυωτό αλλά δεν είναι ιδεώδες. Μεταξύ των ιδεωδών του αρχικού συνόλου είναι τα



των οποίων η ένωση είναι το σύνολο



που όμως δεν είναι ιδεώδες (το supremum των c και d δεν είναι στο σύνολο αυτό). Βλέπουμε λοιπόν ότι η ένωση ιδεωδών δεν είναι κατ᾽ ανάγκη ιδεώδες. Από την άλλη πλευρά όμως, αφού το σύνολο των ιδεωδών είναι, όπως είδαμε, πλήρες δικτυωτό, πρέπει να υπάρχει το supremum μέσα στο διατεταγμένο σύνολο $\mathrm{Idl}(K)$ των δυο ιδεωδών που είδαμε παραπάνω. Αυτό δίνεται από το ελάχιστο ιδεώδες που περιέχει την ένωσή τους. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα αυτό δεν είναι άλλο από ολόκληρο το σύνολο K.

Παρά τα παραπάνω ισχύει το ακόλουθο:

2.2.2 Πρόταση. *Η ένωση μίας κατευθυνόμενης οικογένειας ιδεωδών, πάνω σε ένα άνω ημιδικτυωτό, είναι ιδεώδες (και φυσικά σε αυτήν την περίπτωση δίνει το supremum της οικογένειας).*

Απόδειξη Είναι προφανές ότι το ελάχιστο στοιχείο του ημιδικτυωτού ανήκει στην ένωση. Επίσης αν το x ανήκει στην ένωση της οικογένειας των ιδεωδών και $y \leq x$ τότε το x ανήκει σε κάποιο από τα ιδεώδη, άρα εκεί θα ανήκει και το y ως μικρότερό του, άρα τελικά θα ανήκει και στην ένωση.

Εστω τώρα ότι τα x, y ανήκουν στην ένωση της κατευθυνόμενης οικογένειας. Τότε υπάρχουν $j,\ k \in J$ ώστε $x \in I_j,\ \ y \in I_k$. Αφού η οικογένεια είναι κατευθυνόμενη υπάρχει $l \in J$ έτσι ώστε $I_j \subseteq I_l$ και $I_k \subseteq I_l$. Αρα $x,\ y \in I_l$, οπότε και $x \vee y \in I_l$, άρα το $x \vee y$ ανήκει στην ένωση των ιδεωδών. ■

Αυτή η απλή περιγραφή των suprema κατευθυνόμενων οικογενειών ιδεωδών μας επιτρέπει να πούμε περισσότερα πράγματα για το σύνολο των ιδεωδών πάνω σε ένα άνω ημιδικτυωτό. Λέμε ότι ένα διατεταγμένο σύνολο X είναι ένα **αλγεβρικό δικτυωτό** αν πληρούνται οι εξής συνθήκες:

- Το X είναι πλήρες δικτυωτό και

• Κάθε στοιχείο του X είναι ίσο με το supremum των πεπερασμένων στοιχείων που είναι μικρότερα ή ίσα από αυτό.

Ο όρος αλγεβρικό δικτυωτό οφείλεται στο γεγονός ότι η δομή αυτή εντοπίστηκε μελετώντας τα διατεταγμένα σύνολα των υποομάδων μίας ομάδας, των υποδακτυλίων ενός δακτυλίου και γενικώτερα των υποδομών μίας αλγεβρικής δομής που ορίζεται με πράξεις που εφαρμόζονται πάνω σε ένα πεπερασμένο πλήθος ορισμάτων. Επίσης παραδείγματα αυτής της δομής αποτελούν οι κανονικές υποομάδες μίας ομάδας, τα αμφίπλευρα ιδεώδη ενός δακτυλίου κι άλλες τέτοιες κατασκευές που αντιστοιχούν στην έννοια της ΄σχέσης ισοδυναμίας που σέβεται τις πράξεις΄ σε μιά αλγεβρική δομή.

2.2.3 Πρόταση. *Εστω K ένα άνω ημιδικτυωτό και* $\mathrm{Idl}(K)$ *το σύνολο των ιδεωδών πάνω σ΄ αυτό, διατεταγμένο με τη σχέση του περιέχεσθαι. Τότε το* $\mathrm{Idl}(K)$ *είναι αλγεβρικό δικτυωτό*

Απόδειξη: Εχουμε ήδη δει ότι το $\mathrm{Idl}(K)$ είναι πλήρες δικτυωτό. Αρκεί επομένως να δείξουμε ότι κάθε στοιχείο του $\mathrm{Idl}(K)$ είναι supremum (κατ΄ ανάγκη κατευθυνόμενο) πεπερασμένων στοιχείων.

Τα ΄κύρια΄ ιδεώδη, της μορφής $\downarrow(x)$, όπου $x \in K$, είναι πεπερασμένα στοιχεία του $\mathrm{Idl}(K)$. Γιατί αν $\{I_j | j \in J\}$ είναι μια κατευθυνόμενη οικογένεια ιδεωδών και

$$\downarrow(x) \subseteq \bigvee_j I_j = \bigcup_j I_j$$

τότε για κάποιο $j \in J$, $x \in I_j$ άρα $\downarrow(x) \subseteq I_j$. Επιπλέον για κάθε ιδεώδες I ισχύει ότι $I = \bigcup\{\downarrow(x) | x \in I\}$. ■

Η έννοια του **φίλτρου** είναι η δυϊκή προς αυτή του ιδεώδους. Αν τώρα K ένα **κάτω** ημιδικτυωτό (δηλαδή ένα διατεταγμένο σύνολο που κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του έχει infimum), λέμε ότι το υποσύνολο $F \subseteq K$ είναι ένα φίλτρο του K αν πληρεί τις εξής συνθήκες:

• Το μέγιστο στοιχείο 1 του K (δηλαδή το infimum του κενού συνόλου) ανήκει στο F.

• Αν το x ανήκει στο F και $y \geq x$, τότε και το y ανήκει στο F.

• Αν τα x και y ανήκουν στο F τότε και το infimum $x \wedge y$ ανήκει στο F.

Ως παράδειγμα φίλτρου ανφέρουμε το ακόλουθο, με σημαντικές χρήσεις στην ανάλυση και τη λογική: Εστω $P(\mathbb{N})$ το δυναμοσύνολο των φυσικών αριθμών με τη διάταξη του περιέχεσθαι. Τοτε το σύνολο

$$\mathcal{F} = \{X \subseteq \mathbb{N} | \ \mathbb{N} - X \text{ πεπερασμένο}\}$$

είναι ένα φίλτρο. Επίσης ας σημειώσουμε ότι αν το L είναι ένα δικτυωτό, τότε ένα φίλτρο πάνω στο L είναι ένα ιδεώδες πάνω στο L, εφοδιασμένο με τη δυϊκή διάταξη. Ισχύει δηλαδή ότι

$$Filt(L) = \mathrm{Idl}(L^{op})$$

Επομένως όλα τα δομικά χαρακτηριστικά του συνόλου των ιδεωδών πάνω σε ένα δικτυωτό αποτελούν και γνωρίσματα του συνόλου των φίλτρων πάνω σε αυτό. Θα επανέλθουμε στην έννοια του φίλτρου παρακάτω, στην περίπτωση που το L είναι μία άλγεβρα Boole, οπότε η έννοια του φίλτρου αποκτά ξεχωριστή σημασία από λογική σκοπιά.

2.3 Τα αλγεβρικά δικτυωτά και η αναπαράστασή τους

Σκοπός μας εδώ είναι να δείξουμε ότι κάθε αλγεβρικό δικτυωτό είναι ισόμορφο με ένα σύνολο ιδεωδών πάνω σε ένα άνω ημιδικτυωτό. Για να πετύχουμε κάτι τέτοιο καταλήγουμε να συγκρίνουμε ένα σύνολο της μορφής $\mathrm{Idl}(K)$ με το αλγεβρικό δικτυωτό X. Η σύγκριση αυτή γίνεται μέσω μιάς κανονικά επαγόμενης απεικόνισης, που όμοιά της έχουμε συναντήσει κατά τη συζήτηση της πλήρωσης ενός διατεταγμένου συνόλου, στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Παρατηρήσαμε ήδη ενωρίτερα, ότι η εμφύτευση του Yoneda΄

$$y\colon K \to \text{Κάτω σύνολα του } K$$

παίρνει ουσιαστκά τιμές στο σύνολο των ιδεωδών $\mathrm{Idl}(K)$, αφού το σύνολο $\downarrow\!(x)$ είναι ιδεώδες. Η εμφύτευση λοπόν $y\colon K \to \mathrm{Idl}(K)$ έχει μία ιδιότητα παρεμφερή με την οικεία από το προηγούμενο κεφάλαιο.

2.3.1 Πρόταση. *Εστω K ένα διατεταγμένο σύνολο και $f\colon K \to X$ μία συνάρτηση που διατηρεί τη διάταξη προς ένα σύνολο με κατευθυνόμενα suprema. Τότε υπάρχει μία επέκταση της f, $\hat{f}\colon \mathrm{Idl}(K) \to X$, (δηλαδή έχει την ιδιότητα $\hat{f} \circ y = f$) που διατηρεί κατευθυνόμενα suprema και είναι μοναδική με την ιδιότητα αυτή.*

Απόδειξη: Οπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, ορίζουμε την $\hat{f}\colon \mathrm{Idl}(K) \to X$ ως εξής:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(I) &= \bigvee\{f(p) \in X \mid y(p) \subseteq I\} \\
&= \bigvee\{f(p) \in X \mid \downarrow(p) \subseteq I\} \\
&= \bigvee\{f(p) \in X \mid p \in I\}
\end{aligned}$$

Ετσι όπως ορίστηκε είναι τώρα προφανές ότι η $\hat{f}$ διατηρεί τη διάταξη. Αυτό έπεται εξάλλου από το γεγονός ότι η $\hat{f}$ διατηρεί κατευθυνόμενα suprema. Αυτό το τελευταίο βασίζεται ακριβώς στο γεγονός ότι μόνο οι ενώσεις **κατευθυνόμενων** οικογενειών από ιδεώδη είναι ιδεώδη (πρόταση 2.2.2):

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\bigcup I_k) &= \bigvee\{f(p) \in X \mid p \in \bigcup I_k\} \\
&= \bigvee\{f(p) \in X \mid \exists k\ p \in I_k\} \\
&= \bigvee \bigcup_k \{f(p) \in X \mid p \in I_k\} \\
\text{(από το Λήμμα 1.7.4)} &= \bigvee_k \bigvee\{f(p) \in X \mid p \in I_k\} \\
&= \bigvee_k \{\hat{f}(I_k) \mid k\}
\end{aligned}$$

Η $\hat{f}$ έχει την ιδιότητα $\hat{f} \circ y = f$:

$$\begin{aligned}
(\hat{f} \circ y)(p) &= \hat{f}(y(p)) \\
&= \bigvee\{f(q) \in X \mid q \in \downarrow(p)\} \\
&= f(p)
\end{aligned}$$

Τέλος η απόδειξη ότι η $\hat{f}$ είναι μοναδική με αυτές τις δύο ιδιότητες είναι όπως στο Θεώρημα 1.7.1. ■

Να κλείσουμε τη σχετική συζήτηση λέγοντας ότι η πραγματική θεωρητική αξία της παραπάνω πρότασης έγκειται στο ότι παραμένει έγκυρη για μία 'χαλαρώτερη' έννοια ιδεώδους, που δεν προαπαιτεί την ύπαρξη suprema και που μπορεί να οριστεί για τυχαίο διατεταγμένο σύνολο. Εχουμε τότε ότι το σύνολο αυτών των 'χαλαρών ιδεωδών' έχει κατευθυνόμενα (αλλά όχι γενικά) suprema και ότι απότελεί, με την οικεία έννοια, την πλήρωση του διατεταγμένου συνόλου ως προς κατευθυνόμενα suprema.

Ας έλθουμε όμως στο ζήτημα που κυρίως μας απασχολεί

2.3.2 Θεώρημα. *Κάθε αλγεβρικό δικτυωτό είναι ισόμορφο (ως διατεταγμένο σύνολο) με ένα της μορφής* $\mathrm{Idl}(K)$, *για κάποιο άνω ημιδικτυωτό* K.

Απόδειξη Πρέπει, ξεκινώντας από ένα αλγεβρικό δικτυωτό X, να βρούμε ένα άνω ημιδικτυωτό και να προσπαθήσουμε να εμφανίσουμε το αλγεβρικό δικτυωτό ως σύνολο ιδεωδών πάνω σε αυτό. Η εμφανής επιλογή είναι αυτή του άνω ημιδικτυωτού των πεπερασμένων στοιχείων του X.

Ας προσπαθήσουμε να βρούμε μια κατάλληλα ορισμένη απεικόνιση

$$g\colon \mathrm{Idl}(K(X)) \to X$$

και να αποδείξουμε ότι αποτελεί ισομορφισμό. Υπάρχει μια προφανής απεικόνιση που διατηρεί τη διάταξη, $i\colon K(X) \to X$, που είναι η εμφύτευση του συνόλου των πεπερασμένων στοιχείων μέσα σε όλο το δικτυωτό (δρα δηλαδή ως η ταυτοτική απεικόνιση πάνω στα στοιχεία του $K(X)$.) Σύμφωνα με όσα έχουμε δει αυτή επεκτείνεται σε μια απεικόνιση $\overline{i}\colon \mathrm{Idl}(K(X)) \to X$, που διατηρεί κατευθυνόμενα suprema(άρα και τη διάταξη). Η $\overline{i}$ ορίζεται από τον τύπο $\overline{i}(I) = \bigvee\{i(p) |\ p \in I,\ p \text{ πεπερασμένο}\}$. Αρκεί να δείξουμε ότι η $\overline{i}$ ανακλά τη διάταξη και είναι επί. Τότε ξέρουμε ότι η $\overline{i}$ θα είναι ισομορφισμός. Πράγματι:

• Η $\overline{i}$ είναι επί γιατί κάθε στοιχείο ενός αλγεβρικού δικτυωτού είναι supremum των πεπερασμένων στοιχείων που είναι μικρότερα ή ίσα με αυτό, δηλαδή κάθε $x \in X$ είναι

$$\begin{aligned} x &= \bigvee\{p |\ p \le x,\ p \text{ πεπερασμένο}\} \\ &= \bigvee\{i(p) |\ p \in \downarrow(x),\ p \text{ πεπερασμένο}\} \\ &= \overline{i}(\downarrow(x)). \end{aligned}$$

• Η $\overline{i}$ ανακλά τη διάταξη γιατί αν $\overline{i}(I) \le \overline{i}(J)$ δηλαδή

$$\bigvee\{p |\ p \in I,\ p \text{ πεπερασμένο}\} \le \bigvee\{s |\ s \in J,\ s \text{ πεπερασμένο}\}$$

τότε για κάθε πεπερασμένο $p \in I$ υπάρχει πεπερασμένο $s \in J$, τέτοιο ώστε $p \le s$ (αυτό από την ιδιότητα που ορίζει την έννοια του πεπερασμένου στοιχείου). Αφού το J είναι ιδεώδες, προκύπτει ότι, για κάθε $p \in I$ είναι και $p \in J$, δηλαδή $I \subseteq J$. Πράγματι λοιπόν, η $\overline{i}$ ανακλά τη διάταξη. ■

Κατ΄ αυτόν τον τρόπο έχουμε ουσιαστικά δείξει ότι υπάρχει μια ένα-προς-ένα αντιστοιχία ανάμεσα σε δύο κλάσεις δομών, ως εξής:

Ιδεώδη: (Ανω Ημιδικτυωτά) $\longleftrightarrow$ (Αλγεβρικά Δικτυωτά): Πεπερασμένα στοιχεία, μπορούμε επομένως να πούμε ότι οι δύο αυτές έννοιες έχουν την ίδια έκταση.

2.4 Επιμεριστικά δικτυωτά

Επικεντρώνουμε εδώ την προσοχή μας σε μια σειρά από επιμεριστικούς νόμους που μπορεί να ισχύουν σε ένα δικτυωτό και εξετάζουμε κάποιες συνέπειές τους και τις σχέσεις ανάμεσά τους.

Λέμε ότι ένα δικτυωτό είναι επιμεριστικό αν, για οποιαδήποτε τρια στοιχεία του, ικανοποιείται η ισότητα

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

2.4.1 Πρόταση. *Σε ένα επιμεριστικό δικτυωτό ικανόποιείται και η δυϊκή της παραπάνω ισότητας, δηλαδή, για οποιαδήποτε τρια στοιχεία του δικτυωτού, έχουμε:*

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

Απόδειξη: Εφαρμόζοντας διαδοχικά τον ισχύοντα επιμεριστικό νόμο έχουμε

$$\begin{aligned}
(x \vee y) \wedge (x \vee z) &= ((x \vee y) \wedge x) \vee ((x \vee y) \wedge z) \\
&= x \vee ((x \vee y) \wedge z) \\
&= x \vee ((x \wedge z) \vee (y \wedge z)) \\
&= (x \vee (x \wedge z)) \vee (y \wedge z) \\
&= x \vee (y \wedge z)
\end{aligned}$$

■

Επίσης μας ενδιαφέρει η επιμεριστικότητα, σε ένα πλήρες δικτυωτό του infimum ως προς άπειρα suprema, δηλαδή η ισότητα

$$x \wedge (\bigvee S) = \bigvee \{x \wedge s | s \in S\},$$

είτε στην περίπτωση που το S είναι τυχαίο υποσύνολο του πλήρους δικτυωτού, είτε στην περίπτωση που το S είναι κατευθυνόμενο υποσύνολο του δικτυωτού. Εδώ η ανισότητα

$$\bigvee\{x \wedge s | s \in S\} \leq x \wedge (\bigvee S)$$

ισχύει πάντα γιατί το κάθε $x \wedge s$ είναι μικρότερο ή ίσο του $x \wedge (\bigvee S)$, άρα το ίδιο θα ισχύει και για το supremum όλων των $x \wedge s$.

Να παρεμβάλουμε εδώ μιά παρατήρηση: Συχνά, ενίοτε σε σχέση με τη διαπίστωση της ισχύος ενός επιμεριστικού νόμου, χρειάζεται κανείς να δείξει κάποιες ανισότητες σε μερικώς διατεταγμένα σύνολα. Εστω λοιπόν ότι θέλουμε να δείξουμε μιά ανισότητα

$$\Phi \leq \Psi,$$

όπου Φ και Ψ δύο εκφράσεις που μπορεί να περιέχουν διάφορα infima ή suprema, ως προς πεπερασμένες ή άπειρες οικογένειες στοιχείων του συνόλου. Τότε για να δείξουμε την ανισότητα μας βολεύει καμιά φορά να δείξουμε καλλίτερα ότι, για ένα τυχαίο στοιχείο t του συνόλου ισχύει

$$t \leq \Phi \Rightarrow t \leq \Psi,$$

πράγμα που είναι ισοδύναμο με τη ζητούμενη ανισότητα. όπως εύκολα καταλαβαίνουμε. Αν όμως βρισκόμαστε σε ένα αλγεβρικό δικτυωτό, όπου καθε στοιχείο του είναι supremum πεπερασμένων στοιχείων, τότε αρκεί να δείξουμε ότι

$$\text{για κάθε } t \text{ πεπερασμένο} \quad t \leq \Phi \Rightarrow t \leq \Psi.$$

Αυτό χρησιμοποιούμε και στην παρακάτω

2.4.2 Πρόταση. *Σε ένα αλγεβρικό δικτυωτό X ισχύει πάντα η ισότητα*

$$x \wedge (\bigvee S) = \bigvee\{x \wedge s | s \in S\},$$

όπου το x είναι ένα οποιοδήποτε στοιχείο και το S ένα οποιοδήποτε ***κατευθυνόμενο*** *υποσύνολο του X.*

Απόδειξη: Οπως είπαμε παραπάνω, η ανισότητα

$$\bigvee\{x \wedge s | s \in S\} \leq x \wedge (\bigvee S)$$

ισχύει πάντα, άρα δείχνουμε την αντίστροφη ανισότητα. Εστω λοιπόν ένα πεπερασμένο $t \in X$, για το οποίο ισχύει

$$t \leq x \wedge (\bigvee S).$$

Τότε ισχύουν ταυτόχρονα $t \leq x$ και $t \leq \bigvee S$. Από το γεγονός ότι το t είναι πεπερασμένο και το S κατευθυνόμενο έπεται ότι υπάρχει $s \in S$ τέτοιο ώστε $t \leq s$. Αρα, για το συγκεκριμένο $s \in S$ ισχύει ότι $t \leq x \wedge s$. Επεται ότι $t \leq \bigvee\{x \wedge s | s \in S\}$. ■

Ερχόμενοι στις ενδεχόμενες συσχετίσεις μεταξύ των διαφόρων επιμεριστικών νόμων παρατηρούμε τα εξής: Κατ΄ αρχήν ο άπειρος επιμεριστικός νόμος

$$x \wedge (\bigvee S) = \bigvee\{x \wedge s | s \in S\},$$

όπου τώρα το S είναι **οποιοδήποτε** υποσύνολο ενός πλήρους δικτυωτού έπεται, τετριμένα, τον πεπερασμένο επιμεριστικό νόμο καθώς και εκείνον του επιμερισμού πάνω σε suprema κατευθυνόμενων υποσυνόλων. Ισχύει όμως και το αντίστροφο. Από τη στιγμή που κάθε supremum γράφεται ως ένα κατευθυνόμενο τέτοιο πάνω σε suprema πεπερασμένων υποσυνόλων, έπεται ότι για να διαπιστώσει κανείς τον γενικό άπειρο επιμεριστικό νόμο αρκεί να διαπιστώσει τον πεπερασμένο επιμεριστικό νόμο καθώς και αυτόν του επιμερισμού του (πεπερασμένου) infimum ως προς κατευθυνόμενα suprema. Ως εφαρμογή αυτού έχουμε το παρακάτω πολύ σημαντικό

2.4.3 Θεώρημα. *Εστω D ένα επιμεριστικό δικτυωτό. Τότε το σύνολο* $\mathrm{Idl}(D)$ *των ιδεωδών πάνω σ΄ αυτό είναι ένα αλγεβρικό δικτυωτό που ικανοποιεί τον άπειρο επιμεριστικό νόμο*

$$I \wedge (\bigvee S) = \bigvee\{I \wedge J | J \in S\},$$

*για οποιοδήποτε ιδεώδες I και **οποιοδήποτε** υποσύνολο S του* $\mathrm{Idl}(D)$.

Απόδειξη Ξέρουμε ήδη ότι το $\mathrm{Idl}(D)$ είναι ένα αλγεβρικό δικτυωτό, άρα από την προηγούμενη Πρόταση ικανοποιεί τον επιμεριστικό νόμο αναφορικά με suprema κατευθυνόμενων υποσυνόλων. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι, για τρια οποιαδήποτε ιδεώδη του D ισχύει πάντα ότι

$$I \cap (J \vee K) = (I \cap J) \vee (I \cap K)$$

και πιο συγκεκριμένα την ανισότητα

$$I \cap (J \vee K) \subseteq (I \cap J) \vee (I \cap K),$$

μιας και στην αντίθετη κατεύθυνση η ανισότητα ισχύει πάντα.

Ομως εδώ έχουμε να κάνουμε έναν υπολογισμό που περιλαμβάνει το supremum δύο ιδεωδών και το supremum αυτό, όπως έχουμε ήδη πει, δεν δίνεται από την ένωση των ιδεωδών (η οποία μπορεί να τύχει να μην είναι ιδεώδες). Το supremum των ιδεωδών J και K δίνεται από το σύνολο

$$J \vee K = \{x \in D | \text{ υπάρχουν } y \in J,\ z \in K \text{ ώστε } x \leq y \vee z\}$$

Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι το σύνολο αυτό είναι ιδεώδες: Είναι προφανές ότι το ελάχιστο στοιχείο ανήκει εκεί και ότι είναι κάτω-κλειστό. Επιπλέον αν $x,\ x' \in J \vee K$, τότε υπάρχουν $y \in J,\ z \in K$ ώστε $x \leq y \vee z$ καθώς και $y' \in J,\ z' \in K$ ώστε $x' \leq y' \vee z'$. Αρα $x \vee x' \leq (y \vee y') \vee (z \vee z')$, όπου $y \vee y' \in J$, $z \vee z' \in K$. Επίσης, εύκολα διαπιστώνουμε ότι $J \subseteq J \vee K$ και $K \subseteq J \vee K$ (γιατί π.χ, αν $x \in J$ τότε $x = x \vee 0 \in J \vee K$.) Τέλος, αν το L είναι ένα ιδεώδες που περιέχει τα J και K, τότε, αν $x \in J \vee K$, είναι $x \leq y \vee z$, για κάποια $y \in J$ (άρα και για $y \in L$) και $z \in K$ (άρα και για $z \in L$). Επεται ότι $x \in L$.

Ας έρθουμε τώρα στην ανισότητα που επιθυμούμε να δείξουμε, καθαυτή: Ενα στοιχείο $x \in I \cap (J \vee K)$ είναι ένα στοιχείο του I, για το οποίο υπάρχουν $y \in J$ και $z \in K$, ώστε $x \leq y \vee z$. Είναι

$$\begin{aligned} x &= x \wedge (y \vee z) \\ &= (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \end{aligned}$$

όπου τώρα $x \wedge y \leq x \in I$ αλλά και $x \wedge y \leq y \in J$ και ομοίως $x \wedge z \leq x \in I$ αλλά και $x \wedge z \leq z \in K$. Αρα $x \wedge y \in I \cap J$ και $x \wedge z \in I \cap K$. Επεται ότι

$$x = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \in (I \cap J) \vee (I \cap K),$$

όπως επιθυμούσαμε. ■

Καλούμε ένα πλήρες δικτυωτό που ικανοποιεί τον γενικό άπειρο επιμεριστικό νόμο **πλήρες επιμεριστικό δικτυωτό** ή **πλαίσιο** (frame στην αγγλική βιβλιογραφία). Σημειώνουμε ότι το δικτυωτό των ανοικτών υποσυνόλων ενός τοπολογικού χώρου αποτελεί παράδειγμα τέτοιας δομής.

Αναδιατυπώνοντας λοιπόν το παραπάνω Θεώρημα, δείξαμε ότι το σύνολο των ιδεωδών πάνω σ΄ ένα επιμεριστικό δικτυωτό είναι ένα πλήρως επιμεριστικό αλγεβρικό δικτυωτό. Να σημειώσουμε ότι επιπλέον τα πεπερασμένα στοιχεία του συνόλου $\mathrm{Idl}(D)$, όπου το D είναι τώρα δικτυωτό, είναι κλειστά ως προς πεπερασμένα infima (συμπεριλαμβανομένου και του infimum της κενής οικογένειας, δηλαδή του μέγιστου στοιχείου $D \in \mathrm{Idl}(D)$) Γιατί, απλούστατα, τα πεπερασμένα στοιχεία είναι της μορφής $\downarrow(a)$ και $\downarrow(a) \cap \downarrow(b) = \downarrow(a \wedge b)$. Επίσης αν για μια κατευθυνόμενη οικογένεια ιδεωδών έχουμε $\bigcup I_k = D$ τότε $1 \in I_k$, για κάποιο k, άρα $I_k = D$.

Από την άλλη πλευρά, αν έχουμε ένα αλγεβρικό δικτυωτό X, του οποίου τα πεπερασμένα στοιχεία είναι κλειστά ως προς τα πεπερασμένα infima τότε το σύνολο $K(X)$ των πεπερασμένων στοιχείων του έχει δομή δικτυωτού. Αν επιπλέον το X είναι πλήρως επιμεριστικό, τότε το $K(X)$ κληρονομεί την (πεπερασμένη) επιμεριστικότητα από το X. Για λόγους που έχουν την καταγωγή τους στην τοπολογία, καλούμε ένα πλήρως επιμεριστικό αλγεβρικό δικτυωτό, του οποίου τα πεπερασμένα στοιχεία είναι είναι κλειστά ως προς πεπερασμένα infima, **συνοχικό πλαίσιο** (αποδεικνύεται ότι τα συνοχικά πλαίσια είναι ακριβώς τα δικτυωτά των ανοικτών υποσυνόλων εκείνων των τοπολογικών χώρων που ονομάζονται συνοχικοί ή φασματικοί)

Από αυτήν τις παραπάνω παρατηρήσεις και από το αμέσως προηγούμενο θεώρημα, καταλήγουμε ότι η ισοδυναμία των εννοιών της δομής αλγεβρικού δικτυωτού, από τη μιά, και της δομής άνω ημιδικτυωτού, από την άλλη, περιορίζεται σε μια ισοδυναμία ως εξής:

$$\begin{array}{ccc} (\text{Ανω Ημιδικτυωτά}) & \cong & (\text{Αλγεβρικά Δικτυωτά}) \\ \upharpoonleft & & \upharpoonleft \\ (\text{Επιμεριστικά Δικτυωτά}) & \cong & (\text{Συνοχικά Πλαίσια}) \end{array}$$

2.5 Αλγεβρες Boole

Μία **άλγεβρα Boole** είναι ένα επιμεριστικό δικτυωτό B τέτοιο ώστε για κάθε στοιχείο του x να ορίζεται ένα x' με τις ιδιότητες

$$x \wedge x' = 0 \text{ και } x \vee x' = 1 \ (*)$$

2.5.1 Πρόταση. *Ενα στοιχείο ενός επιμεριστικού δικτυωτού με τις ιδιότητες* $(*)$ *είναι μοναδικό.*

Απόδειξη: Εστω ένα στοιχείο x'' με τις ιδιότητες

$$x \wedge x'' = 0 \text{ και } x \vee x'' = 1$$

Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} x'' &= x'' \wedge 1 \\ &= x'' \wedge (x \vee x') \\ &= (x'' \wedge x) \vee (x'' \wedge x') \\ &= 0 \vee (x'' \wedge x') \\ &= x'' \wedge x' \quad \text{άρα} \\ x'' &\leq x' \end{aligned}$$

καθώς και

$$\begin{aligned} x'' &= x'' \vee 0 \\ &= x'' \vee (x \wedge x') \\ &= (x'' \vee x) \wedge (x'' \vee x') \\ &= 1 \wedge (x'' \vee x') \\ &= x'' \vee x \quad \text{άρα} \\ x' &\leq x'' \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε ότι $x' = x''$ ■

Το μοναδικό αυτό στοιχείο με τις ιδιότητες $(*)$ το λέμε **συμπλήρωμα** του x και το συμβολίζουμε με $\neg x$. Παρατηρούμε ότι σε ένα δικτυωτό $\neg 1 = 0$ και $\neg 0 = 1$.

Παραδείγματα 1. Το δυναμοσύνολο ενός οποιοδήποτε συνόλου, με τη σχέση του περιέχεσθαι, είναι άλγεβρα Boole.

2. Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας των προτάσεων της κλασικής λογικής (όπου δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες αν καθεμία από τις δυό συνεπάγεται την άλλη) με τη σχέση της λογικής συνεπαγωγής, δηλαδή $\| p \| \leq \| q \|$ αν $p \to q$, είναι παράδειγμα άλγεβρας Boole. Η συγκεκριμένη άλγεβρα λέγεται άλγεβρα Lindenbaum και μπορεί να περιγραφεί ως η ελεύθερη άλγεβρα Boole πάνω σ΄ ένα σύνολο προτασιακών μεταβλητών.

3. Το σύνολο των ομαλών ανοικτών υποσυνόλων ενός τοπολογικού χώρου (όπου ένα ανοικτό υποσύνολο $U \subseteq X$ λέγεται ομαλό αν $U = Int(\overline{U})$).

Το σύνολο των ιδεωδών πάνω σε μία άλγεβρα Boole είναι ένα πλήρως επιμεριστικό αλγεβρικό δικτυωτό, έχει τα πεπερασμένα του στοιχεία κλειστά ως προς πεπερασμένα infima αλλά έχει το επιπλέον χαρακτηριστικό ότι το κάθε στοιχείο του είναι supremum 'συμπληρωμένων' στοιχείων (δηλαδή στοιχείων που έχουν ένα μοναδικό συμπλήρωμα, με την παραπάνω έννοια). Πράγματι κάθε ιδεώδες σε μία άλγεβρα Boole είναι supremum στοιχείων της μορφής $\downarrow(x)$, $x \in B$, όπως γνωρίζουμε από τη γενικώτερη θεωρία, αλλά εδώ ισχύει επιπλέον ότι

$$\downarrow(x) \cap \downarrow(\neg x) = \{0\} \quad \text{και} \quad \downarrow(x) \vee \downarrow(\neg x) = B$$

(το πρώτο δικαιολογείται από το ότι αν $y \leq x$ και $y \leq \neg x$ τότε $y \leq x \wedge \neg x = 0$ και το δεύτερο από το ότι $1 = x \vee \neg x \in \downarrow(x) \vee \downarrow(\neg x)$. Ενα πλαίσιο με την ιδότητα αυτή, ότι δηλαδή κάθε στοιχείο του είναι supremum συμπληρωμένων στοιχείων λέγεται (για λόγους που βρίσκουν πάλι την προέλευσή τους στην τοπολογία) **μηδενοδιάστατο**.

Αναφορικά με τα συμπληρωμένα στοιχεία ενός επιμεριστικού δικτυωτού παρατηρούμε ότι

2.5.2 Πρόταση. *Σε ένα επιμεριστικό δικτυωτό D αν τα x, y είναι συμπληρωμένα τότε και τα $x \vee y$, $x \wedge y$, $\neg x$ είναι συμπληρωμένα.*

Απόδειξη: Το συμπλήρωμα του $x \vee y$ είναι το $\neg x \wedge \neg y$ γιατί

$$\begin{aligned}(x \vee y) \vee (\neg x \wedge \neg y) &= (x \vee y \vee \neg x) \wedge (x \vee y \vee \neg y) \\ &= 1 \wedge 1 \\ &= 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x \vee y) \wedge (\neg x \wedge \neg y) &= (x \wedge \neg x \wedge \neg y) \vee (y \wedge \neg x \wedge \neg y) \\ &= 0 \vee 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

και ομοίως το συμπλήρωμα του $x \wedge y$ είναι το $\neg x \vee \neg y$.

Επίσης, από τη μοναδικότητα του συμπληρώματος, κι επειδή

$$\begin{aligned} \neg x \vee \neg\neg x &= \neg(x \wedge \neg x) \\ &= \neg 0 \\ &= 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg x \wedge \neg\neg x &= \neg(x \vee \neg x) \\ &= \neg 1 \\ &= 0, \end{aligned}$$

έπεται ότι το $\neg x$ είναι συμπληρωμένο. ■

2.5.3 Πόρισμα. *Το σύνολο των συμπληρωμένων στοιχείων ενός μηδενοδιάστατου πλήρως επιμεριστικού δικτυωτού αποτελούν μία άλγεβρα Boole.*

2.5.4 Πόρισμα. *Σε μία άλγεβρα Boole ισχύουν οι νόμοι του De Morgan:*

$$\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y \quad \textit{και} \quad \neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y,$$

καθώς και η αρχή 'αρνηση της άρνησης ισούται με τη θέση'

$$\neg\neg x = x.$$

Αν τέλος υποθέσουμε ότι έχουμε ένα μηδενοδιάστατο πλαίσιο που είναι επιπλέον **συμπαγές**, τότε προκύπτει ότι τα συμπληρωμένα του στοιχεία είναι πεπερασμένα. Γιατί, αν $b \leq \bigvee x_i$, όπου η οικογένεια $\{x_i |\ i \in I\}$ είναι κατευθυνόμενη, τότε

$$1 = \neg b \vee b = \neg b \vee \bigvee x_i = \bigvee(\neg b \vee x_i),$$

άρα υπάρχει i για το οποίο $1 = \neg b \vee x_i$, οπότε

$$b = b \wedge 1 = b \wedge (\neg b \vee x_i) = b \vee x_i,$$

άρα $b \leq x_i$.

Από τις παραπάνω παρατηρήσεις καταλήγουμε ότι η ισοδυναμία των εννοιών της δομής αλγεβρικού δικτυωτού, από τη μιά, και της δομής άνω ημιδικτυωτού, από την άλλη, περιορίζεται σε μια ισοδυναμία ανάμεσα σε άλγεβρες Boole, από τη μιά, και συμπαγή μηδενοδιάστατα πλαίσια, από την άλλη πλευρά:

$$
\begin{array}{ccc}
\text{(Ανω Ημιδικτυωτά)} & \cong & \text{(Αλγεβρικά Δικτυωτά)} \\
\upharpoonleft & & \upharpoonleft \\
\text{(Επιμεριστικά Δικτυωτά)} & \cong & \text{(Συνοχικά Πλαίσια)} \\
\upharpoonleft & & \upharpoonleft \\
\text{(Αλγεβρες Boole)} & \cong & \text{(Συμπαγή Μηδενοδιάστατα Πλαίσια)}
\end{array}
$$

Να κλείσουμε με ένα σχόλιο για την έννοια του φίλτρου πάνω σε μιά άλγεβρα Boole(σε ότι ακολουθεί μπορούμε να έχουμε στο μυαλό μας το παράδειγμα της άλγεβρας Lindembaum που προαναφέραμε): Αν ορίσουμε την πράξη της συνεπαγωγής σε μια άλγεβρα Boole ως $a \to b = \neg a \vee b$, παρατηρούμε ότι ένα φίλτρο F πάνω στη άλγεβρα Boole έχει τις εξής ιδιότητες

- $1 \in F$ (εξ' ορισμού) και
- $a \in F$ και $a \to b \in F$ έπονται ότι $b \in F$ (γιατί $b = a \wedge (\neg a \vee b) = 0 \vee b$)

Αντιστρόφως, ένα υποσύνολο $F \subseteq B$ της άλγεβρας Boole με τις δύο παραπάνω ιδιότητες είναι ένα φίλτρο, γιατί αν $a \in F$ και $a \leq b$ τότε $a \to b = 1$ (δείτε την άσκηση 7, παρακάτω) άρα $b \in F$. Επιπλέον αν $a,\ b \in F$ τότε, επειδή

$$
\begin{aligned}
a \to (a \wedge b) &= \neg a \vee (a \wedge b) \\
&= (\neg a \vee a) \wedge (\neg a \vee b) \\
&= \neg a \vee b \\
&\geq b,
\end{aligned}
$$

άρα $a \to (a \wedge b) \in F$, από τη δεύτερη ιδιότητα έπεται ότι $a \wedge b \in F$. Με άλλα λόγια, ένα υποσύνολο $F \subseteq B$ με τις δύο παραπάνω ιδιότητες είναι ένα φίλτρο. Ομως, στο παράδειγμα όπου B είναι η άλγεβρα Lindembaum του προτασιακού λογισμού, ένα υποσύνολο της άλγεβρας με τις δύο παραπάνω ιδιότητες δεν είναι τίποτε άλλο από ένα σύνολο προτάσεων που περιέχει την ταυτολογία και είναι κλειστό ως προς τον κανόνα εξαγωγής λογικών συμπερασμάτων, γνωστού ως modus ponens. Πρόκειται δηλαδή γι΄ αυτό που στην Λογική ορίζουμε ως μια **θεωρία**. Αρα φίλτρα και λογικές θεωρίες είναι το ίδιο πράγμα.

2.6 Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι, δεδομένου ενός άνω ημιδικτυωτού P, ο ισομορφισμός μεταξύ κάτω συνόλων του P και συναρτήσεων που αντιστρέφουν τη διάταξη από το P στο 2 περιορίζεται σε έναν ισομορφισμό ανάμεσα στο σύνολο των ιδεωδών $\mathrm{Idl}(P)$ πάνω στο P, από τη μια πλευρά, και στο σύνολο των συναρτήσεων $f\colon P \to 2$ που στέλνουν πεπερασμένα suprema σε πεπερασμένα infima, από την άλλη.

2.α) Εστω X ένα πλήρες δικτυωτό και $j\colon X \to X$ μια συνάρτηση που διατηρεί τη διάταξη και ικανοποιεί τις σχέσεις $id_X \leq j = j^2$. Δείξτε ότι το σύνολο των σταθερών σημείων της j, $X_j = \{x \in X|\ j(x) = x\}$ είναι επίσης πλήρες δικτυωτό.

β) Δείξτε επίσης ότι αν η j διατηρεί suprema κατευθυνόμενων υποσυνόλων τότε το X_j είναι κλειστό στο X ως προς κατευθυνόμενα suprema.

γ) Με αυτήν την προϋπόθεση δείξτε ότι αν το p είναι πεπερασμένο στοιχείο του X τότε και το $j(p)$ είναι πεπερασμένο στοιχείο του X_j. Συμπεράνετε ότι αν το X είναι αλγεβρικό δικτυωτό τότε είναι και το X_j.

3. Περιγράψτε το σύνολο των πεπερασμένων στοιχείων (εφόσον υπάρχουν) των παρακάτω διατεταγμένων συνόλων:

(i) Το σύνολο $\{(X,Y) \in P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N})|\ X \cap Y = \emptyset\}$ με την κατά σημείο διάταξη. (Χρησιμοποιήστε την περιγραφή των suprema κατευθυνόμενων συνόλων που έχουμε δει σε προηγούμενη άσκηση)

(ii) Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών με τη συνήθη διάταξη.

4. Ας ορίσουμε μια έννοια ιδεώδους πάνω σε ένα τυχαίο διατεταγμένο σύνολο P ως εξής. Το $I \subseteq P$ είναι ιδεώδες αν

- Το I είναι μη κενό.
- Αν το x ανήκει στο I και $y \leq x$, τότε και το y ανήκει στο I.
- Αν τα x και y ανήκουν στο I τότε υπάρχει z στο I με $x \leq z$ και $y \leq z$.

Δείξτε ότι:

α) Το σύνολο $\mathrm{Idl}(P)$ των ιδεωδών, με την παραπάνω έννοια, πάνω στο P έχει κατευθυνόμενα suprema

β) Το $\mathrm{Idl}(P)$ αποτελεί την πλήρωση του P ως προς κατευθυνόμενα suprema, με την έννοια της Πρότασης 2.3.1.

5. Αν το L είναι δικτυωτό δείξτε ότι τα πεπερασμένα στοιχεία του συνόλου $\mathrm{Idl}(L)$ είναι ακριβώς τα ιδεώδη της μορφής $\downarrow(a)$, $a \in L$.

6. Εστω X ένα οποιοδήποτε σύνολο. Δείξτε ότι το σύνολο

$$\{A \subseteq X | \ A \text{ πεπερασμένο ή } X - A \text{ πεπερασμένο}\}$$

είναι άλγεβρα Boole.

7. Δείξτε ότι σε μια άλγεβρα Boole ο τελεστής που αντιστοιχίζει σε κάθε στοιχείο το συμπλήρωμά του είναι μια συνάρτηση που αντιστρέφει τη διάταξη. Χρησιμοποιήστε αυτό για να δείξετε ότι αν $a \leq b$ τότε $a \to b = 1$. Δείξτε, τέλος, ότι η συνάρτηση 'συμπλήρωμα' είναι ένας ισομορφισμός

$$\neg \colon B^{op} \to B$$

8. Δείξτε ότι ένα δικτυωτό είναι επιμεριστικό αν, για κάθε τρία στοιχεία του, ισχύει

$$x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee z.$$

9. Αποδείξτε ότι το σύνολο των υποσυνόλων ενός τοπολογικού χώρου που είναι ταυτόχρονα ανοικτά και κλειστά απότελούν μια άλγεβρα Boole.

10. Αποδείξτε ότι το σύνολο $< \mathbb{N}, | >$ των φυσικών αριθμών με τη σχέση διαιρετότητας ανάμεσά τους είναι επιμεριστικό δικτυωτό.

11. Είναι το σύνολο των κανονικών υποομάδων μίας ομάδας (με τη σχέση του περιέχεσθαι) επιμεριστικό δικτυωτό;

12. Αποδείξτε ότι σε ένα πεπερασμένο δικτυωτό κάθε ιδεώδες είναι κύριο (δηλαδή είναι της μορφής $\downarrow(x)$, για κάποιο στοιχείο x του δικτυωτού).

13. Εστω X ένας τοπολογικός χώρος και $x \in X$ ένα σημείο του. Δείξτε ότι το σύνολο

$$\{V \in O(X) | \text{ υπάρχει } U \in O(X) \text{ ώστε } x \in U \subseteq V\}$$

είναι ένα φίλτρο πάνω στο δυναμοσύνολο του χώρου.

14. Εστω $f \colon L \to 2$ ένας ομομορφισμός δικτυωτών (δηλαδή μία συνάρτηση που διατηρεί πεπερασμένα suprema και infima). Δείξτε ότι η αντίστροφη εικόνα του 0 είναι ένα ιδεώδες και, δυϊκά, η αντίστροφη εικόνα του 1 είναι ένα φίλτρο του L.

15. Εστω X ένα άπειρο σύνολο και $\mathcal{F}$ το σύνολο των πεπερασμένων υποσυνόλων του. Το $\mathcal{F}$ με τη διάταξη του περιέχεσθαι είναι επιμεριστικό δικτυωτό. Μπορεί να είναι άλγεβρα Boole;

Κεφάλαιο 3

Προσαρτημένες απεικονίσεις. Αλγεβρες Heyting

Εισαγωγή Στο παρόν κεφάλαιο εισάγουμε μία από τις σημαντικώτερες έννοιες των θεωρητικών μαθηματικών, αυτή των προσαρτημένων απεικονίσεων. Η προσάρτηση είναι μια σχέση που πληρούν απεικονίσεις που διατηρούν τη διάταξη ανάμεσα σε δύο διατεταγμένα σύνολα. Μας επιτρέπει τη μεταφορά πληροφορίας από το ένα πεδίο στο άλλο. Ιστορικά πρωτοαπαντάται στο έργο του E. Galois ως μια σχέση που συνδέει τα διατεταγμένα σύνολα των υποομάδων μιας συγκεκριμένης ομάδας, από τη μια πλευρά, και των επεκτάσεων ενός σώματος, από την άλλη. Με αυτή τη μορφή παίζει καθοριστικό ρόλο στην ανάπτυξη της θεωρίας επίλυσης πολυωνυμικών εξισώσεων. Ομως τέτοιου είδους σχέσεις διέπουν τα μαθηματικά από άκρου εις άκρο. Ειδικώτερα στο πεδίο της λογικής διαπιστώνουμε ότι οι λογικές πράξεις (σύνδεσμοι, ποσδείκτιση) χαρακτηρίζονται από τέτοιες σχέσεις και ότι οι "λογικοί νόμοι" είναι απόρρεια γενικών θεωρητικών πορισμάτων γύρω από την έννοια της προσάρτησης. Γενικώτερα, μια σειρά από φαινομενικά ετερόκλητα αποτελέσματα στα μαθηματικά αποτελούν εκφάνσεις αυτής της θεμελιώδους κατάστασης.

Θεωρούμε ότι αξίζει να αναφερθεί σε αυτό το σημείο πως σε ένα πλαίσιο ευρύτερο από αυτό που μας απασχολεί εδώ (αυτό της θεωρίας των κατηγοριών) απαντάται μια ακόμη γενικώτερη έννοια "προσάρτησης". Μέσω αυτής μελετάται συνολικά η συσχέτιση διαφορετικών τύπων δομής στα μαθηματικά, ή πώς νέες μαθηματικές έννοιες (χώρου, ποσότητας, δομής) εκπηγάζουν από υπάρχουσες. Κάποιοι ερευνητές βρίσκουν εδώ τη συγκεκριμένη μαθηματική έκφραση φιλοσοφικών θέσεων από το πεδίο της διαλεκτικής φιλοσοφίας και από το έργο του Ηράκλειτου και του Hegel ειδικώτερα.

3.1 Προσαρτημένες απεικονίσεις

Κατά την οποιαδήποτε εισαγωγή σε θέματα γύρω από την έννοια του συνόλου, μαθαίνει κανείς για τις διαδικασίες του να παίρνουμε την εύθεία και την αντίστροφη εικόνα ενός υποσυνόλου μέσω μίας απεικόνισης. Συνδέονται κάπως μεταξύ τους αυτές οι διαδικασίες; Οταν μετά ερχόμαστε αντιμέτωποι με ερωτήματα του είδους "τι ισχύει από τα δύο, $f^{-1}(f[A]) \subseteq A$ ή $f[f^{-1}(B)] \subseteq B$", υπάρχει τρόπος να έχουμε ξεκαθαρισμένη την απάντηση μία και καλή; Η απάντηση περνάει μέσα από την έννοια της προσάρτησης.

Εστω $(P, \leq_P), (Q, \leq_Q)$ δύο διατεταγμένα σύνολα και $f : P \rightleftarrows Q : g$ ένα ζεύγος απεικονίσεων που διατηρούν τη διάταξη μεταξύ αυτών. Λέμε ότι υπάρχει μια **προσάρτηση** (ή **συζυγία** - adjunction) μεταξύ αυτών, ή ότιο f είναι **αριστερά προσαρτημένος** (αριστερά συζυγής) του g, και ο g **δεξιά προσαρτημένος** (δεξιά συζυγής) του f και το συμβολίζουμε με $f \dashv g$ αν: Για κάθε $p \in P, q \in Q$ ισχύει $f(p) \leq_Q q \quad ανν \quad p \leq_P g(q)$

Ερχόμενοι στο παραπάνω ερώτημα, θυμίζουμε ότι όταν έχουμε μια οποιαδήποτε συνάρτηση $f\colon X \to Y$ ανάμεσα σε δύο σύνολα ορίζονται οι συναρτήσεις ''ευθεία εικόνα'' $f[-]\colon P(X) \to P(Y)$ και ''αντίστροφη εικόνα'' $f^{-1}\colon P(U) \to P(Q)$ οι οποίες διατηρούν τη διάταξη (του "περιέχεσθαι") ανάμεσα στα δύο δυναμοσύνολα. Εστω τώρα ότι για δύο υποσύνολα $A \subseteq X$ και $B \subseteq Y$ ισχύει ότι $f[A] \subseteq B$. Τότε ισχύει και $A \subseteq f^{-1}(B)$. Γιατί αν $x \in A$ τότε $f(x) \in f[A]$, άρα και $f(x) \in B$. Το τελευταίο σημαίνει ότι $A \subseteq f^{-1}(B) = \{x \in X | \ f(x) \in B\}$. Αντιστρόφως, έστω ότι $A \subseteq f^{-1}(B)$. Τότε, αν $y \in f[A]$, δηλαδή αν υπάρχει $x \in A$ ώστε $y = f(x)$, έχουμε ότι αυτό το x ανήκει στο $f^{-1}(B)$. Δηλαδή είναι τέτοιο ώστε $y = f(x) \in B$. Αρα ισχύει ότι $f[A] \subseteq B$. Δείξαμε λοιπόν ότι **η συνάρτηση ''αντίστροφη εικόνα'' είναι δεξιά προσαρτημένη και η ''ευθεία εικόνα'' αριστερά προσαρτημένη**.

Τι μπορούμε να πούμε για το άλλο ερώτημα που διατυπώσαμε; Η σχέση της προσάρτησης, την οποία μόλις διαπιστώσαμε, παρέχει ουσιαστικά την απάντηση σε τέτοια ερωτήματα

3.1.1 Πρόταση. *Εστω $f : P \longrightarrow Q, g : Q \longrightarrow P$ απεικονίσεις που διατηρούν τη διάταξη ανάμεσα σε δύο μερικώς διατεταγμένα Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*
i) $f \dashv g$
ii) Τριγωνικές ανισότητες:
a) $f \circ g \geq_P id_P$, *β)* $f \circ g \leq_Q id_Q$

Απόδειξη :
$i) \Rightarrow ii)$ $\quad f(p) \leq_Q q$, $p \leq_P g(q)$, $\forall p \in P, \forall q \in Q$
α) για $f(p) = q$ έχουμε:

$$f(p) \leq_Q f(p)$$
$$p \leq_P (g \circ f)(p)$$

άρα προκύπτει ότι: $id_P \leq_P g \circ f$
β) για $p = g(q)$ έχουμε:

$$g(q) \leq_P g(q)$$
$$(f \circ g)(q) \leq_Q q$$

και προκύπτει ότι: $f \circ g \leq_Q id_Q$
$ii) \Rightarrow i)$

- Εστω $f(p) \leq_Q q$ επειδή η g διατηρεί τη διάταξη έχουμε:
  $g(f(p)) \leq_P g(q) \Rightarrow (g \circ f)(p) \leq_P g(q)$
  όμως $g \circ f \geq_P id_P$
  Αρα έχουμε: $id_P(p) \leq_P (g \circ f)(p) \leq_P g(q)$
  δηλ. $p \leq_P g(q)$

- Εστω $p \leq_P g(q)$ επειδή η f διατηρεί τη διάταξη έχουμε:
  $f(p) \leq_Q f(g(q))$
  όμως $f \circ g \leq_Q id_Q$
  Αρα: $f(p) \leq_Q f(g(q)) \leq_Q id_Q(q)$
  δηλ. $f(p) \leq_Q q$

■

Αυτό έχει ως συνέπεια την εξής απλή αλλά χρήσιμη ιδιότητα των προσαρτήσεων:

3.1.2 Πόρισμα. *Για το ζεύγος προσαρτημένων συναρτήσεων $g\colon X \leftrightarrows Y\colon f$, $f \dashv g$, ανάμεσα σε δύο διατεταγμένα σύνολα ισχύει $f \circ g \circ f = f$, $g \circ f \circ g = g$*

Απόδειξη: Ισχύουν λόγω της Πρότασης 1 οι σχέσεις $f \circ g \leq id_X$ και $id_Y \leq g \circ f$ άρα, εφαρμόζοντας τις g και f αντίστοιχα, έχουμε $g \circ f \circ g \leq g$ και $f \circ g \circ f \leq f$. Για την ανισότητα $g \leq g \circ f \circ g$, έχουμε, λόγω προσάρτησης ότι είναι ισοδύναμη με την $f \circ g \leq f \circ g$, που προφανώς ισχύει. Ομοίως για την $f \leq f \circ g \circ f$. ■

Ενδεικτικό της κεντρικής θέσης της έννοιας της προσάρτησης είναι το γεγονός ότι με τη βοήθειά της μπορούν να εκφραστούν πολλές (αν όχι όλες!) έννοιες της θεωρίας των διατεταγμένων συνόλων. Για παράδειγμα, έστω ότι θέλουμε να εκφράσουμε το γεγονός ότι ένα διατεταγμένο σύνολο X έχει suprema για οικογένειες στοιχείων του που είναι παραμετρικοποιημένες από ένα σύνολο δεικτών I. Θυμίζουμε ότι, αν θεωρήσουμε το I ως διατεταγμένο σύνολο με τη διακριτική διάταξη, το σύνολο των συναρτήσεων που διατηρούν τη διάταξη X^I είναι και αυτό διατεταγμένο (με την κατά σημείο διάταξη). Υπάρχει μια συνάρτηση $\Delta\colon X \to X^I$ με την εξής δράση:

$$\Delta(x) = c_x, \quad \text{όπου} \;\; c_x(i) = x, \;\; \forall i \in I$$

Προφανώς αυτή η συνάρτηση διατηρεί τη διάταξη. Εστω λοιπόν ότι η συνάρτηση αυτή έχει αριστερά προσαρτημένη, $\nabla \dashv \Delta$. Η ∇ θα αντιστοιχίζει σε μια συνάρτηση $f\colon X \to X^I$ έτσι ώστε $f \leq \Delta\nabla(f)$, λόγω της παραπάνω πρότασης, δηλαδή $\forall i \in I, \; f(i) \leq \nabla(f)$ και επιπλέον να πληρούνται οι εξής λογικές ισοδυναμίες:

$$\frac{\dfrac{\nabla(f) \leq x \;\; \text{στο} \;\; X}{f \leq \Delta(x) = c_x \;\; \text{στο} \;\; X^I}}{\forall i \in I \;\; f(i) \leq x \;\; \text{στο} \;\; X.}$$

Εν ολίγοις λέμε ότι το $\nabla(f)$ είναι άνω φράγμα των διαφόρων $f(i)$ κι επιπλέον, αν το x είναι άνω φράγμα των $f(i)$ τότε $\nabla(f) \leq x$. Αρα το $\nabla(f)$ είναι απλώς το supremum της οικογένειας $\{f(i)|\; i \in I\}$. Είδαμε δηλαδή ότι το X έχει suprema για οικογένειες στοιχείων του που είναι παραμετρικοποιημένες από ένα σύνολο I αν και μόνο αν η συνάρτηση $\Delta\colon X \to X^I$ έχει αριστερά προσαρτημένη. Δυϊκά, τέτοιες οικογένειες στοιχείων έχουν infimum αν η συνάρτηση Δ έχει δεξιά προσαρτημένη. Ενα διατεταγμένο σύνολο δε είναι πλήρες δικτυωτό αν η $\Delta\colon X \to X^I$ έχει προσαρτημένη απεικόνιση, για κάθε σύνολο I.

Θα δούμε παρακάτω ένα σημαντικό κριτήριο για το πότε μια απεικόνιση που διατηρεί τη διάταξη έχει αριστερά ή δεξιά προσαρτημένη απεικόνιση. Θα θέλαμε όμως να ξέρουμε ότι σε μία τέτοια περίπτωση η προσαρτημένη απεικόνιση προσδιορίζεται μοναδικά.

3.1.3 Πρόταση. *Η αριστερή και η δεξιά προσαρτήσεις όταν υπάρχουν είναι μοναδικές. Δηλαδή, i) αν* $f \dashv g$ *και* $f \dashv g'$ *τότε* $g = g'$ *και ii) αν* $f \dashv g$ *και* $f' \dashv g$ *τότε* $f' = f$

Απόδειξη :
i) $g \circ f \geq_P id_P$, $g' \circ f \geq_P id_P$ και $f \circ g \leq_Q id_Q$, $f \circ g' \leq_Q id_Q$

$$\left.\begin{array}{l} g = id_P \circ g \leq (g' \circ f) \circ g = g' \circ (f \circ g) \leq g' \circ id_Q = g' \Rightarrow g \leq g' \\ g' = id_P \circ g' \leq (g \circ f) \circ g' = g \circ (f \circ g') \leq g \circ id_Q = g \Rightarrow g' \leq g \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Απο τις δύο αυτές σχέσεις προκύπτει οτι $g = g'$
ii) Ομοίως. ■

Να δούμε επίσης εδώ μια απλή αλλά σημαντική, από θεωρητική άποψη, ιδιότητα των προσαρτημένων απεικονίσεων

3.1.4 Πρόταση. *(Οι προσαρτημένες απεικονίσεις συντίθενται) Αν για τα ζεύγη συναρτήσεων που διατηρούν τη διάταξη $g\colon X \leftrightarrows Y\colon f$, $k\colon Y \leftrightarrows Z\colon h$ ισχύει ότι $f \dashv g$, $h \dashv k$, τότε ισχύει και $f \circ h \dashv k \circ g$.*

Απόδειξη: Για οποιαδήποτε $x \in X$, $z \in Z$ έχουμε

$$\frac{\dfrac{(f \circ h)(x) \leq z}{h(x) \leq g(z)}}{x \leq (k \circ g)(z).} \quad ■$$

Θα εξετάσουμε παρακάτω έναν ενδιαφέροντα τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούνται σε συνδυασμό η μοναδικότητα των προσαρτημένων απεικονίσεων και το γεγονός ότι τέτοιες απεικονίσεις συντίθενται.

Σχόλιο: Στην εισαγωγή σε αυτό το κεφάλαιο αναφερθήκαμε στην σχέση προσάρτησης, την οφειλόμενη στον E. Galois, που συνδέει τα διατεταγμένα σύνολα των υποομάδων μιας συγκεκριμένης ομάδας, από τη μια πλευρά, και των επεκτάσεων ενός σώματος, από την άλλη. Εκεί οι δύο απεικονίσεις που εμφανίζονται αντιστρέφουν τη διάταξη. Ειναι, γι αυτό το λόγο ιστορικά αρκετά ισχυρή η τάση στη βιβλιογραφία να αναφέρεται κανείς σε **αντιστοιχίες Galois** (Galois correspondances) για να περιγράψει ουσιαστικά την ίδια έννοια, συσχετίζοντας όμως ένα διατεταγμένο σύνολο με το δυϊκό ενός άλλου.

3.2 Το θεώρημα προσαρτημένης απεικόνισης

Από τη στιγμή που έχει εντοπισθεί και αναλυθεί θεωρητικά η έννοια των προσαρτημένων απεικονίσεων μπορεί κανείς να χρησιμοποιεί τις γενικές ιδιότητές τους σε μια πληθώρα διαφορετικών καταστάσεων όπου εμφανίζονται, επιχειρη- ματολογόντας με τρόπο κομψό και συνοπτικό για όλα αυτά τα διαφορετικά φαινόμενα. Η κύρια ιδιότητα των προσαρτημένων απεικονίσεων που συναντά κανείς σε διάφορα κομμάτια των μαθηματικών δίνεται από την παρακάτω:

3.2.1 Πρόταση. *Μια αριστερά προσαρτημένη απεικόνιση διατηρεί suprema. Δυϊκά, μια δεξιά προσαρτημένη απεικόνιση διατηρεί infima.*

Απόδειξη Εστω $f : P \rightleftarrows Q : g$ ένα ζευγάρι προσαρτημένων απεικονίσεων και ότι το supremum $\bigvee_{i\in I} x_i$ υπάρχει στο P. Αφού η f διατηρεί τη διάταξη, αρκεί να δείξουμε ότι

$$f(\bigvee_{i\in I} x_i) \leq \bigvee_{i\in I} f(x_i)$$

Ομως ισχύει ότι, για κάθε $i \in I$, $f(x_i) \leq \bigvee_{i\in I} f(x_i)$. Λόγω της προσάρτησης έχουμε ότι ισοδύναμα, για κάθε $i \in I$, $x_i \leq g(\bigvee_{i\in I} f(x_i))$. Αυτό σημαίνει ότι $\bigvee_{i\in I} x_i \leq g(\bigvee_{i\in I} f(x_i))$, οπότε, χρησιμοποιώντας άλλη μια φορά τη σχέση της προσάρτησης έχουμε το ζητούμενο. ■

Προκειμένου για πλήρη δικτυωτά η ιδιότητα που διατυπώσαμε στην πρόταση είναι και ικανή για την ύπαρξη προσατημένης απεικόνισης (η οποία, όπως σχολιάσαμε νωρίτερα, θα είναι μοναδικά προσδιορισμένη)

3.2.2 Θεώρημα. *(Θεώρημα Προσαρτημένης Απεικόνισης) Εστω $f\colon P \to Q$ μια απεικόνιση που διατηρεί suprema (άρα και τη διάταξη) ανάμεσα σε δύο πλήρη διακτυωτά. Τότε υπάρχει μια δεξιά προσαρτημένη απεικόνιση της f.*

Απόδειξη: Ορίζουμε $g\colon Q \to P$ ως εξής:

$$g(y) = \bigvee\{x \in X|\ f(x) \leq y\}$$

Η g διατηρεί τη διάταξη: Αν $y_1 \leq y_2$ και το x είναι τέτοιο ώστε $f(x) \leq y_1$ τότε $f(x) \leq y_2$. Αρα $\{x \in X|\ f(x) \leq y_1\} \subseteq \{x \in X|\ f(x) \leq y_2\}$, οπότε και

$$g(y_1) = \bigvee\{x \in X|\ f(x) \leq y_1\} \leq \bigvee\{x \in X|\ f(x) \leq y_1\} = g(y_2)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι αν $f(x) \leq y$ τότε έπεται ότι $x \leq g(Y)$ γιατί το x ανήκει στο σύνολο, το supremum του οποίου αποτελεί την τιμή της g στο y.

Ομως ισχύει και το αντίστροφο. Εστω $x \leq g(y) = \bigvee\{x \in X|\ f(x) \leq y\}$. Τότε, αφού η f διατηρεί suprema είναι

$$
\begin{aligned}
f(x) &\leq f(\bigvee\{x' \in X|\ f(x') \leq y\}) \\
&= \bigvee\{f(x') \in Y|\ f(x') \leq y\} \\
&\leq y
\end{aligned}
$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο. ■

Ετσι στο δυναμοσύνολο ενός συνόλου X μπορούμε να θεωρήσουμε την πράξη της τομής με ένα συγκεκριμένο υποσύνολο $A \subseteq X$, $A \cap -$, ως μια απεικόνιση $P(X) \to P(X)$ που διατηρεί τη διάταξη. Εντελώς στοιχειωδώς διαπιστώνει κανείς ότι

$$A \cap \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i),$$

που σημαίνει ότι η πράξη της τομής διατηρεί suprema. Αρα, από το θεώρημα, επιδέχεται δεξιά προσαρτημένη απεικόνιση. Η απόδειξη του θεωρήματος μας λέει ότι η απεικόνιση αυτή έχει τη μορφή

$$A_*(B) = \bigcup\{T \subseteq X|\ B \cap T \subseteq A\}$$

Παρατηρούμε ότι το τελευταίο σύνολο ισούται με το

$$A \Rightarrow B = \{x \in X|\ x \in A \Rightarrow x \in B\},$$

δηλαδή με το υποσύνολο εκείνο του X που ''ερμηνεύει'' την πράξη της συνεπαγωγής (στο μέτρο που η τομή ερμηνεύει τη λογική πράξη της σύζευξης μέσα στην άλγβερα Boole του δυναμοσυνόλου). Λέμε γι΄ αυτόν το λόγο συνήθως ότι η σύζευξη είναι αριστερά προσαρτημένη της συνεπαγωγής.

Επίσης στο παράδειγμα της συνάρτησης ''αντίστροφη εικόνα'' που επάγεται από μια συνάρτηση $f\colon X \to Y$ έχουμε ότι $f^{-1}(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i f^{-1}(A_i)$, άρα η $f^{-1}\colon P(Y) \to P(X)$, εφόσον διατηρεί suprema, έχει δεξιά προσαρτημένη απεικόνιση (πέραν της αριστερά προσαρτημένης ''ευθείας εικόνας'' που ήδη έχουμε δει). Πώς ακριβώς δρα και ποιά η λογική σημασία αυτής της απεικόνισης είναι κάτι που θα εξετάσουμε παρακάτω.

3.3 Heyting Αλγεβρες

Ας θυμηθούμε εδώ την έννοια του τοπολογικού χώρου: Είναι ένα σύνολο X μαζί με μια συλλογή $O(X)$ υποσυνόλων του (δηλαδή ένα υποσύνολο του $P(X)$), τα οποία ονομάζουμε ανοικτά υποσύνολα, και που είναι κλειστή ως προς (όλες) τις ενώσεις υποσυνόλων καθώς και ως προς τις πεπερασμένες τομές (ειδικώτερα το X και το κενό σύνολο ανήκουν στη συλλογή). Ο ορισμός αυτός λέει ότι, μεταξύ άλλων, το σύνολο $O(X)$ ως προς τη διάταξη του "περιέχεσθαι" έχει όλα τα suprema, που δίνονται από την πράξη της ένωσης, άρα είναι πλήρες δικτυωτό. Επίσης σημαίνει ότι τα πεπερασμένα infima δίνονται από την πράξη της τομής. Οπως όμως είπαμε και παραπάνω, για οποιαδήποτε οικογένεια $\{V_i | \, i \in I\}$ ανοικτών υποσυνόλων και ανοικτό υποσύνολο U ισχύει

$$U \cap (\bigcup_i V_i) = \bigcup_i (U \cap V_i)$$

Αρα, για κάθε $U \in O(X)$ η απεικόνιση $U \cap -\colon O(X) \to O(X)$ έχει δεξιά προσαρτημένη, την οποία θα συμβολίζουμε και εδώ με $U \Rightarrow -$. Ομως, σε αντιδιαστολή με το δυναμοσύνολο $P(X)$ το οποίο είναι άλγβερα Boole, το $O(X)$ σπανιώτατα είναι τέτοια. (Κάτι τέτοιο θα σήμαινε ότι, για κάθε ανοικτό σύνολο,το συμπλήρωμά του θα ήταν επίσης ανοικτό.) Παρολαυτά πάρα πολλές από τις ιδιότητες που αφορούν στη συνεπαγωγή ή την άρνηση (συμπλήρωμα) σε μια άλγεβρα Boole εξακολουθούν να ισχύουν και για το $O(X)$. Οπως θα διαπιστώσουμε οι ιδιότητες αυτές ισχύουν ουσιαστικά εξ αιτίας της σχέσης προσάρτησης ανάμεσα στην πράξη της τομής (του infimum) και την πράξη της συνεπαγωγής. Προχωρούμε λοιπόν στον παρακάτω τυπικό ορισμό:

Μια **Heyting άλγεβρα** είναι ένα δικτυωτό P, το οποίο έχει την ιδιότητα, για κάθε $x \in P$, η απεικόνιση $x \wedge (-) : P \longrightarrow P$ έχει δεξιά προσαρτημένη απεικόνιση (την οποία την συμβολίζουμε με $x \to (-)$). Ονομάζουμε **ψευδοσυμπλήρωμα** ενός στοιχείου $x \in P$ το στοιχείο $x \to 0$, το συμβολίζουμε δε με $\neg x$.

Παρατήρηση: Από την προσάρτηση $x \wedge (-) \dashv x \to (-)$ προκύπτει ότι $x \wedge \neg x = 0$. Παρολαυτά δεν ισχύει γενικά ότι $x \vee \neg x = 1$, δηλαδή το $\neg x$ δεν είναι το συμπλήρωμα με την έννοια της άλγεβρας Boole. Ας δούμε ένα συγκεκριμένο αντιπαράδειγμα γι΄ αυτό το φαινόμενο. Εστω ότι $X = \{x, \ y\}$ και $O(X) = \{\emptyset, \ \{x\}, X\}$. Διαπιστώνουμε ότι

$$\neg\{x\} = \bigcup\{V \in O(X) | \ V \cap \{x\} \subseteq \emptyset\} = \emptyset$$

απ΄ όπου είναι φανερό ότι $\{x\} \cup \neg\{x\} \neq X$.

Επομένως κάθε πλήρες επιμεριστικό δικτυωτό (ή πλαίσιο), όπως ορίστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο είναι μια Heyting άλγεβρα. Επίσης κάθε άλγεβρα Boole είναι και Heyting άλγεβρα (Ασκηση 3, παρακάτω). Ας δούμε μερικές απότις ιδιότητες της άλγεβρας Boole που εξακολουθούν να ισχύουν στο παρόν γενικώτερο πλαίσιο

3.3.1 Πρόταση. *Σε μια οποιαδήποτε Heyting άλγεβρα ισχύουν:*

(i) Αν $x \leq y$ τότε $\neg y \leq \neg x$, δηλαδή η απεικόνιση $\neg\colon P \to P$ αντιστρέφει τη διάταξη.

(ii) $\neg \dashv \neg\colon P^{op} \to P$

(iii) $x \leq \neg\neg x$

(iv) $\neg x = \neg\neg\neg x$

(v) $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$

Απόδειξη: (i) Θέλουμε να δείξουμε ότι $y \to 0 \leq x \to 0$. Λόγω της προσάρτησης αυτό είναι ισοδύναμο με το να δείξουμε ότι $x \wedge (y \to 0) \leq 0$. Ομως $y \wedge (y \to 0) \leq 0$, λόγω της Πρότασης 3.1.1 (i, β). Αφού $x \leq y$, έπεται και ότι $x \wedge (y \to 0) \leq 0$.

(ii) Εννοούμε, κατ΄ αρχάς, εδώ ότι η απεικόνιση $(-) \to 0$, η οποία **διατηρεί** τη διάταξη ως απεικόνιση από το δυϊκό του P στο P, έχει τον εαυτό της ως προσαρτημένη απεικόνιση (λέμε σε αυτήν την περίπτωση ότι είναι αυτοσυζυγής). Εξ ορισμού αυτό σημαίνει ότι

$$x \to 0 \leq y \text{ στο } P^{op} \text{ αν και μόνο αν } x \leq y \to 0 \text{ στο } P$$

Ισοδύναμα

$$y \leq x \to 0 \text{ στο } P \text{ αν και μόνο αν } x \leq y \to 0 \text{ στο } P.$$

Από τη βασική σχέση προσάρτησης όμως σε μια Heyting άλγεβρα, κάθε μια από τις ανισότητες που καλούμαστε να δείξουμε ότι είναι ισοδύναμες είναι ισοδύναμη με την $x \wedge y \leq 0$. Ετσι προκύπτει το ζητούμενο.

(iii) Δεδομένης τώρα της προσάρτησης του (ii), ο παρών ισχυρισμός είναι ειδική περίπτωση της Πρότασης 3.1.1 (i, α).

(iv) Ξανά, λόγω της προσάρτησης του (ii), το παρόν είναι συνέπεια του Πορίσματος 3.1.2.

(v) Η απεικόνιση $\neg\colon P^{op} \to P$, ως έχουσα αριστερά προσαρτημένη, στέλνει infima του P^{op} σε infima του P. Η, αλλιώς, στέλνει suprema του P σε infima του P. Δηλαδή, $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$. ■.

Παρατήρηση: Σε μια Heyting άλγεβρα που δεν είναι άλγεβρα Boole ανισότητα του (iii) δεν αντιστρέφεται. Τουναντίον αποδεικνύεται ότι μια μια Heyting άλγεβρα που ικανοποιεί, για κάθε στοιχείο της x, $\neg\neg x = x$, είναι άλγεβρα Boole (Ασκηση , παρακάτω). Επίσης εύκολα μπαίνει κανείς στον πειρασμό να ισχυρισθεί ότι αφού η $\neg\colon P^{op} \to P$ έχει αριστερά προσαρτημένο τον εαυτό της, τότε στέλνει infima του P σε infima του P^{op}, ισοδύναμα σε suprema του P, άρα ισχύει και ο δυϊκός νόμος του De Morgan, $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$. Αυτό όμως δεν είναι σωστό. Αυτό που συμβαίνει εδώ είναι μάλλον το εξής: Η $\neg\colon P \to P^{op}$ έχει δεξιά προσαρτημένη, άρα στέλνει suprema του P σε suprema του P^{op}, άρα σε infima του P. Ξαναβρίσκουμε δηλαδή τη σχέση του (v).

Σχόλιο: Οι Heyting άλγεβρες κατέχουν ένα διπλό ρόλο στα μαθηματικά: Από τη μια, τέτοια δομή έχει το σύνολο των ανοικτών υποσυνόλων ενός τοπολογικού χώρου, όπως προαναφέραμε. Βέβαια το σύνολο αυτό είναι πλήρες δικτυωτό. Θα μπορούσε λοιπό κανείς εδώ να ρωτήσει κατά πόσο όλες οι πλήρεις Heyting άλγεβρες προκύπτουν ως σύνολα ανοικτών υποσυνόλων τοπολογικών χώρων. Το κρίσιμο ζήτημα για να απαντηθεί ένα τέτοιο ερώτημα είναι να μπορέσουμε να περιγράψουμε τα **σημεία** του τοπολογικού χώρου με τους όρους της δομής της Heyting άλγεβρας. Θα αντιμετωπίσουμε το ερώτημα αυτό στο επόμενο κεφάλαιο. Πάντως η μελέτη της γενικής τοπολογίας μπορεί να ωφεληθεί πολύ από την προσεκτικώτερη εξέταση των Heyting αλγεβρών υπό αυτό το πρίσμα. Θα μπορούσαμε δε να πούμε ότι μια τέτοια εξέταση φέρνει στην επιφάνεια τον εκτασιακό-γεωμετρικό (extensional - geometric) χαρακτήρα των Heyting αλγεβρών.

Ομως οι Heyting άλγεβρες έχουν κι έναν άλλο χαρακτήρα, που δυϊκά θα τον περιγράφαμε ως εντασιακό-λογικό (intentional - logical). Σύμφωνα με αυτή τη δεύτερη προσέγγιση οι Heyting άλγεβρες θεωρούνται σαν άλγεβρες προτάσεων της λογικής. Ως τέτοιες έχουν αποτελέσει τον τρόπο τυποποίησης ενός συγκεκριμένου λογικού συστήματος, αυτού της **λογικής του ενορατισμού** (intuitionistic logic). Το τελευταίο αποτελεί μέρος μίας συνολικώτερης φιλοσοφίας για τα μαθηματικά, οφειλόμενης στον L. E. J. Brouwer (γι΄ αυτό καμμιά φορά οι Heyting άλγεβρες αναφέρονται και ως Brouwerian lattices.) Αυτό που μας αφορά εδώ, και αντανακλάται στη δομή της Heyting άλγεβρας, είναι ότι σύμφωνα με αυτήν την αντίληψη της μαθηματικής αλήθειας το καθεστώς της πρότασης $\phi \vee \neg\phi$ δεν έχει διευθετηθεί παρά μόνο μέσω μιάς συγκεκριμένης κατασκευής έχουμε επιβεβαιώσει τη ϕ ή την $\neg\phi$. Ετσι στην $\phi \vee \neg\phi$ δεν αποδίδεται η αληθοτιμή 1. Από κει και πέρα η δομή της Heyting άλγεβρας αντανακλά τους λογικούς νόμους του συγκεκριμένου συστήματος ακριβώς με τον ίδιο τρόπο που η άλγεβρα Boole αντανακλά τους νόμους της κλασικής λογικής. Μαθηματικά αυτό εκφράζεται λέγοντας ότι η άλγεβρα Lindenbaum του προτασιακού λογισμού αυτού του συστήματος είναι η ελεύθερη Heyting άλγεβρα πάνω σ' ένα σύνολο προτασιακών μεταβλητών. Αυτό σημαίνει ότι ικανοποιεί τις ταυτότητες εκείνες ακριβώς που αληθεύουν σε όλες τις Heyting άλγεβρες. Μια ακόμα τέτοια, για εμπέδωση του τρόπου που δουλεύουμε στις Heyting άλγεβρες, αποδεικνύουμε αμέσως παρακάτω. Να κλείσουμε όμως αυτό το σχόλιο αναφέροντας ότι οι δύο τρόποι θέασης των Heyting αλγεβρών δεν είναι ανεξάρτητοι ο ένας του άλλου. Συγκεκριμένα, το ζήτημα του κατά πόσο μια πλήρης Heyting άλγεβρα προκύπτει ως σύνολο ανοικτών υποσυνόλων τοπολογικού χώρου είναι, σε αδρές γραμμές, αλληλένδετο με αυτό της λογικής πληρότητας λογικών συστημάτων.

3.3.2 Πρόταση. *Σε μια Heyting άλγεβρα ισχύει*

$$\neg\neg(x \wedge y) = \neg\neg x \wedge \neg\neg y$$

Απόδειξη: Η συνάρτηση $\neg\neg$ διατηρεί τη διάταξη, άρα ισχύει η ανισότητα

$$\neg\neg(x \wedge y) \leq \neg\neg x \wedge \neg\neg y$$

Η αντίστροφη ανισότητα όμως είναι ισοδύναμη, κατά σειρά, με τις ακόλουθες ανισότητες

$$\underline{\neg\neg x \wedge \neg\neg y \leq \neg\neg(x \wedge y)}$$

$$\underline{\neg\neg x \wedge \neg\neg y \wedge \neg(x \wedge y) \leq 0}$$

$$\underline{\neg\neg x \wedge \neg(x \wedge y) \leq \neg\neg\neg y}$$

$$\underline{\neg\neg x \wedge \neg(x \wedge y) \leq \neg y \ \ \text{(λόγω της (iv), παραπάνω)}}$$

$$\underline{\neg\neg x \wedge y \wedge \neg(x \wedge y) \leq 0}$$

$$\underline{y \wedge \neg(x \wedge y) \leq \neg\neg\neg x}$$

$$\underline{x \wedge \neg(x \wedge y) \leq \neg x \ \ \text{(ομοίως)}}$$

$$x \wedge y \wedge \neg(x \wedge y) \leq 0$$

Η τελευταία όμως ισχύει, όπως παρατηρήσαμε μετά τον ορισμό του ψευδοσυμπληρώματος. ■

Ας επικεντρώσουμε τώρα την προσοχή μας στην Heyting άλγεβρα των ανοικτών υποσυνόλων ενός τοπολογικού χώρου. (Η συζήτηση που ακολουθεί περιλαμβάνεται εδώ κυρίως χάρη στη μεθοδολογική σημασία του επιχειρήματος που φέρνουμε καθώς και ως ένδειξη της αλληλοσυσχέτισης του τοπολογικού και του λογικού χαρακτήρα των Heyting αλγεβρών.)

Εστω λοιπόν $f\colon X \to Y$ μια συνεχής απεικόνιση ανάμεσα σε τοπολογικούς χώρους (θυμίζουμε ότι τοπολογικά η συνέχεια ορίζεται μέσα από τη συνθήκη ότι η αντίστροφη εικόνα ενός ανοικτού υποσυνόλου είναι ανοικτό υποσύνολο). Ο ορισμός της συνέχειας μας εξασφαλίζει ότι η συνάρτηση ‘αντίστροφη εικόνα” ανάμεσα στα δυναμοσύνολα των Y, X περιορίζεται σε μια συνάρτηση (που διατηρεί, φυσικά, τη διάταξη) ανάμεσα στις Heyting άλγεβρες των ανοικτών υποσυνόλων:

$$f^{-1}\colon O(Y) \to O(X)$$

Για αυτή την απεικόνιση τώρα μπορούμε να ρωτήσουμε μια σειρά από ερωτήματα, όπως αν διατηρεί suprema, infima ή και όλη τη δομή της Heyting άλγεβρας, αν δηλαδή διατηρεί και την πράξη της συνεπαγωγής. Είναι εντελώς στοιχειώδες να δούμε ότι $f^{-1}(\bigcup_i U_i) = \bigcup_i f^{-1}(U_i)$, δηλαδή ότι η f^{-1} διατηρεί suprema (άρα, ισοδύναμα, έχει δεξιά προσαρτημένη απεικόνιση). Το ίδιο εύκολα διαπιστώνουμε και ότι $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$, άρα ότι η f^{-1} διατηρεί και πεπερασμένα infima. Δε μπορούμε να πούμε όμως ότι διατηρεί όλα τα infima. Μολονότι η f^{-1} διατηρεί όλες τις τομές υποσυνόλων (μια αιτιολόγηση αυτού είναι ότι σε επίπεδο δυναμοσυνόλων δέχεται την συνάρτηση ‘‘ευθεία εικόνα’’ ως αριστερά προσαρτημένη), αυτές οι τομές δε συμπίπτουν γενικά με το infimum στη Heyting άλγεβρα των ανοικτών, όπως είδαμε. Παραμένουν λοιπόν τα ερωτήματα: πότε η f^{-1} διατηρεί όλα τα infima; πότε διατηρεί την πράξη της συνεπαγωγής; Οι απαντήσεις στα δύο αυτά ερωτήματα σχετίζονται. Κατ΄ αρχάς, αν διατηρούνται όλα τα infima η f^{-1} θα έχει αριστερά προσαρτημένη απεικόνιση, η οποία λόγω της μοναδικότητας των προσαρτημένων απεικονίσεων θα ταυτίζεται με τη συνάρτηση ‘ευθεία εικόνα”. Θα έχουμε δηλαδή ότι η εικόνα μέσω της f ενός ανοικτού υποσυνόλου θα είναι ανοικτό. Λέμε σε αυτήν την περίπτωση ότι η f είναι ανοικτή απεικόνιση. Ας εξετάσουμε τώρα τη διατήρηση της συνεπαγωγής. Θέλουμε να ισχύει

$$f^{-1}(U \Rightarrow W) = f^{-1}(U) \Rightarrow f^{-1}(W)$$

Αυτό μπορούμε να το εκφράσουμε και ως εξής: Θέλουμε το παρακάτω διάγραμμα διατεταγμένων συνόλων και απεικονίσεων που διατηρούν τη διάταξη να αντιμετατίθεται.

$$\begin{array}{ccc} O(X) & \xrightarrow{f^{-1}} & O(Y) \\ \big\downarrow{\scriptstyle f^{-1}(U)\Rightarrow -} & & \big\downarrow{\scriptstyle U\Rightarrow -} \\ O(X) & \xrightarrow{f^{-1}} & O(Y) \end{array}$$

Κάτι τέτοιο θα συνέβαινε αν οι αριστερά προσαρτημένες απεικονίσεις του κάθε δρόμου του διαγράμματος (με την προυπόθεση ότι υπάρχουν) συνέπειπταν. Ομως εφόσον η f^{-1} έχει αριστερά προσαρτημένη απεικόνιση αυτές οι αριστερά προσαρτημένες απεικονίσεις υπάρχουν. Για την ακρίβεια $f[-] \dashv f^{-1}$, $U \cap - \dashv U \Rightarrow -$, $f^{-1}(U) \cap - \dashv f^{-1}(U) \Rightarrow -$, κι επειδή οι προσαρτημένη απεικόνιση της σύνθεσης είναι η σύνθεση των προσαρτήσεων, αρκεί να αντιμετατίθεται το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} O(X) & \xleftarrow{f[-]} & O(Y) \\ \big\uparrow{\scriptstyle f^{-1}(U)\cap -} & & \big\uparrow{\scriptstyle U\cap -} \\ O(X) & \xleftarrow{f[-]} & O(Y) \end{array}$$

αρκεί δηλαδή να ισχύει ότι $f[f^{-1}(U) \cap W] = U \cap f[W]$, τό οποίο εύκολα διαπιστώνουμε ότι ισχύει. Γιατί αν $y \in f[f^{-1}(U) \cap W]$ αυτό σημαίνει ότι $y = f(x)$, όπου $x \in f^{-1}(U)$ και $x \in W$. Αρα $f(x) \in U$ και $f(x) \in f[W]$, οπότε $y = f(x) \in U \cap f[W]$. Ο εγκλεισμός υποσυνόλων στην αντίθετη κατεύθυνση ισχύει επίσης για γενικούς λόγους (ποιοί είναι αυτοί;). Δείξαμε λοιπόν ότι

3.3.3 Πρόταση. *Αν $f\colon X \to Y$ είναι μια ανοικτή συνεχής συνάρτηση μεταξύ δύο τοπολογικών χώρων τότε η απεικόνιση $f^{-1}\colon O(Y) \to O(X)$ είναι μια συνάρτηση μεταξύ Heyting αλγεβρών που διατηρεί τη συνεπαγωγή.*

Κλείνουμε αυτήν την ενότητα με μια αναφορά σε κάποιες παρεμφερώς οριζόμενες άλγεβρες με ιδιαίτερη θέση στη λογική. Συγκεκριμένα υπάρχει μια σειρά από τυπικά συστήματα (το καθένα με τη δική του βαρύτητα και χρησιμότητα) που εμπίπτουν στη γενικώτερη προβληματική γύρω από τη λογική των **ασαφών συστημάτων**. Εκει συνήθως έχει κανείς μια χαλαρώτερη ερμηνεία του λογικού συνδέσμου ‘‘και’’, η όποια έρχεται να καλύψει τα παράδοξα που μπορούν να προκύψουν γύρω απόεπαναληπτικές διαδικασίες. Ετσι το ‘‘και’’ ερμενεύεται σε αυτά τα συστήματα από μια μη - ταυτοδύναμη πράξη.

Εστω $(L, \leq, \vee, 0)$ ένα άνω - ημιδικτυωτό. Λέμε ότι είναι $\ell-$ μονοειδές αν είναι εφοδιασμένο με μια επιπλέον διμελή πράξη $\odot : L \times L \longrightarrow L$, για την οποία ισχύουν

(i) $(\forall x, y, z \in L)[x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z]$

(ii) $(\forall x \in L)[x \odot 1 = x = 1 \odot x]$

Αναφορικά με αυτό το ''και'' επιθυμούμε όμως να ορίσουμε μια πράξη συνεπαγωγής. Η εμπειρία γύρω από αυτά τα συστήματα έχει δείξει ότι επιθυμεί κανείς να διατηρήσει ακριβώς τη σχέση προσάρτησης ανάμεσα στο ''και'' και στο ''συνεπάγεται''

Δίνει λοιπόν κανείς τον ορισμό του αντιμεταθετικού $\ell-$ μονοειδούς με ''υπόλοιπα'' (residuated $\ell - monoid$): Λέμε οτι η δομή $(L, \leq, \odot, 1, \vee, 0)$ είναι αντιμεταθετικό $\ell-$ μονοειδές με ''υπόλοιπα'' ανν η πράξη $\odot$ είναι αντιμεταθετική και επιπλέον όλα τα

$$\begin{aligned} F_a \equiv a \odot (-) : L &\longrightarrow L \\ x &\mapsto a \odot x \end{aligned}$$

δέχονται προσάρτηση δηλ. υπάρχουν

$$\begin{aligned} G_a \equiv a \Longrightarrow\!\!\!\!\!\!\odot\;\; (-) : L &\longrightarrow L \\ x &\mapsto (a \Longrightarrow\!\!\!\!\!\!\odot\;\; x) \end{aligned}$$

Οπου $a \Longrightarrow\!\!\!\!\!\!\odot\;\; x := \bigvee\{y \,/\, a \odot y = x\}$

Ετσι έχουμε: $\left.\begin{array}{lll} F_a(x) \leq b & \alpha\nu\nu & x \leq G_a(b) \\ a \odot x \leq b & \alpha\nu\nu & x \leq (a \Longrightarrow\!\!\!\!\!\!\odot\;\; b) \end{array}\right\} (\forall a \in L)[F_a \dashv G_a]$

Προκύπτει, ως συνέπεια της σχέσης προσάρτησης, ότι ένα $\ell-$ μονοειδές με ''υπόλοιπα'' πληρεί τον επιμεριστικό νόμο

$$x \odot (y \vee z) = x \odot y \vee x \odot z.$$

3.4 Οι ποσοδείκτες ως προσαρτημένες απεικονίσεις

Εξετάζουμε εδώ μια ειδική περίπτωση της προσάρτησης $f[-] \dashv f^{-1}$ που επάγεται μεταξύ των δυναμοσυνόλων δύο συνόλων από μια συνάρτηση $f\colon X \to Y$. Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση προβολή $\pi\colon X \times Y \to X$. Η συνάρτηση

$$\pi^{-1}\colon P(X) \to P(X \times Y)$$

έχουμε δει ότι έχει αριστερά προσαρτημένη την απεικόνιση

$$\pi[-]\colon P(X \times Y) \to P(X)$$

Ας σκεφτούμε την παρούσα κατάσταση κάπως περισσότερο με όρους λογικής. Για την ακρίβεια, ας σκεφτόμαστε τα υποσύνολα ενός συνόλου ως κατηγορήματα (ιδιότητες). Οταν πρόκειται για τα υποσύνολα του X ας τα σκεφτόμαστε ως κατηγορήματα μίας μεταβλητής (και γράφουμε τα υποσύνολα ως την ''έκταση'' ενός κατηγορήματος, δηλαδή $\|\phi(x)\| = \{x \in X|\ \phi(x)\}$) ενώ όταν πρόκειται για υποσύνολα του $X \times Y$ ως κατηγορήματα δύο μεταβλητών (και γράφουμε $\|\psi(x,y)\| = \{(x,y) \in X \times Y|\ \psi(x,y)\}$). Θεωρούμε ότι μπορούμε να έχουμε στη γλώσσα της λογικής μεταβλητές διαφορετικών ειδών (π.χ του είδους Q, ή του είδους Y, ή του είδους $X \times Y$) καθώς και ότι η συνάρτηση προβολής π ερμηνεύει κάποιο συναρτησιακό σύμβολο της γλώσσας.

Αν λοιπόν θεωρήσουμε το $\|\psi(x,y)\| = \{(x,y) \in X \times Y|\ \psi(x,y)\} \subseteq X \times Y$, η δράση της αριστερά προσαρτημένης απεικόνισης είναι

$$\begin{aligned}\pi[\|\psi(x,y)\|] &= \{w \in X|\ w = \pi(x,y),\ (x,y) \in \|\psi(x,y)\|\}\\ &= \{x \in X|\ \exists y\ \psi(x,y)\},\end{aligned}$$

δηλαδή $\pi[\|\psi(x,y)\|]$ είναι το σύνολο που αντιστοιχεί στο κατηγόρημα $\exists y\ \psi(x,y)$. Είναι επομένως εύλογο να συμβολίζουμε αυτήν την αριστερά προσαρτημένη απεικόνιση ως $\exists\colon P(X \times Y) \to P(X)$. Από την άλλη πλευρά, η συνάρτηση π^{-1} όταν δρα στο σύνολο $\|\phi(x)\|$ δίνει

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(\|\phi(x)\|) &= \{(x,y)|\ \pi(x,y) \in \|\phi(x)\|\}\\ &= \{(x,y)|\ \phi(\pi(x,y))\}\\ &= \|\phi(\pi(x,y))\|\end{aligned}$$

Με το τελευταίο σύμβολο εννοούμε την έκταση του κατηγορήματος $\phi(\pi(x,y))$, δηλαδή του κατηγορήματος που προκύπτει με την αντικατάσταση του όρου $\pi(x,y)$ για τη μεταβλητή x στο ϕ. Μπορούμε λοιπόν να συνοψίσουμε το παραπάνω στη διατύπωση: **η υπαρξιακή ποσοδείκτιση, ως λογική πράξη, είναι μια απεικόνιση αριστερά προσαρτημένη στην πράξη της αντικατάστασης.**

Ομοίως μπορούμε να αντιμετωπίσουμε και τη δεξιά προσαρτημένη απεικόνιση της π^{-1}. Αν, για λόγους συμμετρίας, παρακινηθούμε να ορίσουμε αυτήν τη δεξιά προσαρτημένη απεικόνιση ως

$$\forall\colon P(X \times Y) \to P(X)$$

$$\|\psi(x,y)\| \mapsto \{x \in X |\ \forall y\ \psi(x,y)\}$$

θα δούμε ότι ο ορισμός είναι πράγματι ο σωστός:

$$\frac{\pi^{-1}(\|\phi(x)\|) \subseteq \|\psi(x,y)\|}{\dfrac{\{(x,y)|\ \phi(\pi(x,y))\} \subseteq \{(x,y) \in X \times Y |\ \psi(x,y)\}}{\dfrac{\{x \in X |\ \phi(x)\} \subseteq \{x \in X |\ \forall y\ \psi(x,y)\}}{\|\phi(x)\| \subseteq \|\forall \psi(x,y)\|}}}$$

(Ο αναγνώστης ας ελέγξει προσεκτικά τους λόγους για τους οποίους έχουμε την ισοδυναμία ανάμεσα στη δεύτερη και την τρίτη γραμμή, παραπάνω.) Συνοψίζουμε λοιπόν κι εδώ με τη διατύπωση: **η καθολική ποσοδείκτιση, ως λογική πράξη, είναι μια απεικόνιση δεξιά προσαρτημένη στην πράξη της αντικατάστασης.**

Οπως λοιπόν με το φορμαλισμό των Heyting αλγεβρών μπορούμε με αλγεβρικό τρόπο να διαπιστώνουμε την εγκυρότητα των λογικών νόμων, στα πλαίσια της προτασιακής λογικής του ενοραρισμού, έτσι μπορούμε με τη βοήθεια των παραπάνω να ελέγχουμε την εγκυρότητα των λογικών νόμων της κατηγορηματικής λογικής, στα πλαίσια του ίδιου συστήματος. Ετσι, για παράδειγμα, ισχύουν οι νόμοι

$$\exists x(\phi(x) \vee \psi(x)) \leftrightarrow \exists x\phi(x) \vee \exists x\psi(x), \quad \forall x(\phi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow \forall x\phi(x) \wedge \forall x\psi(x)$$

ως απλή συνέπεια του γεγονότος ότι οι αριστερά προσαρτημένες απεικονίσεις διατηρούν suprema και οι δεξιά προσαρτημένες infima, αντίστοιχα.

Σχόλιο: Στην ενότητα αυτή υπήρξαμε σκόπιμα κάπως ασαφείς γύρω από ορισμένα θέματα. Δεν θελήσαμε να πούμε ρητά ποιό είναι το είδος της δομής που αντιστοιχεί στο σύστημα του κατηγορηματικού λογισμού (είτε στα πλαίσια της λογικής του ενορατισμού είτε στην κλασική λογική). Θελήσαμε, μάλλον, να υποδείξουμε ότι η έννοια της προσάρτησης υπεισέρχεται ως βασικό μέρος αυτής της δομής. Η πλήρης απάντηση στοερώτημα ποιά είναι τελικά αυτή η δομή μπορεί να απαντηθεί μόνο στο πλαίσιο της θεωρίας των κατηγοριών.

3.5 Ασκήσεις

1. Εστω ότι $g: Y \leftrightarrows X: f$, $f \dashv g$ είναι προσαρτημένες απεικονίσεις ανάμεσα σε διατεταγμένα σύνολα. Τότε τα σύνολα $Y_0 = \{y \in Y | \ f(g(y)) = y\}$ και $X_0 = \{x \in X | \ g(f(x)) = x\}$ είναι ισόμορφα, μέσω των περιορισμών $g_0 = g|_{Y_0}$ και $f_0 = f|_{X_0}$ στα Y_0 και X_0, αντίστοιχα.

2. Χρησιμοποιήστε την έκφραση του supremum ως αριστερά προσαρτημένης απεικόνισης για να δείξετε ότι, αν έχουμε μια διπλά παραμετρικοποιημένη οικογένεια στοιχείων ενός διατεταγμένου συνόλου X, $\{x_{i,j} | \ i \in I, \ j \in J\}$, τότε

$$\bigvee_i \bigvee_j x_{i,j} = \bigvee_j \bigvee_i x_{i,j}$$

3. Δείξτε ότι κάθε άλγεβρα Boole είναι και Heyting άλγεβρα, δηλαδή ότι αν σε μια άλγεβρα Boole ορίσουμε τη συνεπαγωγή ως $a \to b = \neg a \vee b$, τότε $a \wedge - \dashv a \to -$.

4. Δείξτε ότι μια Heyting άλγεβρα που ικανοποιεί, για κάθε στοιχείο της x, $\neg\neg x = x$, είναι άλγεβρα Boole

5. Δείξτε ότι αν σε μια Heyting άλγεβρα το στοιχείο x έχει συμπλήρωμα τότε αυτό είναι κατ΄ ανάγκη το $x \to 0$.

6. Δείξτε ότι μια Heyting άλγεβρα που ικανοποιεί, για κάθε στοιχείο της x, $x \vee \neg x = 1$, είναι άλγεβρα Boole

7. Δείξτε ότι μια σε Heyting άλγεβρα ισχύουν τα παρακάτω:

(i) Αν $x \leq y$ τότε $y \to z \leq x \to z$, δηλαδή η απεικόνιση $(-) \to z: P \to P$ αντιστρέφει τη διάταξη.

(ii) $y \leq x \to y$

(iii) $x \wedge (x \to y) = x \wedge y$

(iv) $x \to x = 1$

(v) $y \wedge (x \to y) = y$

8. Δείξτε ότι μια σε Heyting άλγεβρα ισχύει ότι

$$\neg x \vee y \leq x \to y, \quad \neg\neg(x \to y) = \neg\neg x \to \neg\neg y$$

9. Εξηγήστε γιατί, στα πλαίσια της λογικής του ενοραισμού, ισχύει ο λογικός νόμος

$$\exists x\ \neg\phi(x) \to \neg\forall x \phi(x)$$

Το ίδιο για το νόμο

$$\neg\neg\forall x \phi(x) \to \forall x \neg\neg\phi(x)$$

10. Εστω ότι $g\colon Y \leftrightarrows X\colon f$, $f \dashv g$ είναι προσαρτημένες απεικονίσεις ανάμεσα σε δύο πλήρη δικτυωτά. Δείξτε ότι η g διατηρεί κατευθυνόμενα suprema αν και μόνο αν η f διατηρεί πεπερασμένα στοιχεία, δηλαδή έχει την ιδότητα ότι αν $x \in X$ είναι πεπρασμένο τότε και $f(x) \in Y$ είναι πεπερασμένο.

11. Εστω ότι $g\colon Y \leftrightarrows X\colon f$, $f \dashv g$ είναι προσαρτημένες απεικονίσεις ανάμεσα σε δύο διατεταγμένα σύνολα. Δείξτε ότι η g είναι ένα - προς - ένα αν και μόνο αν ισχύει ότι $f \circ g = id_Y$.

12. Δείξτε ότι μια σε Heyting άλγεβρα το σύνολο των στοιχείων της που ικανοποιούν τη σχέση $\neg\neg x = x$ αποτελούν άλγεβρα Boole. Μπορεί αυτό το σύνολο να είναι κενό;

13. Εστω ότι $g\colon Y \leftrightarrows X\colon f$, $f \dashv g$ είναι προσαρτημένες απεικονίσεις ανάμεσα σε δύο διατεταγμένα σύνολα. Δείξτε ότι αν η g είναι ένα - προς - ένα και το X είναι πλήρες δικτυωτό, τότε και το Y είναι πλήρες δικτυωτό (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Ασκηση 11.)

14. Εστω P ένα άνω ημιδικτυωτό. Τι σημαίνει ότι η συνάρτηση (που διατηρεί τη διάταξη)

$$\Downarrow(-)\colon P \to \mathrm{Idl}(P)$$

έχει αριστερά προσαρτημένη;

15. (Συνθήκη Beck - Chevalley) Δείξτε ότι, για κάθε συνάρτηση $f\colon Z \to Y$, το τετράγωνο

$$\begin{array}{ccc} P(Z \times Y) & \xrightarrow{\pi_Y[-]} & P(Y) \\ \Big\uparrow{\scriptstyle (id_Z \times f)^{-1}} & & \Big\uparrow{\scriptstyle f^{-1}} \\ P(Z \times X) & \xrightarrow{\pi_X[-]} & P(X) \end{array}$$

(όπου $(id_X \times f)(z,x) = (z, f(x))$ και π_Y, π_X οι προφανείς προβολές) αντιμετατίθεται.

16. Ορίστε την πράξη της συνεπαγωγής στο πλήρες επιμεριστικό δικτυωτό $\mathrm{Idl}(D)$, όπου D είναι επιμεριστικό δικτυωτό. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $\downarrow(-)\colon D \to \mathrm{Idl}(D)$ τη διατηρεί.

17. Εστω $f\colon H \to H'$ μια συνάρτηση ανάμεσα σε Heyting άλγεβρες που διατηρεί suprema, infima και τη συνεπαγωγή. Δείξτε ότι τότε η συνάρτηση "αντίστροφη εικόνα" $f^{-1}\colon \mathrm{Idl}(H') \to \mathrm{Idl}(H)$ ικανοποιεί τη σχέση

$$f^{-1}(I \cap f[J]) = f^{-1}(I) \cap J,$$

όπου $I \in \mathrm{Idl}(H')$ και $J \in \mathrm{Idl}(H)$.

Κεφάλαιο 4

Σημεία και Πληρότητα

Εισαγωγή Στο προηγούμενο κεφάλαιο τέθηκε το ζήτημα κατά πόσο η οποιαδήποτε πλήρης Heyting άλγεβρα μπορεί να ειδωθεί ως το σύνολο των ανοικτών υποσυνόλων ενός τοπολογικού χώρου. Ξεκινά δηλαδή κάποιος με ένα πλήρες επιμεριστικό δικτυωτό και προσπαθεί να βρει ένα σύνολο σημείων ώστε το δοθέν δικτυωτό να είναι μια συλλογή υποσυνόλων αυτού του συνόλου σημείων. Πώς θα μπορούσαμε από ένα τέτοιο πλήρες επιμεριστικό δικτυωτό, και μόνο, να βρούμε το ζητούμενο σύνολο σημείων; Ας φανταστούμε ότι ένα τέτοιο σύνολο X είχε βρεθεί. Τότε το κάθε σημείο $x \in X$ θα προσδιοριζόταν μονοσήμαντα από μια συνεχή συνάρτηση $\ulcorner x \urcorner : \{\star\} \to X$, τη συνάρτηση δηλαδή που στο μοναδικό στοιχείο ενός μονοσυνόλου αντιστοιχίζει το δοθέν $x \in X$ (μια τέτοια συνάρτηση είναι φυσικά συνεχής). Ομως, είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, μια συνεχής συνάρτηση $f : Y \to X$ ανάμεσα σε τοπολογικούς χώρους προσδιορίζει μια απεικόνιση $f^{-1}[-] : O(X) \to O(Y)$ ανάμεσα στις Heyting άλγεβρες των ανοικτών υποσυνόλων, με την ιδιότητα ότι διατηρεί όλα τα suprema και πεπερασμένα infima. Βέβαια στην προκειμένη περίπτωση η Heyting άλγεβρα των ανοικτών υποσυνόλων του μονοσυνόλου απαρτίζεται από, όλα κι όλα, δύο ανοικτά υποσύνολα, το κενό και το μονοσύνολο. Πρόκειται δηλαδή για τη Heyting άλγεβρα $\{0, 1\}$ (η οποία είναι φυσικά άλγβερα Boole στη παρούσα περίπτωση). Παίρνουμε λοιπόν αυτήν την παρατήρηση ως αφετηρία της αναζήτησής μας. Ρωτάμε δηλαδή κατά πόσο μια δοθείσα πλήρης Heyting άλγεβρα A είναι ισόμορφη με το σύνολο των ανοικτών υποσυνόλων για μια τοπολογία πάνω στο σύνολο των συναρτήσεων που διατηρούν όλα τα suprema και πεπερασμένα infima από την δοθείσα άλγβερα στο σύνολο $2 = \{0, 1\}$.

4.1 Ομομορφισμοί και φίλτρα

Η παραπάνω συζήτηση έδειξε ότι το αντικείμενο της αναζήτησής μας εδώ είναι οι συναρτήσεις διατηρούν όλα τα suprema και πεπερασμένα infima με τιμές στο 2. Ας επικεντρώσουμε κατ΄ αρχάς την προσοχή μας στις απεικονίσεις με τιμές στο $2 = \{0, 1\}$, οι οποίες διατηρούν απλώς τα πεπερασμένα suprema και infima, δηλαδή στους ομομορφισμούς δικτυωτών με τιμές στο 2.

4.1.1 Πρόταση. *Υπάρχει ένα - προς - ένα αντιστοιχία ανάμεσα στα ακόλουθα δεδομένα επί ενός επιμεριστικού δικτυωτού D:*

(i) Ομομορφισμοί δικτυωτών $\varphi\colon D \to 2$

(ii) Γνήσια φίλτρα F του D (δηλαδή $0 \notin F$) που έχουν την ιδιότητα ότι αν $x \vee y \in F$ τότε $x \in F$ ή $y \in F$

(iii) Γνήσια ιδεώδη I του D (δηλαδή $1 \notin I$) που έχουν την ιδιότητα ότι αν $x \wedge y \in I$ τότε $x \in I$ ή $y \in I$

Απόδειξη: Δείχνουμε πρώτα την αντιστοιχία μεταξύ των δεδομένων (i) και (ii). Δοθέντος ενός ομομορφισμού $\varphi\colon D \to 2$ ορίζουμε το σύνολο:

$$F_\varphi = \{a \in D |\ \varphi(a) = 1\}$$

Το F_φ είναι φίλτρο. Γιατί, αν $a \in F_\varphi$ και $a \leq b$ τότε $\varphi(b) \geq \varphi(a) = 1$, άρα $b \in F_\varphi$, ενώ αν $a \in F_\varphi$ και $b \in F_\varphi$ τότε

$$\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b) = 1$$

άρα $a \wedge b \in F_\varphi$. Επίσης, αν $a \vee b \in F_\varphi$ τότε $1 = \varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b)$ άρα $\varphi(a) = 1$ ή $\varphi(b) = 1$, δηλαδή, $a \in F_\varphi$ ή $b \in F_\varphi$.

Αντίστροφα, δοθέντος ενός φίλτρου F με την ιδιότητα του (ii) ορίζουμε τη συνάρτηση $\varphi_F\colon D \to 2$ με

$$\varphi_F(a) = \begin{cases} 1, & a \in F \\ 0, & a \notin F \end{cases} \tag{4.1}$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι ο φ_F είναι ομομορφισμός δικτυωτών. Κατ΄ αρχήν διατηρεί τη διάταξη, γιατί αν $a \leq b$ και $\varphi_F(a) = 1$ τότε $a \in F$ άρα και $b \in F$, οπότε $\varphi_F(b) = 1$ (στην περίπτωση που $\varphi_F(a) = 0$ η ανισότητα είναι τετριμένη), ενώ $\varphi_F(1) = 1$, γιατί $1 \in F$ και $\varphi_F(0) = 0$, γιατί $0 \notin F$. Μένει επομένως να δείξουμε ότι οι ισχύουν οι ανισότητες $\varphi_F(a \vee b) \leq \varphi_F(a) \vee \varphi_F(b)$ και $\varphi_F(a) \wedge \varphi_F(b) \leq \varphi_F(a \wedge b)$. Ξανά, στη μη τετριμένη περίπτωση, έστω ότι $\varphi_F(a \vee b) = 1$. Αυτό σημαίνει ότι $a \vee b \in F$ άρα $a \in F$ ή $b \in F$, οπότε

$\varphi_F(a) \vee \varphi_F(b) = 1$. Επίσης, αν $\varphi_F(a) \wedge \varphi_F(b) = 1$ τότε $\varphi_F(a) = 1$ και $\varphi_F(b) = 1$, άρα $a \in F$ και $b \in F$, οπότε και $a \wedge b \in F$. Καταλήγουμε λοιπόν ότι $\varphi_F(a \wedge b) = 1$.

Προφανώς οι δύο διαδικασίες είναι αντίστροφες η μια στην άλλη, π.χ $\varphi_{F_\varphi}(a) = 1$ αν και μόνο αν $a \in F_\varphi$ αν και μόνο αν $\varphi(a) = 1$, άρα $\varphi_{F_\varphi} = \varphi$.

Αναφορικά με την αντιστοιχία ανάμεσα στα δεδομένα του (ii) και του (iii) αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν το F είναι φίλτρο του D με τις ιδιότητες του (ii) τότε το συμπλήρωμά του $D - F$ είναι ιδεώδες του D με τις ιδιότητες του (iii), ενώ, αν ξεκινήσουμε με ένα ιδεώδες που έχει τις ιδιότητες του (iii), το συμπλήρωμά του είναι ένα φίλτρο με τις ιδιότητες του (ii). Για παράδειγμα, έστω ότι $a \in D - F$ και $b \in D - F$. Τότε $a \vee b \in D - F$ (γιατί, διαφορετικά, $a \vee b \in F$, οπότε, από την ιδιότητα του (ii) κατ΄ ανάγκη $a \in F$ ή $b \in F$ - άτοπο). Επίσης, έστω ότι $a \wedge b \in D - F$. Τότε $a \in D - F$ ή $b \in D - F$, γιατί αν και τα δύο a, b ήσαν στο F, θα ήταν και το $a \wedge b$, από τον ορισμό του φίλτρου. Κλείνουμε την απόδειξη με την παρατήρηση ότι, φυσικά, υπάρχει μιά ένα - προς - ένα αντιστοιχία ανάμεσα σε υποσύνολα ενός συνόλου και τα συμπληρώματά τους. ■

Σκεφτόμενοι την αναλογία των πράξεων $\vee$, $\wedge$ με τις πράξεις $+$ και ., αντίστοιχα, της άλγεβρας καλούμε ένα ιδεώδες που πληρεί τη συνθήκη του (iii), παραπάνω, **πρώτο**. Εμμένοντας στη ορολογία αυτή καλούμε **πρώτο φίλτρο** ένα φίλτρο που πληρεί τη συνθήκη του (ii) της παραπάνω πρότασης.

4.1.2 Πρόταση. *Εστω ότι το A είναι πλήρες επιμεριστικό δικτυωτό. Τότε η αντιστοιχία της παραπάνω πρότασης ανάμεσα στα δεδομένα (i) και (ii) περιορίζεται σε μια αντιστοιχία ανάμεσα σε*

(i) Ομομορφισμούς δικτυωτών $\varphi\colon A \to 2$ που διατηρούν όλα τα suprema και πεπερασμένα infima

*(ii) Γνήσια φίλτρα F του A που είναι **πλήρως πρώτα**, δηλαδή έχουν την ιδιότητα ότι αν $\bigvee S \in F$ τότε υπάρχει $s \in S$ με $s \in F$*

(iii) Γνήσια ιδεώδη I του A, τα οποία είναι πρώτα και κύρια, δηλαδή είναι της μορφής $I = \downarrow(x)$.

Επιπλέον σε αυτήν την περίπτωση τα παραπάνω αντιστοιχούν και στα εξής δεδομένα:

(iv) Πρώτα στοιχεία του A, δηλαδή στοιχεία x με την ιδιότητα $a \wedge b \leq x \;\Rightarrow\; a \leq x$ ή $b \leq x$

Απόδειξη: Αναφορικά με την αντιστοιχία ανάμεσα στα δεδομένα του (i) και του (ii) αρκεί να δείξουμε ότι αν το φίλτρο F είναι πλήρως πρώτο τότε ο ομομορφισμός φ_F, όπως ορίστηκε στην απόδειξη της παραπάνω πρότασης, διατηρεί όλα τα suprema και, αντιστρόφως, ότι αν ο ομομορφισμός φ διατηρεί όλα τα suprema τότε το φίλτρο F_φ που του αντιστοιχεί, όπως στην παραπάνω απόδειξη, είναι πλήρως πρώτο. Πράγματι, αν το φίλτρο F είναι πλήρως πρώτο τότε $\varphi_F(\bigvee S) = 1$ σημαίνει $\bigvee S \in F$ άρα υπάρχει $s \in S$ τέτοιο ώστε $s \in F$. Επεται ότι $\varphi_F(s) = 1$, άρα και $\bigvee\{\varphi_F(s) |\ s \in S\} = 1$.

Αντιστρόφως, αν $\varphi(\bigvee S) = \bigvee\{\varphi(s) |\ s \in S\}$, για έναν ομομορφισμό $\varphi\colon A \to 2$ και για το φίλτρο F_φ έχουμε ότι $\bigvee S \in F_\varphi$, τότε

$$\varphi(\bigvee S) = \bigvee\{\varphi(s) |\ s \in S\} = 1$$

άρα υπάρχει $s \in S$ ώστε $\varphi(s) = 1$, δηλαδή $s \in F$.

Αναφορικά με την αντιστοιχία ανάμεσα στα δεδομένα του (i) και του (iii) έχουμε ότι το σύνολο $I = \{t \in A |\ \varphi(t) = 0\}$ είναι ιδεώδες και είναι της μορφής $I = \downarrow(x)$, όπου $x = \bigvee\{t \in X |\ \varphi(t) = 0\}$. Είναι προφανές ότι $t \in I$ αν και μόνο αν $t \leq \bigvee\{t \in X |\ \varphi(t) = 0\}$. Πράγματι, αν ισχύει η τελευταία συνθήκη τότε εφαρμόζοντας την φ στην ανισότητα θα πάρουμε $\varphi(t) = 0$, άρα $t \in I = \{t \in X |\ \varphi(t) = 0\}$, ενώ αν κάτι ανήκει στο ιδεώδες I τότε έχει $\varphi(t) = 0$, άρα ικανοποιεί την ανισότητα. Αντίστροφα, αν $I = \downarrow(x)$ είναι ένα πρώτο ιδεώδες τότε το στοιχείο x είναι προφανώς πρώτο, με την έννοια της συνθήκης (iv). Αν ορίσουμε τη συνάρτηση $\varphi_x\colon A \to 2$ με

$$\varphi_x(t) = \begin{cases} 1, & t \nleq x \\ 0, & t \leq x \end{cases} \tag{4.2}$$

εύκολα διαπιστώνουμε ότι διατηρεί όλα τα suprema. Το γεγονός ότι διατηρεί πεπερασμένα infima αντιστοιχεί στο ότι αν

$\varphi_x(t) \wedge \varphi_x(s) = 1$ τότε $\varphi_x(t) = 1$ και $\varphi_x(s) = 1$, οπότε $t \nleq x$ και $s \nleq x$, άρα κατ' ανάγκη $\varphi_x(t \wedge s) = 1$, γιατί διαφορετικά θα ήταν $t \wedge s \leq x$, πράγμα άτοπο.

Τέλος η αντιστοιχία ανάμεσα στα δεδομένα του (iv) και του (iii) είναι προφανής. ■

Ειδικώτερα, για την περίπτωση που το πλήρες επιμεριστικό δικτυωτό είναι της μορφής $A = \mathrm{Idl}(D)$, για κάποιο έπιμεριστικό δικτυωτό D, έχουμε

4.1.3 Πόρισμα. *Εστω ότι το $A = \mathrm{Idl}(D)$ είναι ένα συνοχικό πλαίσιο. Τότε στα δεδομένα της παραπάνω πρότασης αντιστοιχούν επίσης*

(v) Πρώτα ιδεώδη του D.

Απόδειξη: Βάση της παραπάνω πρότασης, αρκεί να δείξουμε ότι τα πρώτα στοιχεία του συνόλου των ιδεωδών είναι το ίδιο πράγμα με τα πρώτα ιδεώδη του επιμεριστικού δικτυωτού (οπότε αποφεύγεται και η σύγκρουση στην ορολογία που έχουμε υιοθετήσει). Πράγματι, έστω ότι το I είναι ένα πρώτο στοιχείο του $\mathrm{Idl}(D)$, ικανοποιεί δηλαδή την ιδιότητα

$$J \cap K \subseteq I \text{ έπεται } J \subseteq I \text{ ή } K \subseteq I$$

Τότε είναι και πρώτο ιδεώδες, γιατί αν $b \wedge c \in I$, ισοδύναμα αν $\downarrow(b) \cap \downarrow(c) \subseteq I$, οπότε $\downarrow(b) \subseteq I$ ή $\downarrow(c) \subseteq I$. Αρα $b \in I$ ή $c \in I$.

Αντίστροφα, αν το I είναι πρώτο ιδεώδες και $J \cap K \subseteq I$, ας υποθέσουμε ότι $J \nsubseteq I$ (οπότε υπάρχει $j \in J$ με $j \notin K$). Θα δείξουμε ότι $K \subseteq I$. Εστω λοιπόν ότι $k \in K$. Τότε το $j \wedge k \in J \cap K$ (γιατί $j \wedge k \leq j \in J$, $j \wedge k \leq k \in K$). Επεται ότι $j \wedge k \in I$. Αρα, αναγκαστικά, $k \in I$. ∎

Δοθέντος ενός πλήρους επιμεριστικού δικτυωτού A ας αναφερόμαστε στο σύνολο των απεικονίσεων $A \to 2$ που διατηρούν όλα τα suprema και πεπερασμένα infima ως **το σύνολο των σημείων** του A και ας το συμβολίζουμε με $\mathrm{pts}(A)$.

4.2 Το σύνολο των σημείων ως τοπολογικός χώρος

Είδαμε ως εδώ τι είδους οντότητες πρέπει να παίξουν το ρόλο των σημείων ενός τοπολογικού χώρου, προκειμένου να αναπαραστήσουμε το δοθέν πλήρες δικτυωτό A ως τη συλλογή των ανοικτών υποσυνόλων του χώρου αυτού. Πρέπει στη συνέχεια να προσδιορίσουμε, πάλι με τους όρους του δικτυωτού A, μια τοπολογία πάνω στο σύνολο $\mathrm{pts}(A)$ και στη συνέχεια να τη συγκρίνουμε, ως δικτυωτό, με το δοθέν A. Σε αυτήν την κατεύθυνση έχουμε τα εξής:

4.2.1 Πρόταση. *Η απεικόνιση $\varphi\colon A \to P(\mathrm{pts}A)$, προς το δυναμοσύνολο του συνόλου των σημείων του A που ορίζεται*

$$\varphi(a) = \{p \in \mathrm{pts}(A) \mid p(a) = 1\}$$

διατηρεί όλα τα suprema και τα πεπερασμένα infima του A.

Απόδειξη: Για τα πεπερασμένα infima έχουμε $\varphi(1) = \{p \in \mathrm{pts}(A) \mid p(1) = 1\} = \mathrm{pts}(A)$ και

$$
\begin{aligned}
\varphi(a \wedge b) &= \{p \in \mathrm{pts}(A) \mid p(a \wedge b) = 1\} \\
&= \{p \in \mathrm{pts}(A) \mid p(a) = 1 \ \& \ p(b) = 1\} \\
&= \{p \in \mathrm{pts}(A) \mid p(a) \wedge p(b) = 1\} \\
&= \{p \in \mathrm{pts}(A) \mid p(a) = 1\} \cap \{p \in \mathrm{pts}(A) \mid p(b) = 1\} \\
&= \varphi(a) \cap \varphi(b),
\end{aligned}
$$

ενώ για τη διατήρηση των suprema:

$$
\begin{aligned}
\varphi(\bigvee S) &= \{p \in \mathrm{pts}(A) \mid p(\bigvee S) = 1\} \\
&= \{p \in \mathrm{pts}(A) \mid \bigvee_{s \in S} p(s) = 1\} \\
&= \{p \in \mathrm{pts}(A) \mid \exists s \in S \ p(s) = 1\} \\
&= \bigcup_{s \in S} \{p \in \mathrm{pts}(A) \mid p(s) = 1\} \\
&= \bigcup \{\varphi(s) | \ s \in S\} \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

4.2.2 Πόρισμα. *Η εικόνα της συνάρτησης φ της παραπάνω πρότασης ορίζει μια τοπολογία πάνω στο σύνολο των σημείων του A (δηλαδή μια συλλογή υποσυνόλων του συνόλου των σημείων που είναι κλειστή ως προς όλες τις ενώσεις και τις πεπερασμένες τομές)*

Απόδειξη: Αν $\{U_i \mid i \in I\}$ είναι μια οικογένεια υποσυνόλων στην εικόνα της φ (δηλαδή $U_i = \varphi(a_i)$, για κάποιο $a_i \in A$) τότε

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} \varphi(a_i) = \varphi(\bigvee_{i \in I} a_i),$$

δηλαδή η ένωση των U_i είναι επίσης στην εικόνα της φ. Ομοίως και για την τομή. $\blacksquare$

Αν συμβολίσουμε με $O(\mathrm{pts}A)$ τη συλλογή των ανοικτών υποσυνόλων του συνόλου των σημείων, όπως μόλις την προσδιορίσαμε, έχουμε μία απεικόνιση πλήρων επιμεριστικών δικτυωτών $\varphi \colon A \to O(\mathrm{pts}A)$, οποία είναι επί. Γίνεται τώρα φανερό ότι, αν η απεικόνιση φ ανακλά τη διάταξη, έχουμε έναν ισομορφισμό ανάμεσα στα δικτυωτά A και $O(\mathrm{pts}A)$, όπως επιθυμούσαμε. Ας αναλύσουμε, λοιπόν, τι σημαίνει ότι η απεικόνιση φ ανακλά τη διάταξη. Θέλουμε, αν είναι $\varphi(a) \subseteq \varphi(b)$, να είναι και $a \leq b$. Αυτό είναι ισοδύναμο με τη συνθήκη:

$$\forall p \ \ (p(a) = 1 \Rightarrow p(b) = 1) \ \Rightarrow \ a \leq b,$$

οπότε μέσω του αντιθετοαντίστροφου καταλήγουμε

$$(a \nleq b \Rightarrow (\exists p \in \mathrm{pts}(A))(p(a) = 1 \ \& \ p(b) = 0)).$$

Καταλήγουμε λοιπόν στη συνθήκη

$$\forall a \in A \, \forall b \in A \ \ (a \nleq b \Rightarrow (\exists p \in \mathrm{pts}(A))(p(a) = 1 \ \& \ p(b) = 0))$$

Στην περίπτωση που ικανοποιείται λέμε ότι το πλήρως επιμεριστικό δικτυωτό A **έχει αρκετά σημεία**.

4.2.3 Πρόταση. *Εστω ότι το πλήρως επιμεριστικό δικτυωτό A έχει αρκετά σημεία και $f\colon B \to A$ μια απεικόνιση που ανακλά τη διάταξη. Τότε και το B έχει αρκετά σημεία.*

Απόδειξη Εστω ότι u, v είναι δύο στοιχεία του B με $u \nleq v$. Αφού η f ανακλά τη διάταξη είναι $f(u) \nleq f(v)$ στο A. Το A έχει αρκετά σημεία, οπότε υπάρχει $p\colon A \to 2$ ώστε $p(f(u)) = 1$ και $p(f(v)) = 0$. Η σύνθεση $p \circ f\colon B \to 2$ είναι ένα σημείο του B, όποτε προκύπτει το ζητούμενο. ■

Παρατήρηση Η παραπάνω απλή πρόταση, σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα της επόμενης ενότητας μας εξασφαλίζει την ύπαρξη αρκετών σημείων για μία ευρεία κλάση από πλήρως επιμεριστικά δικτυωτά.

4.3 Δυϊσμός Stone για επιμεριστικά δικτυωτά

Μας ενδιαφέρει εδώ να δείξουμε ότι τα συνοχικά πλαίσια, δηλαδή τα πλήρως επιμεριστικά δικτυωτά της μορφής $\mathrm{Idl}(D)$, όπου D είναι ένα επιμεριστικό δικτυωτό, έχουν αρκετά σημεία. Θα αποδείξουμε δηλαδή το

4.3.1 Θεώρημα. *Κάθε πλήρως επιμεριστικό δικτυωτό της μορφής $\mathrm{Idl}(D)$ έχει αρκετά σημεία.*

Απόδειξη: Ξεκινάμε με την παραδοχή ότι I, J είναι δύο ιδεώδη του D, τέτοια ώστε $J \nsubseteq I$. Θέλουμε να βρούμε $p\colon \mathrm{Idl}(D) \to 2$ τέτοια ώστε $p(J) = 1$, $p(I) = 0$. Θα αξιοποιήσουμε την ανάλυση της πρώτης ενότητας για να απλοποιήσουμε το πραγματικό ζητούμενο και θα καταλήξουμε μέσα από κάποια λήμματα.

Κατ΄ αρχήν, όπως είδαμε στην Πρόταση 4.1.2 και το Πόρισμα 4.1.3 η ύπαρξη ενός $p\colon \mathrm{Idl}(D) \to 2$ με τις παραπάνω ιδιότητες ισοδυναμεί με την ύπαρξη ενός πρώτου ιδεώδους P με τις ιδιότητες $P \not\supseteq J$ και $P \supseteq I$. Οι δύο τελευταίες ιδιότητες που ζητάμε να ικανοποιεί το πρώτο ιδεώδες P εξηγούνται από το ότι ο ομομορφισμός πλαισίων $\varphi_P\colon \mathrm{Idl}(D) \to 2$ που προσδιορίζει το P θα έχει $\varphi_P(J) = 1$ αν $P \not\supseteq J$ και $\varphi_P(I) = 0$ αν $P \supseteq I$, όπως είδαμε στην απόδειξη της Πρότασης 4.1.2. Επιπλέον, έχουμε το δεδομένο ότι $J \nsubseteq I$, άρα υπάρχει $a \in J$ με $a \notin I$. Αν λοιπόν μπορούμε να βρούμε ένα πρώτο ιδεώδες $P \supseteq I$ τέτοιο ώστε, για το δεδομένο a, $a \notin P$, τότε ξέρουμε ότι $J \nsubseteq P$ (γιατί διαφορετικά θα ήταν $a \in P$).

Στη συνέχεια θα κάνουμε μια εφαρμογή του λήμματος του Zorn, που όπως και στην περίπτωση της Θεωρίας των Δακτυλίων είναι ο μοναδικός μηχανισμός που διαθέτουμε για να παράγουμε πρώτα ιδεώδη. Για την ακρίβεια το λήμμα αυτό, το οποίο είναι λογικά ισοδύναμο με το αξίωμα της επιλογής στη Θεωρία Συνόλων μας εφοδιάζει με μεγιστικά (maximal) στοιχεία σε διάφορα διατεταγμένα σύνολα. Εδώ θα προσδιορίσουμε προσεκτικά ένα τέτοιο διατεταγμένο σύνολο ιδεωδών, ώστε ένα μεγιστικό στοιχείο για αυτό να είναι το ζητούμενο πρώτο ιδεώδες. Θυμίζουμε, πρώτα απ•όλα το περιεχόμενο του λήμματος του Zorn:

4.3.2 Λήμμα. *Εστω ένα διατεταγμένο σύνολο, στο οποίο κάθε κατευθυνόμενο υποσύνολό του έχει supremum. Τότε υπάρχει σε αυτό το σύνολο ένα μεγιστικό στοιχείο, δηλαδή ένα στοιχείο που τα μόνα στοιχείο που είναι μεγαλύτερο ή ίσο από αυτό είναι ο εαυτός του.*

4.3.3 Λήμμα. *Εστω το σύνολο των ιδεωδών που περιέχουν το I ως υποσύνολο και έχουν κενή τομή με το φίλτρο $\uparrow(a)$. Τότε το σύνολο αυτών των ιδεωδών πληρεί την υπόθεση του λήμματος του Zorn (άρα έχει μεγιστικό στοιχείο).*

Απόδειξη: Εστω ότι $\{K_l |\ l \in L\}$ είναι ένα σύνολο ιδεωδών, τα οποία περιέχουν το ιδεώδες I και έχουν κενή τομή με το φίλτρο $\uparrow(a)$. Τότε το supremum τους στο σύνολο των ιδεωδών είναι το ιδεώδες $\bigcup_l K_l$, το οποίο αφενός μεν περιέχει το I, αφεταίρου δε δεν τέμνει το $\uparrow(a)$. Γιατί αν συνέβαινε η τομή $\bigcup_l K_l \cap \uparrow(a)$ να είναι μη κενή τότε θα ήταν $a \in \bigcup_l K_l$, άρα και $K_l \cap \uparrow(a) \neq \emptyset$, για κάποιο $l \in L$, πράγμα άτοπο. Είναι προφανές ότι το $\bigcup_l K_l$ είναι το supremum και μέσα στο περιορισμένο σύνολο ιδεωδών της υπόθεσης. ■

Το λήμμα του Zorn μας εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός ιδεώδους που είναι μεγιστικό ανάμεσα σε αυτά που περιέχουν το I ως υποσύνολο και έχουν κενή τομή με το φίλτρο $\uparrow(a)$. Τότε έχουμε

4.3.4 Λήμμα. *Εστω ότι το ιδεώδες J είναι μεγιστικό μεταξύ αυτών που περιέχουν το I ως υποσύνολο και έχουν κενή τομή με το φίλτρο $\uparrow(a)$. Τότε το ιδεώδες J είναι πρώτο.*

Απόδειξη: Εστω λοιπόν ότι $b \wedge c \in J$. Θεωρούμε τα ιδεώδη $J_1 = J \vee \downarrow(b)$ και $J_2 = J \vee \downarrow(c)$. Θα δείξουμε ότι δε μπορεί να ισχύει ταυτόχρονα $J_1 \wedge \uparrow(a) \neq \emptyset$ και $J_2 \wedge \uparrow(a) \neq \emptyset$. Πράγματι, αν αυτά συνέβαιναν ταυτόχρονα θα είχαμε ότι το $a \leq j_1 \vee b$, για κάποιο $j_1 \in J$ καθώς και $a \leq j_2 \vee c$, για κάποιο $j_2 \in J$, οπότε

$$\begin{aligned} a &\leq (j_1 \vee b) \wedge (j_2 \vee c) \\ &= (j_1 \wedge j_2) \vee (j_1 \wedge c) \vee (j_2 \wedge c) \vee (j_2 \wedge b) \end{aligned}$$

Αυτό θα σήμαινε ότι $a \in J$ (άτοπο).

Αρα για κάποιο από τα J_1, J_2 έχουμε ότι δεν τέμνει το $\uparrow(a)$. Ας υποθέσουμε ότι αυτό συμβαίνει για το J_1. Τότε $J_1 = J$ ή $J_1 = D$. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε ότι $J = J \vee \downarrow(b)$, άρα $\downarrow(b) \subseteq J$, οπότε $b \in J$. Στην δεύτερη περίπτωση $1 \in J_1$, δηλαδή $1 = j \vee b$, για κάποιο $j \in J$. Εχουμε τότε ότι

$$\begin{aligned} c &= c \wedge (j \vee b) \\ &= (j \wedge c) \vee (b \wedge c) \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι $c \in J$, δεδομένου ότι $j \wedge c \leq j \in J$ και $b \wedge c \in J$. ■

Εχουμε επομένως ολοκληρώσει την απόδειξη του Θεωρήματος. ■

4.3.5 Πόρισμα. ***(Δυϊσμός του Stone για επιμεριστικά δικτυωτά)*** *Κάθε επιμεριστικό δικτυωτό είναι ισόμορφο με το δικτυωτό των συμπαγών ανοικτών υποσυνόλων ενός τοπολογικού χώρου*

Απόδειξη: Εχουμε ότι

$$\mathrm{Idl}(D) \cong O(\mathrm{pts}(\mathrm{Idl}(D))),$$

για κάθε επιμεριστικό δικτυωτό D. Ομως τα συμπαγή ανοικτά υποσύνολα του τοπολογικού χώρου $\mathrm{pts}(\mathrm{Idl}(D))$ είναι, όπως έχουμε αναλύσει στα παραδείγματα του δεύτερου κεφαλαίου, ακριβώς τα πεπερασμένα στοιχεία του συνοχικού πλαισίου $\mathrm{Idl}(D)$. Επίσης, όπως δείξαμε στην ενότητα 2.3 του δεύτερου κεφαλαίου, τα πεπερασμένα στοιχεία ενός αλγεβρικού δικτυωτού της μορφής $\mathrm{Idl}(D)$ είναι σε ένα προς ένα αντιστοιχία με τα στοιχεία του D. Ετσι προκύπτει το ζητούμενο. ■

4.4 Συμπαγές και πληρότητα στον Προτασιακό Λογισμό

Το θεώρημα συμπαγότητας του Προτασιακού Λογισμού Ας θυμηθούμε την κατασκευή της άλγεβρας Boole των Lindembaum - Tarski B, δηλαδή την άλεβρα των κλάσεων ισοδυναμίας προτάσεων ως προς τη σχέση

$$\sigma \equiv \tau \text{ αν και μόνο αν } \vdash \sigma \leftrightarrow \tau$$

Ας θυμηθούμε επίσης την έννοια του **ικανοποιήσιμου** συνόλου προτάσεων: Ενα σύνολο προτάσεων Σ λέγεται ικανοποιήσιμο αν υπάρχει μια εκτίμηση αλήθειας $v\colon \Pi \to \{0,1\}$, από το σύνολο των προτάσεων στην άλγεβρα Boole $2 = \{0,1\}$, έτσι ώστε για όλες τις προτάσεις $\sigma \in \Sigma$ να είναι $v(\sigma) = 1$. Ομως, όπως εξηγούμε στο [;], μια εκτίμηση αλήθειας είναι συμβιβαστή με τη σχέση ισοδυναμίας, παραπάνω, άρα περιορίζεται σ΄ έναν ομομορφισμό αλγεβρών Boole

$$\overline{v}\colon B \to 2,$$

ένω και κάθε τέτοιος ομομορφισμός δίνει μια εκτίμηση αλήθειας, έτσι ώστε οι δύο διαδικασίες να είναι σε ένα προς ένα αντιστοιχία. Στη βάση όλης της συζήτησης που έχει προηγηθεί σε αυτό το κεφάλαιο μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει μία ένα προς ένα αντιστοιχία ανάμεσα σε εκτιμήσεις αλήθειας των προτάσεων του προτασιακού λογισμού και ¨σημεία' του πλήρους επιμεριστικού δικτυωτού $\mathrm{Idl}(B)$. Προκειμένου για τέτοιου είδους συνοχικά πλαίσια (ιδεώδη πάνω σε άλγερες Boole) έχουμε:

4.4.1 Λήμμα. *Τα σύνολα $\varphi(a) = \{p \in \mathrm{pts}(A) \mid p(a) = 1\}$ και $\varphi(\neg a) = \{p \in \mathrm{pts}(A) \mid p(\neg a) = 1\}$ είναι συμπληρωματικά.*

Απόδειξη: Πράγματι, θέτοντας $A = \mathrm{Idl}(B)$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\varphi(a) \cap \varphi(\neg a) &= \{p \in \mathrm{pts}(A) \mid p(a) = 1\} \cap \{p \in \mathrm{pts}(A) \mid p(\neg a) = 1\} \\
&= \{p \in \mathrm{pts}(A) \mid p(a) = 1 \;\&\; p(a) = 1\} \\
&= \emptyset
\end{aligned}$$

ενώ παράλληλα

$$\begin{aligned}
\varphi(a) \cup \varphi(\neg a) &= \{p \in \mathrm{pts}(A) \mid p(a) = 1\} \cup \{p \in \mathrm{pts}(A) \mid p(\neg a) = 1\} \\
&= \{p \in \mathrm{pts}(A) \mid p(a) = 1 \text{ είτε } p(a) = 1\} \\
&= \mathrm{pts}(A)
\end{aligned}$$

■

Ας επιστρέψουμε τώρα στον Προτασιακό Λογισμό και ας κάνουμε την παραδοχή ότι Σ είναι ένα σύνολο προτάσεων με την ιδιότητα ότι κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του είναι ικανοποιήσιμο. Αυτό σημαίνει, με όρους άλγεβρας Boole, ότι, για κάθε πεπερασμένο σύνολο προτάσεων $\{\sigma_1, ..., \sigma_n\} \subseteq \Sigma$ έχουμε

$$\bigcap_{i=1}^{n} \varphi([\sigma_i]) = \bigcap_{i=1}^{n} \{p \in \mathrm{pts}(A) \mid p([\sigma_i]) = 1\} \neq \emptyset$$

Ισχυριζόμαστε ότι τότε είναι επίσης και

$$\bigcap_{\sigma \in \Sigma} \varphi([\sigma_i]) = \bigcap_{\sigma \in \Sigma} \{p \in \mathrm{pts}(A) \mid p([\sigma_i]) = 1\} \neq \emptyset$$

Με άλλα λόγια ισχυριζόμαστε ότι το σύνολο Σ είναι επίσης ικανοποιήσιμο. Αυτό είναι το περιεχόμενο του παρακάτω θεωρήματος:

4.4.2 Θεώρημα. ***(Θεώρημα Συμπαγότητας του Προτασιακού Λογισμού)*** *Εστω ότι Σ είναι ένα σύνολο προτάσεων με την ιδιότητα ότι κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του είναι ικανοποιήσιμο. Τότε το σύνολο Σ είναι επίσης ικανοποιήσιμο.*

Απόδειξη: Εχουμε δει ότι η υπόθεση ισοδυναμεί με το γεγονός ότι

$$\bigcap_{i=1}^{n} \varphi([\sigma_i]) \neq \emptyset.$$

Αν το συμπέρασμα δεν ίσχυε θα σήμαινε ότι $\bigcap_{\sigma \in \Sigma} \varphi([\sigma_i]) = \emptyset$. Ισοδύναμα, ότι $\bigcup_{\sigma \in \Sigma} \varphi([\neg \sigma_i]) = \mathrm{pts}(A)$ (*).

Ομως το σύνολο των σημείων είναι, όπως εξηγήσαμε νωρίτερα σε αυτό το κεφάλαιο, εφοδιασμένο κατά φυσικό τρόπο με τη δομή ενός τοπολογικού χώρου. Συγκεκριμένα τα ανοικτά υποσύνολά του είναι ακριβώς αυτά της μορφής

$\varphi([\sigma])$, για κάποια πρόταση σ. Επιπλέον, ως πόρισμα του Θεωρήματος περί ύπαρξης αρκετών σημείων για τα συνοχικά πλαίσια, έχουμε ότι

$$\mathrm{Idl}(B) \cong O(\mathrm{pts}(\mathrm{Idl}(B))).$$

Ομως το $\mathrm{Idl}(B)$, ως συνοχικό πλαίσιο έχει το κορυφαίο του στοιχείο πεπερασμένο. Αυτό σημαίνει, όπως έχουμε επισημάνει ότι ως τοπολογικός χώρος ο $\mathrm{pts}(\mathrm{Idl}(B)))$ είναι συμπαγής. Αυτό ακριβώς αξιοποιούμε για να τελειώσουμε την απόδειξη του θεωρήματος (από εδώ άλλωστε προκύπτει και το όνομα του): Λόγω της συμπαγότητας η υπόθεση (*) που κάναμε παραπάνω δίνει ότι για ένα πεπερασμένο πλήθος προτάσεων $\sigma_1, ..., \sigma_n$ θα έχουμε ότι

$$\bigcup_i^n \varphi([\neg\sigma_i]) = \mathrm{pts}(A)$$

Ισοδύναμα ότι για ένα πεπερασμένο πλήθος προτάσεων $\sigma_1, ..., \sigma_n$ θα έχουμε

$$\bigcap_i^n \varphi([\sigma_i]) = \emptyset,$$

πράγμα άτοπο. ■

Το θεώρημα πληρότητας του Προτασιακού Λογισμού Στον προτασιακό λογισμό απαντώνται δύο έννοιες αλήθειας για τις προτάσεις. Η μία έχει να κάνει με το αν μια πρόταση είναι αποδείξιμη στα πλαίσια ενός τυπικού αποδεικτικού συστήματος. Θεωρούμε δηλαδή ένα σχετικά μικρό σύνολο προτάσεων που θεωρούμε λογικά αληθείς (λογικά αξιώματα) και στη συνέχεια παράγουμε τις υπόλοιπες λογικά αληθείς προτάσεις μέσω του κανόνα εξαγωγής συμπερασμάτων, γνωστού με το όνομα modus ponens. Δηλαδή, από τις σ, $\sigma \to \tau$ συμπεραίνουμε την τ. Ως αξιώματα παίρνει συνήθως κανείς ένα πεπερασμένο σύνολο ¨αξιωματικών σχημάτων¨, δηλαδή προσδιορίζει ότι ένα πεπερασμένο σύνολο προτάσεων της ¨τάδε και τάδε μορφής' είναι λογικά αξιώματα. Είναι ένα σύστημα που μας επιτρέπει να παράγουμε με έναν τρόπο σχεδόν μηχανικό (ή έστω ¨μηχανοποιήσιμο¨) τις λογικές αλήθειες. Αυτή είναι η συντακτική έννοια της αλήθειας. Από την άλλη πλευρά υπάρχει η σημασιολογική έννοια της αλήθειας, η οποία είναι πιό εύληπτη: Οι λογικές αλήθειες είναι οι ταυτολογίες. Αυτές δηλαδή που καθίστανται αληθείς από οποιαδήποτε εκτίμηση αλήθειας, ή αλλιώς οποιαδήποτε τιμή αλήθειας κι αν δώσουμε στα βασικά συστατικά τους (τις προτασιακές μεταβλητές). Οποιο σύνολο προτάσεων κι αν θεωρήσουμε σαν βάση για την πρώτη προσέγγιση (δηλαδή ως λογικά αξιώματα) είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι οι τυπικά αποδείξιμες προτάσεις είναι και ταυτολογίες. Το περιεχόμενο όμως του Θεωρήματος Πληρότητας για τον

Προτασιακό Λογισμό είναι ακριώς ότι αυτές οι δύο κλάσεις προτάσεων ταυτίζονται. Δηλαδή μπορούμε να βρούμε ένα σύνολο λογικών αξιωμάτων που η οποιαδήποτε ταυτολογία να παίρνεται ως λογική συνέπεια αυτού του συνόλου. Συνήθως στη βιβλιογραφία της Μαθηματικής Λογικής εμφανίζονται ιδιαίτερα οικονομικά τέτοια σχήματα (περιέχουν πολύ λίγα αξιωματικά σχήματα) αλλά δεν περιέχουν τα πλέον προφανή αξιώματα, ενώ συχνά η παραγωγή στο πλαίσιο αυτών των συστημάτων ακόμα και των προφανέστερων ταυτολογιών είναι μια αρκετά επίπονη υπόθεση. Είναι εύλογο να θεωρήσουμε κάπως ευρύτερα τέτοια σύνολα (πάντα όμως πεπερασμένα), τόσο ευρέα που να μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι η άλεβρα των κλάσεων ισοδυναμίας προτάσεων ως προς τη σχέση

$$\sigma \equiv \tau \text{ αν και μόνο αν } \vdash \sigma \leftrightarrow \tau,$$

που είδαμε παραπάνω είναι άλγεβρα Boole. Ετσι, για παράδειγμα θα μπορούσαμε να συμπεριλάβουμε στα αξιωματικά μας σχήματα τα ακόλουθα:

$$\sigma\wedge\sigma \to \sigma \quad \sigma\wedge\tau \to \sigma, \quad \sigma\wedge\tau \to \tau\wedge\sigma, \quad \sigma \to \sigma\vee\tau, \quad \tau\vee\sigma \to \sigma\vee\tau, \quad \neg\neg\sigma \leftrightarrow \sigma,$$

και λοιπά. Δοθέντος λοιπόν ότι η άλγεβρα των προτάσεων ως προς την παραπάνω σχέση ισοδυναμίας αποτελεί άλγεβρα Boole B, στην οποία οι αποδείξιμες προτάσεις είναι αυτές οι σ για τις οποίες $[\sigma] = 1$, το ζήτημα της πληρότητας ανάγεται στο εξής αλγεβρικό πρόβλημα: Οταν μας δίνεται μια πρόταση σ, για την οποία ξέρουμε ότι, για κάθε ομομορφισμό αλγεβρών Boole $v\colon B \to 2$, είναι $v([\sigma]) = 1$, να αποδείξουμε ότι $[\sigma] = 1$. Ισοδύναμα, θέλουμε το εξής: Οταν μας δίνεται μια πρόταση σ, για την οποία ξέρουμε ότι $[\sigma] \neq 1$, να μπορούμε να βρούμε ομομορφισμό αλγεβρών Boole $v\colon B \to 2$, ώστε να είναι $v([\sigma]) = 0$. Η συζήτηση λοιπόν αυτή μας φέρνει στο πλαίσιο της ανάλυσης των ενοτήτων 1 και 3 του παρόντος κεφαλαίου. Θέλουμε, δοθέντος ενός στοιχείου $b \neq 1$ μιας άλγεβρας Boole να βρούμε ένα (γνήσιο) πρώτο ιδεώδες I με $b \in I$. Στο σημείο αυτό θα μπορούσαμε να κάνουμε μια ακόμα απ΄ ευθείας εφαρμογή του λήμματος του Zorn ή, για οικονομία, να χρησιμοποιήσουμε ένα από τα ως τώρα αποτελέσματά μας, όπως το Λήμμα 4.3.4. Πράγματι, από το προαναφερθέν Λήμμα, υπάρχει ιδεώδες πρώτο ιδεώδες I που περιέχει το $\downarrow(b)$ και το οποίο έχει κενή τομή με το (τετριμμένο) φίλτρο $\uparrow(1)$. Αυτό αποδεικνύει και το ζητούμενο.

Ας σημειώσουμε εδώ ότι το η ύπαρξη αρκετών σημείων για ένα πλήρως επιμεριστικό δικτυωτό A έχει πάντα το χαρακτήρα ενός θεωρήματος πληρότητος για κάποιο λογικό σύστημα. Με αυτό εννοούμε το εξής: Μπορούμε να θεωρούμε συστήματα του προτασιακού λογισμού όπου επιτρέπουμε την ύπαρξη διαζεύξεων όχι απλώς πεπερασμένου μήκους αλλά που παραμετρικοποιούνται από κάποια ενδεχομένως άπειρα σύνολα (φανταστείτε, για παράδειγμα, τη διάζευξη των προτάσεων

$$\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{1+1+...+1}_{n} = 0$$

που μπορεί να μας λένε ότι ένα σώμα έχει χαρακτηριστική διαφορετική από το 0). Αν ερμηνεύσουμε την ανισότητα του δικτυωτού ως σχέση λογικής συνεπαγωγής (δηλαδή $a \leq b$ σημαίνει $a \to b = 1$) τότε μπορούμε να θέσουμε το ερώτημα της προηγούμενης παραγράφου, δηλαδή δοθέντος ενός στοιχείου $b \neq 1$ μπορούμε να βρούμε $v\colon A \to 2$ με $v(b) = 0$; Αν το δικτυωτό που εξετάζουμε έχει αρκετά σημεία η απάντηση παίρνεται αυτομάτως: Ειναι $1 \not\leq b$, άρα υπάρχει $v\colon A \to 2$ με $v(b) = 0$ (και $v(1) = 1$).

Τοπικώς συμπαγή πλαίσια Κλείνουμε συζητώντας μια άλλη χαρακτηριστική περίπτωση πλαισίων που έχουν αρκετά σημεία. Επαναφέρουμε εδώ στη συζήτησή μας τις προσαρημένες απεικονίσεις του προηγούμενου κεφαλαίου.

Εστω λοιπόν ένα πλαίσιο A. Βλέποντάς το ως επιμεριστικό δικτυωτό μπορούμε να θεωρήσουμε το σύνολο των ιδεωδών πάνε σε αυτό $\mathrm{Idl}(A)$. Αυτό το τελευταίο έχει αρκετά σημεία. Επιπλέον γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένα ζεύγος προσαρτημένων απεικονίσεων

$$\downarrow(-)\colon A \rightleftarrows \mathrm{Idl}(A)\colon \bigvee$$

που απεικονίζει ένα στοιχείο του A στο κάτω τμήμα του και, από την άλλη πλευρά, ένα ιδεώδες του A στο supremum του μέσα στο A. Η απεικόνιση $\downarrow(-)$ είναι ένα προς ένα και επιπλέον έχουμε ότι $\bigvee \downarrow(a) = a$, για κάθε $a \in A$. Ας κάνουμε τώρα την υπόθεση ότι η απεικόνιση $\bigvee\colon \mathrm{Idl}(A) \to A$ έχει περαιτέρω αριστερά προσαρτημένη απεικόνιση $l\colon A \to \mathrm{Idl}(A)$ ($l \dashv \bigvee$). Επεται ότι η l ανακλά τη διάταξη:

$$\begin{aligned} l(a) \leq l(a') &\Rightarrow l(a) \leq l\bigvee \downarrow(a') \\ (l \circ \bigvee \leq id) &\Rightarrow l(a) \leq \downarrow(a') \\ &= a \leq \bigvee \downarrow(a') = a' \end{aligned}$$

Αν τώρα κάνουμε την επιπλέον υπόθεση ότι η l διατηρεί πεπερασμένα infima μπορούμε να εφαρμόσουμε την Πρόταση 4.2.3 και να συμπεράνουμε ότι το A έχει αρκετά σημεία.

Ποιό είναι το νόημα των υποθέσεων που κάναμε εδώ για την ύπαρξη και τις ιδιότητες της l; Πλαίσια A που έχουν αυτήν την ιδιότητα εμφανίζονται με πολύ μεγάλη συχνότητα. Συγκεκριμένα τέτοια είναι τα πλαίσια των ανοικτών υποσυνόλων μερικών από τους πλέον συχνά εμφανιζόμενους και χρήσιμους τοπολογικούς χώρους, όπως είναι οι συμπαγείς χώροι Hausdorff και τα ¨πεδία' Scott εφοδιασμένα με την ομώνυμη τοπολογία, τα οποία παίζουν καθοριστικό ρόλο στη σημασιολογία των γλωσσών προγραμματισμού.

4.5 Ασκήσεις

1. Εστω A ένα πλαίσιο. Δείξτε ότι υπάρχει ένα προς ένα αντιστοιχία ανάμεσα σε συναρτήσεις $f\colon A \to 2$ που διατηρούν πεπερασμένα infima και κατευθυνόμενα suprema και φίλτρα F με την ιδιότητα ότι αν S είναι κατευθυνόμενο και $\bigvee S \in F$ τότε υπάρχει $s \in S$ με $s \in F$.

2. Ενα στοιχείο a μιας άλγεβρας Boole λέγεται *άτομο* αν $x \leq a$ έπεται $x = 0$ ή $x = a$. Δείξτε ότι σε μία πλήρη άλγεβρα Boole ένα στοιχείο είναι πρώτο αν και μόνο αν το συμπλήρωμά του είναι άτομο. Επομένως, δείξτε ότι υπάρχει μία ένα προς ένα αντιστοιχία ανάμεσα στα στα σημεία μίας πλήρους άλγεβρας Boole και στα άτομα αυτής.

3. Δείξτε ότι ένα πλαίσιο έχει αρκετά σημεία αν και μόνο αν κάθε στοιχείο του μπορεί να γραφεί ως infimum πρώτων στοιχείων.

4. Εστω ότι A και B είναι πλαίσια με αρκετά σημεία και $f^* \dashv f_*\colon A \to B$ ένα ζευγάρι προσαρτημένων απεικονίσεων ανάμεσά τους. Δείξτε ότι η f^* διατηρεί πεπερασμένα infima αν και μόνο αν η f_* διατηρεί πρώτα στοιχεία.

5. Δείξτε ότι το σύνολο των σημείων ενός πλαισίου (με την κατά σημείο διάταξη, αν βλέπουμε τα σημεία ως συναρτήσεις) έχει suprema γιά όλα τα κατευθυνόμενα υποσύνολά του.

6. (**Δύσκολη!**) Χρησιμοποιώντας τα διάφορα λήμματα του κεφαλαίου αυτού περί υπάρξεως maximal φίλτρων, δείξτε ότι ένα μη τετριμμένο (δηλαδή $0 \neq 1$) συμπαγές πλαίσιο έχει τουλάχιστον ένα σημείο.

Βιβλιογραφία

[1] R. Balbes and P. Dwinger, *Distributive Lattices*, University of Missuri Press, 1974

[2] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, AMS Colloquia Publications, Vol. 25, Providence, 1948

[3] B. Davey and H. A. Priestley, *Introduction to Lattices and Order*, Cambridge University Press, 1990

[4] Κ. Δρόσου, Ε. Παπαδοπετράκη, *Στοιχεία Μαθηματικής Λογικής*, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, 1999

[5] P. T. Johnstone, *Stone Spaces*, Cambridge University Press, 1982

[6] Κ. Κάλφα, *Αξιωματική Θεωρία Συνόλων*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη 1990

[7] Ν. Κεχαγιοπούλου, *Στοιχεία Θεωρίας Συνδέσμων*, Αθήνα 1985

[8] Γ. Ν. Μοσχοβάκης, *Σημειώσεις στη Συνολοθεωρία*, Εκδόσεις Νεφέλη, Αθήνα 1993

[9] Χ. Χαρτώνας, Βασική Λογική, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη 2000.