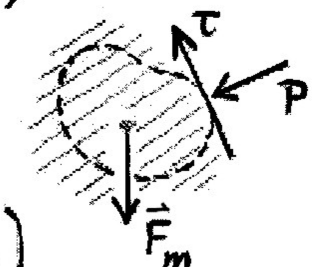
Φύλλο για τη «Μηχανική των Ρευστών»

Ι.-Π. βαν ντερ Βέιλε

Εισαγωγικά (Κεφ. 1)

Οι δυνάμεις που δρουν πάνω σ'ένα ρευστό σωματίδιο



(1) οι καθολικές δυνάμεις $\vec{F}_m$ ανά μονάδα μάζας,
π.χ. η βαρύτητα: $\vec{F}_m = (0, 0, -g)$ $[N/kg] = [m/s^2]$

(2) η πίεση P (κάθετη στην επιφάνεια) $= \dfrac{\text{δύναμη}}{\text{εμβαδόν}}$

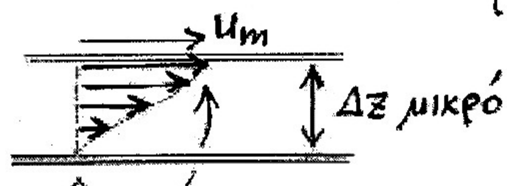
(3) η διατμητική ένταση τ (εφαπτομενική στην επιφάνεια) $= \dfrac{\text{δύναμη}}{\text{εμβαδόν}}$

(2), (3): $[N/m^2] = Pa$

Χαρακτηριστικές ιδιότητες των ρευστών:

* πυκνότητα $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ $[kg/m^3]$
  $\rho \approx$ σταθ. για τα υγρά (σχεδόν ασυμπίεστα)
* ιξώδες ("εσωτερική τριβή") $\mu = \dfrac{\tau}{(du/dz)}$ $[Pa \cdot s]$

π.χ.



$du/dz \approx \dfrac{u_m}{\Delta z}$

συνθήκη μη-ολίσθησης: Τα μόρια που βρίσκονται σε επαφή με τα σύνορα έχουν την ίδια ταχύτητα με αυτά.

Στατική των ρευστών (Κεφ. 2)

Για ένα ρευστό που ηρεμεί ισχύει $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$. Οι εφαπτομενικές εντάσεις είναι μηδενικές (αφού το ρευστό δεν ρέει) και η πίεση $P = P(\vec{r}, \cancel{t})$ είναι ισότροπη ("αρχή του Pascal").

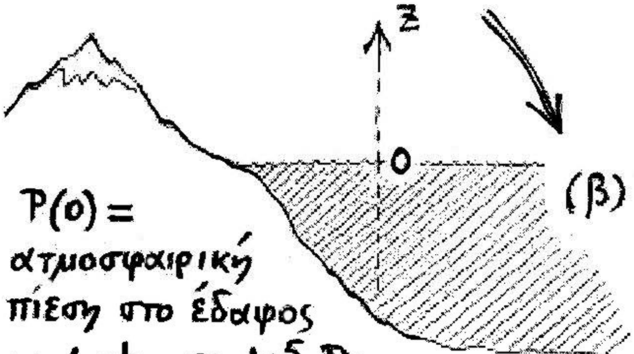
Εάν η μόνη καθολική δύναμη είναι η βαρύτητα:

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \Rightarrow$$

(α) για $\rho = \frac{\lambda}{g} P$ (όπως για ιδανικά αέρια με σταθερή θερμοκρασία):

$$P(z) = P(0)\, e^{-\lambda z} \qquad (z > 0)$$

"βαρομετρική πίεση"



$P(0) =$ ατμοσφαιρική πίεση στο έδαφος $= 1$ atm. $\approx 10^5$ Pa

(β) για $\rho =$ σταθ. (υγρά):

$$P(z) = P(0) - \rho g z \qquad (z < 0)$$

"υδροστατική πίεση"

Δυναμική των ρευστών (Κεφ. 3-7)

Στην περιγραφή της κίνησης ενός ρευστού κατά Euler παίζει πρωταγωνιστικό ρόλο το <u>πεδίο ταχύτητας</u>:

$$\vec{q}(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} u(\vec{r},t) \\ v(\vec{r},t) \\ w(\vec{r},t) \end{pmatrix} \qquad [m/s]$$

και η <u>ολική παράγωγος</u> του ως προς t (= πεδίο επιτάχυνσης):

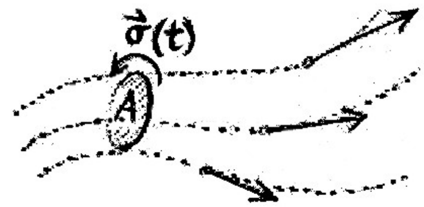
$$\frac{d}{dt}\vec{q} = \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{q}\cdot\vec{\nabla})\vec{q}} \qquad [m/s^2]$$

$$= \vec{\nabla}\left(\tfrac{1}{2}\vec{q}^{\,2}\right) + (\vec{\nabla}\times\vec{q})\times\vec{q} \qquad \begin{pmatrix}\text{μορφή} \\ \text{του Lamb}\end{pmatrix}$$

Εάν αυτός ο όρος είναι *μηδενικός*, η ροή είναι <u>σταθερή</u>: $\vec{q} = \vec{q}(\vec{r})$.

Εάν αυτός ο όρος είναι *μηδενικός*, η ροή είναι <u>ομοιόμορφη</u>: $\vec{q} = \vec{q}(t)$.

Οι <u>ρευματικές γραμμές</u> δείχνουν την κατεύθυνση του στιγμιαίου πεδίου ταχύτητας: $d\vec{r} \parallel \vec{q}$, άρα $d\vec{r} \times \vec{q} = \vec{0}$.



το στοιχειώδες κομμάτι $d\vec{r}$ της ρευματικής γραμμής είναι παράλληλο με την τοπική ταχύτητα $\vec{q}$

Παροχή : $Q = \iint_S \vec{q} \cdot d\vec{S} = \langle \vec{q} \rangle A \quad [m^3/s]$

μέση ταχύτητα

εμβαδόν της τομής απ' όπου διέρχεται η ροή

Κυκλοφορία : $\Gamma = \oint_{\vec{\sigma}} \vec{q} \cdot d\vec{\sigma} \quad [m^2/s]$

Εάν η ροή είναι <u>αστρόβιλη</u> $(\vec{\nabla} \times \vec{q} = \vec{0})$ το πεδίο ταχύτητας μπορεί να γραφεί ως εξής: $\vec{q} = -\vec{\nabla}\Phi$, όπου $\Phi = \Phi(\vec{r}, t)$ είναι το <u>δυναμικό</u> της ταχύτητας.

Οι (στιγμιαίες) ισοδυναμικές επιφάνειες $\Phi(\vec{r}, t_0) = C$ είναι κάθετες στις (στιγμιαίες) ρευματικές γραμμές.

Η κάθε ροή πρέπει να ικανοποιεί την <u>εξίσωση συνέχειας</u>, που εκφράζει τη διατήρηση της μάζας : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{q}) = 0 \quad [kg/m^3 s]$

Εάν $\rho =$ σταθ. (ασυμπίεστα ρευστά) τότε : $\vec{\nabla} \cdot \vec{q} = 0$

Για δισδιάστατη ροή γίνεται $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$, συνεπώς το πεδίο ταχύτητας $\vec{q} = (u, v, 0)$ περιγράφεται μέσω μιας ροϊκής συνάρτησης $\psi(x, y)$ έτσι ώστε $u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$.

Η κάθε ροή πρέπει επίσης να ικανοποιεί τις <u>εξισώσεις κίνησης</u> ($2^{ος}$ νόμος του Newton για συνεχή μέσα) που για $\rho =$ σταθ. και $\mu =$ σταθ. παίρνουν την εξής μορφή:

$$\rho \frac{d\vec{q}}{dt} = \rho \vec{F}_m - \vec{\nabla} P + \mu \nabla^2 \vec{q}$$

εξισώσεις Navier-Stokes
για σταθερά ρ και μ

μεταβολή της ορμής.. | καθολικές δυνάμεις.. | κάθετη επιφανειακή δύναμη.. | εφαπτομενική επιφανειακή δύναμη.. | ..όλες ανά μονάδα όγκου

Όταν $\mu=0$ (ιδανικά ρευστά) καλούνται "εξισώσεις του Euler".

Εάν η ροή είναι σταθερή ($\partial\vec{q}/\partial t=0$) και η καθολική δύναμη συντηρητική ($\vec{F}_m=-\vec{\nabla}V_m$), οι εξισώσεις του Euler ολοκληρώνονται και μας δίνουν το "νόμο του Bernoulli" (διατήρηση ενέργειας):

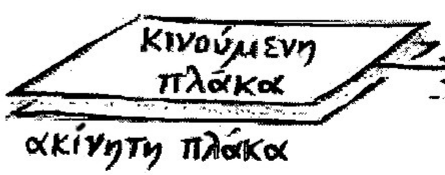
$$\frac{1}{2}\rho\vec{q}^{\,2} + \rho V_m + P = C$$

κατά μήκος μιας ρευματικής γραμμής

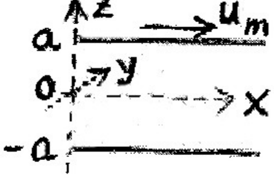
Ακόμα, όταν $\vec{\nabla}\times\vec{q}=\vec{0}$ (αστρόβιλη ροή) τότε η σταθερά C έχει την ίδια τιμή παντού στο ρευστό.

Το σύστημα των εξισώσεων συνέχειας και Navier-Stokes δέχεται μια αναλυτική λύση μόνο σε ορισμένες απλές περιπτώσεις. Δύο παραδείγματα:

(1) ροή Couette (σταθερή στρωτή ροή μεταξύ δύο επίπεδων πλακών).

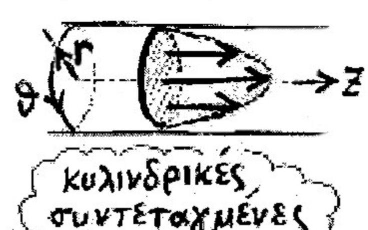


Άρα μια σταθερή βαθμίδα πίεσης $-\dfrac{\partial P}{\partial x}$ στην x-κατεύθυνση



$$\vec{q} = \begin{pmatrix} u(z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{με} \quad u(z) = \frac{1}{2}u_m\left(1+\frac{z}{a}\right) + \frac{a^2}{2\mu}\left(-\frac{\partial P}{\partial x}\right)\left\{1-\left(\frac{z}{a}\right)^2\right\}$$

(2) ροή Hagen-Poiseuille (σταθερή στρωτή ροή σε στρογγυλό σωλήνα ακτίνας R).



Το πεδίο $\vec{q}$ έχει μόνο μια μη-μηδενική συνιστώσα στην οριζόντια κατεύθυνση:

σταθερή βαθμίδα πίεσης

$$u_z(r) = \frac{R^2}{4\mu}\left(-\frac{\partial P}{\partial z}\right)\left\{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right\}$$