Ι.-Π. βαν ντερ Βέιλε

Φύλλο για ΠΑ IV

Έστω $f = f(x,y,z)$ ένα βαθμωτό πεδίο στο $\mathbb{R}^3$

και $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) \\ F_3(x,y,z) \end{pmatrix}$ ένα διανυσματικό πεδίο :

→ κλίση: $\quad \operatorname{grad} f = \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y \\ \partial f/\partial z \end{pmatrix}$

→ απόκλιση: $\quad \operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \dfrac{\partial F_1}{\partial x} + \dfrac{\partial F_2}{\partial y} + \dfrac{\partial F_3}{\partial z}$

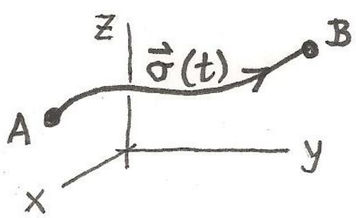
→ στροβιλισμός: $\operatorname{curl} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial F_3/\partial y - \partial F_2/\partial z \\ \partial F_1/\partial z - \partial F_3/\partial x \\ \partial F_2/\partial x - \partial F_1/\partial y \end{pmatrix}$

→ τελεστής Laplace: $\quad \nabla^2 f = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Σημαντικές ταυτότητες: $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = \vec{0}$, $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$.

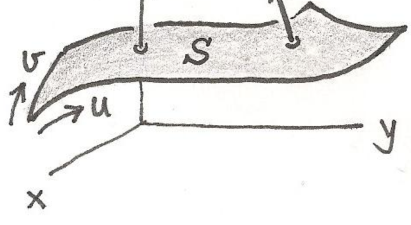
Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\vec{\sigma}} f\,ds = \int_{t_A}^{t_B} f(\vec{\sigma}(t))\,\|\vec{\sigma}\,'(t)\|\,dt \\[2ex] \displaystyle\int_{\vec{\sigma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}\,'(t)\,dt \quad \text{"έργο"} \end{cases}$$



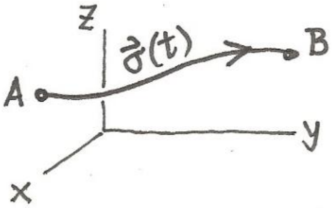
Επιφανειακό ολοκλήρωμα:

$$\begin{cases} \displaystyle\iint_{S} f\,dS = \iint f\,\|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\|\,du\,dv \\[2ex] \displaystyle\iint_{S} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint \vec{F} \cdot (\vec{T}_u \times \vec{T}_v)\,du\,dv \end{cases}$$



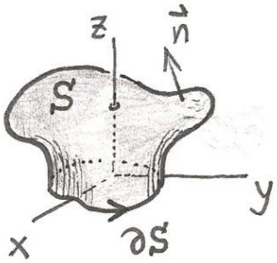
$\vec{n} = \vec{T}_u \times \vec{T}_v$ είναι κάθετο στην επιφάνεια S

"Θεώρημα της κλίσης":



$$\int_{\vec{\sigma}} \underbrace{(\vec{\nabla} f)}_{\text{πεδίο κλίσης}} \cdot d\vec{s} = f_B - f_A$$

Θεώρημα (στροβιλισμού) του Stokes:



$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

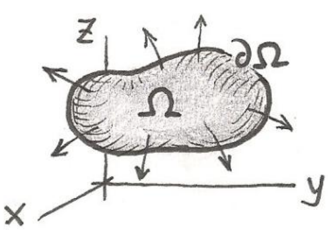
(όταν S δεν περιέχει σημεία όπου $\vec{F}$ απειρίζεται)

Στο xy επίπεδο, με $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \\ 0 \end{pmatrix}$, το ίδιο θεώρημα παίρνει τη μορφή

$$\iint_S \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\,dy = \oint_{\partial S} (F_1 dx + F_2 dy)$$

[το θεώρημα του Green στο επίπεδο]

Θεώρημα απόκλισης του Gauss:



$$\iiint_\Omega (\vec{\nabla} \cdot \vec{F})\, dV = \oiint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Αλλαγή μεταβλητών σε ολοκληρώματα:

Μη ξεχάσετε την Ιακωβιανή

1D: $$\int_L f(x)\,dx = \int_{L^*} \overbrace{f(x(u))}^{\tilde{f}(u)} \left| \frac{dx}{du} \right| du$$

2D: $$\iint_S f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{S^*} \tilde{f}(u,v) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv \quad \text{με} \quad \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \right|$$

3D: $$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega^*} \tilde{f}(u,v,w) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| du\,dv\,dw$$