Λύσεις Μηχανική των Ρευστών – 14 Φεβρουαρίου 2011

1) (α) Αφού η ροή είναι σταθερή με ρευματικές γραμμές ευθείες και παράλληλες, μπορούμε να εφαρμόσουμε απλώς τον τύπο της υδροστατικής πίεσης (βλ. Φύλλο, σελ. 2):

$$P_1 = P_{\text{atm}} + \rho g\left(\tfrac{1}{2}d + h_1\right) = 1\cdot 10^5\,\text{Pa} + 1\cdot 10^3\,\text{Pa} = 101000\,\text{Pa},$$

$$P_2 = P_{\text{atm}} + \rho g\left(\tfrac{1}{2}d + h_2\right) = 1\cdot 10^5\,\text{Pa} + 2{,}28\cdot 10^3\,\text{Pa} = 102\,280\,\text{Pa},$$

όπου χρησιμοποιούμε τις γνωστές τιμές $P_{\text{atm}} = 1\cdot 10^5\,\text{Pa}$, $\rho = 1000\ \text{kg/m}^3$, $g = 10\ \text{m/s}^2$, $\tfrac{1}{2}d = 3\cdot 10^{-2}\,\text{m}$, $h_1 = 7\cdot 10^{-2}\,\text{m}$ και $h_2 = 19{,}8\cdot 10^{-2}\,\text{m}$.

(β) Εφαρμόζουμε το νόμο του Bernoulli (βλ. Φύλλο, σελ. 4) στα δύο σημεία 1 και 2, τα οποία βρίσκονται στην ίδια ρευματική γραμμή όπως δείχνει το σχήμα:

$$\tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 + P_1 = \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2 + P_2$$

Με $v_2 = 0\,\text{m/s}$ και $z_1 = z_2$ αυτή η σχέση απλοποιείται σε $\tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + P_1 = P_2$, άρα:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(P_2 - P_1)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}28\cdot 10^3\ \text{kg/ms}^2}{1\cdot 10^3\ \text{kg/m}^3}} = \sqrt{2{,}56}\ \text{m/s} = 1{,}60\ \text{m/s}.$$

2) (α) Για να είναι δυνατή μια ροή πρέπει να ικανοποιείται η εξίσωση συνέχειας (βλ. Φύλλο, σελ. 3) η οποία για ασυμπίεστα ομογενή ρευστά παίρνει την μορφή $\vec{\nabla}\cdot\vec{q} = 0$. Η επαλήθευση αυτής της σχέσης για το δοσμένο πεδίο ταχύτητας είναι μια άσκηση παραγώγισης:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\vec{q} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\frac{kx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{ky}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{kz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\
&= \frac{k(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - kx\cdot\tfrac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^3} \\
&\quad + \frac{k(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - ky\cdot\tfrac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\cdot 2y}{(x^2+y^2+z^2)^3} \\
&\quad + \frac{k(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - kz\cdot\tfrac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\cdot 2z}{(x^2+y^2+z^2)^3} \\
&= \frac{3k(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - 3k(x^2+y^2+z^2)\cdot(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3} = 0
\end{aligned}$$

(β) Η κυκλοφορία είναι το εξής επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (βλ. Φύλλο, σελ. 3)

$$\Gamma = \oint_{\vec{\sigma}} \vec{q} \cdot d\vec{\sigma} = \int_0^{2\pi} \vec{q}(t) \cdot \vec{\sigma}'(t)\, dt$$

όπου ο κύκλος ακτίνας 1 στο xy-επίπεδο παραμετρικοποιείται ως εξής:

$$\vec{\sigma}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \text{ για } 0 \le t < 2\pi , \quad \text{και επομένως } \vec{\sigma}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

και το πεδίο ταχύτητας πάνω στον κύκλο είναι (με $r = 1$):

$$\vec{q}(t) = \frac{k}{r^3}\vec{r} = k \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Άρα:

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} \vec{q}(t) \cdot \vec{\sigma}'(t)\, dt = k \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= k \int_0^{2\pi} (-\cos t \sin t + \sin t \cos t)\, dt = 0 \ \mathrm{m^2/s}$$

Αυτό το μηδενικό αποτέλεσμα μπορεί να βρεθεί και χωρίς πράξεις, εάν συνειδητοποιήσει κανείς ότι το πεδίο ταχύτητας είναι *κάθετο* στην συγκεκριμένη κυκλική καμπύλη, δηλαδή $\vec{q} \cdot d\vec{\sigma} = 0$ (το εσωτερικό γινόμενο της τοπικής ταχύτητας $\vec{q}$ και του στοιχείου $d\vec{\sigma}$ της καμπύλης είναι μηδενικό).

(γ) Για να υπάρξει δυναμικό ταχύτητας πρέπει η ροή να είναι αστρόβιλη (βλ. Φύλλο, σελ. 3) και αυτό ελέγχεται ως εξής:

$$\vec{\nabla} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{kx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & \dfrac{ky}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & \dfrac{kz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{0 - kz \cdot \frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2} \cdot 2y}{(x^2+y^2+z^2)^3} - \dfrac{0 - ky \cdot \frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2} \cdot 2z}{(x^2+y^2+z^2)^3} \\ \dfrac{0 - kx \cdot \frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2} \cdot 2z}{(x^2+y^2+z^2)^3} - \dfrac{0 - kz \cdot \frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2} \cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^3} \\ \dfrac{0 - ky \cdot \frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2} \cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^3} - \dfrac{0 - kx \cdot \frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2} \cdot 2y}{(x^2+y^2+z^2)^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Συμπεραίνουμε ότι το πεδίο ταχύτητας είναι όντως αστρόβιλο και μπορεί να γραφεί ως πεδίο κλίσης (βλ. Φύλλο, σελ. 3): $\vec{q} = -\vec{\nabla}\Phi$, όπου η συνάρτηση Φ λέγεται το δυναμικό της ταχύτητας. Για να υπολογίσουμε το δυναμικό γράφουμε την παραπάνω σχέση συνιστώσα προς συνιστώσα:

$$\frac{kx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} \qquad (1)$$

$$\frac{ky}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{\partial\Phi}{\partial y} \qquad (2)$$

$$\frac{kz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} \qquad (3)$$

Η συνάρτηση Φ (το ζητούμενο δυναμικό) που ικανοποιεί και τις τρεις σχέσεις είναι:

$$\Phi(x,y,z) = k\,(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} + C = \frac{k}{r} + C$$

όπου C μια ελεύθερη σταθερά.

3) (α) Η πίεση στην ελεύθερη επιφάνεια του στρώματος είναι $P_{\text{atm}} = 1 \cdot 10^5$ Pa (= 1 atm.). Συνεπάγεται ότι στην επιφάνεια ισχύει $\partial P/\partial z = 0$ (η μικρή αύξηση της ατμοσφαιρικής πίεσης προς τα κάτω είναι αμελητέα) καθώς και $\partial P/\partial y = 0$. Και αφού η βαρύτητα δεν έχει καμία συνιστώσα στις οριζόντιες κατευθύνσεις, $\partial P/\partial x = \partial P/\partial y = 0$, η πίεση P είναι ίση με P_{atm} σ' όλο το στρώμα λαδιού από την ελεύθερη επιφάνεια μέχρι τον τοίχο.

Άρα δεν υπάρχει βαθμίδα πίεσης. Η ισορροπία δυνάμεων στη συγκεκριμένη ροή συμπεριλαμβάνει μόνο – όπως θα δούμε παρακάτω, βλ. ερώτηση γ – τη δύναμη της βαρύτητας και την εσωτερική τριβή (ιξώδες) του λαδιού.

(β) Η εξίσωση συνέχειας για το ασυμπίεστο λάδι είναι (βλ. Φύλλο, σελ. 3): $\vec{\nabla}\cdot\vec{q} = 0$, ή:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Η ταχύτητα στην x κατεύθυνση είναι μηδενική (u=0) αφού η ροή είναι στρωτή και παράλληλη με τον τοίχο. Επίσης, η ταχύτητα στην y κατεύθυνση είναι μηδενική (v=0) λόγω συμμετρίας του συστήματος. Έτσι η παραπάνω εξίσωση συνέχειας παίρνει την απλή μορφή:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

πράγμα που σημαίνει ότι η συνιστώσα w δεν εξαρτάται από τον μεταβλητή z. Ξέρουμε επίσης ότι δεν εξαρτάται ούτε από το y (λόγω της προαναφερόμενης συμμετρίας) ούτε από τον χρόνο t (αφού η ροή είναι σταθερή), άρα:

$$w = w(x). \qquad \text{Ο.Ε.Δ.}$$

(γ) Οι εξισώσεις Navier-Stokes (βλ. Φύλλο, σελ. 4) στις x και y συνιστώσες είναι απλώς 0 = 0, αφού όλοι οι όροι είναι μηδενικοί. Μας μένει λοιπόν μόνο η εξίσωση στην z κατεύθυνση. Ας την γράψουμε πρώτα στην γενική της μορφή:

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\rho g-\frac{\partial P}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

Όλοι οι όροι στο αριστερό μέλος είναι μηδενικοί: [1] $\partial w/\partial t=0$ αφού η ροή είναι σταθερή, [2] ο δεύτερος όρος μηδενίζεται αφού $u = 0$, [3] στον τρίτο όρο τόσο το v όσο και το $\partial w/\partial y$ είναι μηδέν και [4] ο τέταρτος όρος είναι μηδέν σύμφωνα με την εξίσωση συνέχειας.
Στο δεξί μέλος μηδενίζονται [5] ο όρος $\partial P/\partial z$ αφού η πίεση έχει παντού την ίδια σταθερή τιμή (βλ. ερώτηση α) και [6,7] οι όροι $\partial^2 w/\partial y^2$ και $\partial^2 w/\partial z^2$ αφού η ταχύτητα w εξαρτάται μόνο από το x (βλ. ερώτηση β). Άρα η εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$0=-\rho g+\mu\frac{d^2 w}{dx^2} \qquad \text{ή ισοδύναμα:} \qquad \frac{d^2 w}{dx^2}=\frac{\rho g}{\mu},$$

όπου αντικαταστήσαμε τα ∂ (μερική παραγώγιση) με d, αφού η w εξαρτάται μόνο από το x.
Ολοκληρώνοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς x μας δίνει

$$\frac{dw}{dx}=B+\frac{\rho g}{\mu}x, \qquad \text{όπου } B \text{ μια σταθερά ολοκλήρωσης,}$$

και ολοκληρώνοντας ξανά παίρνουμε την γενική λύση της εκφώνησης:

$$w(x)=A+Bx+\frac{\rho g}{2\mu}x^2, \qquad \text{με } A \text{ μια δεύτερη σταθερά ολοκλήρωσης.}$$

(δ) (i) Η ταχύτητα $w(x)$ μετριέται σε m/s, άρα και οι τρεις όροι στο δεξί μέλος πρέπει να εκφραστούν σε m/s. Επομένως η σταθερά A εκφράζεται σε m/s και η σταθερά B σε 1/s (δεδομένου ότι το x εκφράζεται σε m).
(ii) Η συνθήκη μη-ολίσθησης (βλ. Φύλλο, σελ. 1) μας λέει ότι τα μόρια του λαδιού που βρίσκονται σε επαφή με τον τοίχο έχουν την ίδια μηδενική ταχύτητα με αυτόν:

$$w(0)=0, \qquad \text{δηλαδή:} \qquad A=0.$$

(iii) Το γεγονός ότι η διατμηματική τάση στην ελεύθερη επιφάνεια είναι αμελητέα σημαίνει (βλ. Φύλλο, σελ. 1) ότι η παράγωγος της $w(x)$ ως προς x μηδενίζεται εκεί:

$$\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=d}=0, \qquad \text{δηλαδή:} \qquad B+\frac{\rho g}{\mu}d=0, \qquad \text{άρα:} \quad B=-\frac{\rho g d}{\mu}.$$

(ε) Όλα τα παραπάνω οδηγούν στο τελικό αποτέλεσμα:

$$w(x)=-\frac{\rho g d}{\mu}x+\frac{\rho g}{2\mu}x^2=-\frac{\rho g}{2\mu}x\left(2d-x\right),$$

το οποίο απεικονίζεται στην διπλανή γραφική παράσταση. Το μέγιστο μέτρο της ταχύτητας (στην ελεύθερη επιφάνεια) είναι:

$$\left|w(d)\right|=\frac{\rho g d^2}{2\mu},$$

το οποίο ισούται (για τις δοσμένες τιμές των ρ, g, d και μ) με 5.45 cm/s.